Soustavy lineárních rovnic a lineární algebra

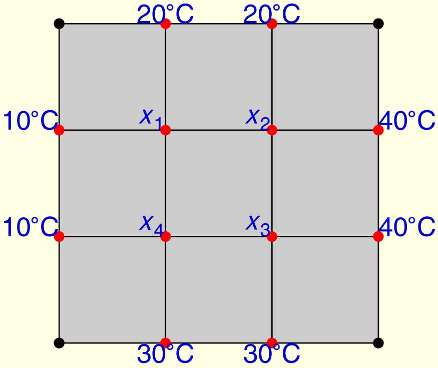
Robert Mařík

18. listopadu 2008

Důležitým problémem při studiu vedení tepla je určit stacionární rozložení teploty na tepelně vodivé desce, pro kterou známe rozdělení teploty na okrajích.
Vedení tepla se řídí parciální diferenciální rovnicí druhého řádu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 T}{(\partial y)^2} \right)$$

a při hledání stacionárního stavu klademe levou stranu rovnu nule. Vyřešit tuto rovnici analyticky je velice obtížné, budeme se tedy snažit řešení nějak rozumně aproximovat.

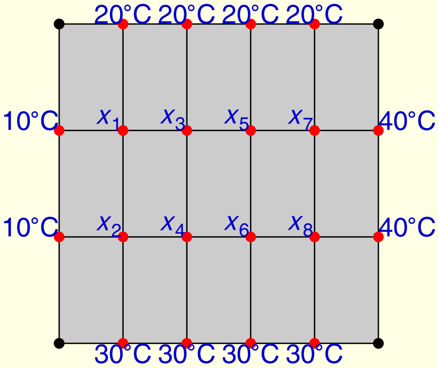


- Uvažujme kovovou desku, kterou si rozdělíme sítí na 12 uzlových bodů (rohy zanedbáme) jak je uvedeno na obrázku.
- V uzlových bodech sledujeme teplotu přičemž v uzlových bodech na okraji desky je teplota zadána.

Předpoklad: Teplota v každém uzlovém bodě je díky tepelné vodivosti desky přibližně rovna aritmetickému průměru teplot v sousedních bodech. Platí tedy

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(30 + x_2 + x_4) \\ x_2 &= \frac{1}{4}(60 + x_1 + x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{4}(70 + x_2 + x_4) \\ x_4 &= \frac{1}{4}(40 + x_1 + x_3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} 4x_1 & -x_2 & & -x_4 & = 30 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & & = 60 \\ -x_2 & & +4x_3 & -x_4 & = 70 \\ -x_1 & & -x_3 & +4x_4 & = 40 \end{array}\right\}$$

Dostali jsme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých.



Pro přesnější výpočet rozdělíme desku na více uzlů. Obdržíme podobně jako v minulém případě soustavu lineárních rovnic, kterou je možno zapsat ve tvaru

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

kde sloupcová matice $\vec{b}$ je určena teplotami na krajích desky a matice A je tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & & & \\ & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & & \\ & & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & \\ & & & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 0 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(nuly mimo pás kolem hlavní diagonály jsou vynechány).

- V praxi se v podobných úlohách používá velice jemná síť dělících bodů a takto se lze snadno setkat s rovnicemi, kde matice soustavy má tisíce řádků a sloupců. Při řešení se snažíme najít postup vyžadující co nejméně početních operací a využíváme přitom nejrůznějších teoretických poznatků z lineární algebry – opíráme se o maticový součin a jeho vlastnosti, pro formulaci podmínek řešitelnosti se používají pojmy jako determinant či hodnost, pro vyjádření řešení využíváme inverzní matici a podobně.

- Uvedený postup se používá při numerickém řešení uvedených problémů v praxi. Jediný rozdíl je v tom, že aritmetický průměr použítý v tomto ilustračním příkladě je nahrazen poněkud “rafinovanější” veličinou, jejíž sestavení je inspirováno rovnicí vedení tepla uvedenou na začátku tohoto dokumentu. Zpravidla je postup takový, že uživatel zadá příslušné fyzikální parametry a okrajové podmínky do specializovaného programu, který realizuje celý výpočet.

- Podobně lze studovat například i namáhání konstrukcí a mnohé další jevy, které jsou ve fyzice popsány diferenciálními rovnicemi druhého řádu – například proudění tekutin.