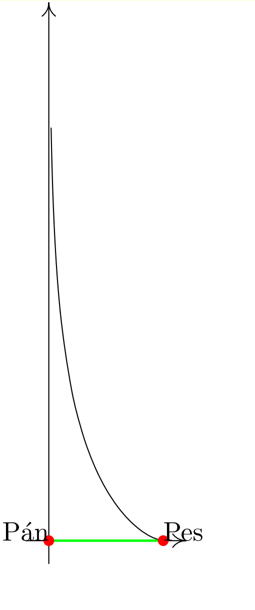
Křivka táhnutí

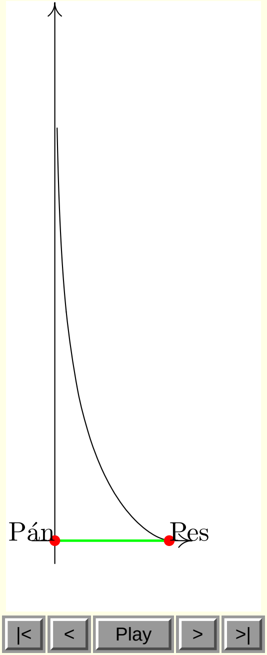


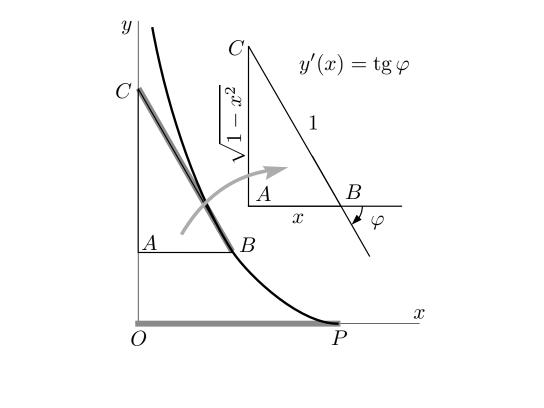
|< < Play > >|

- Jaká je *trajektorie* objektu, který je startuje napravo od jiného objektu, pohybujícího se směrem nahoru a táhnoucího první objekt na neprotažitelné struně za sebou?

- Pokud ztotožníme první objekt se psem a druhý s jeho pánem, je nám již zřejmé proč má tato křivka v německy mluvících zemích název *hundkurve*.

Křivka táhnutí





$$y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$y = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{gathered} 1-x^2=t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{gathered}}$$

Pomocí substituce odstraníme odmocninu.

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x &= t\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Musíme "vpašovat" členy u $\mathrm{d}x$ do integrálu.

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} 1-x^2=t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{array}} = \int \frac{t}{1-t^2}t\,\mathrm{d}t$$

Převedeme integrál z proměnné x^2 do proměnné t.

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} 1-x^2=t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{array}} = \int \frac{t}{1-t^2}t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Upravíme.

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} x\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} 1-x^2=t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{array}} = \int \frac{t}{1-t^2} t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int -1 + \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Vydělíme.

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} x\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{gathered} 1-x^2 = t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{gathered}} = \int \frac{t}{1-t^2} t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int -1 + \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -t + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$$

Zintegrujeme.

$$
-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}x\,\mathrm{d}x
$$

$$
= \boxed{\begin{array}{c} 1-x^2=t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{array}} = \int \frac{t}{1-t^2}t\,\mathrm{d}t
$$

$$
= \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int -1 + \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t
$$

$$
= -t + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}
$$

$$
= -t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{(1-t)(1+t)} = -t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{1-t^2}
$$

Upravíme.

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} 1-x^2=t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{array}} = \int \frac{t}{1-t^2}t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int -1 + \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -t + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$$

$$= -t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{(1-t)(1+t)} = -t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{1-t^2}$$

$$= -t + \ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Upravíme.

$$-\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} x\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} 1-x^2=t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ -x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \\ x^2 = 1-t^2 \end{array}} = \int \frac{t}{1-t^2} t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int -1 + \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -t + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$$

$$= -t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{(1-t)(1+t)} = -t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{1-t^2}$$

$$= -t + \ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

Převedeme do původní proměnné.

$$y = -\sqrt{1-x^2} + \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

$$y = -\sqrt{1-x^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

$$y(1) = 0$$

$$0 = -\sqrt{1-1} + \ln\frac{1+\sqrt{1-1}}{1} + C$$

$$C = 0$$

Použijeme počáteční polohu "psa" jako podmínku pro určení konstanty C.

$$y = -\sqrt{1-x^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

$$y(1) = 0$$

$$0 = -\sqrt{1-1} + \ln\frac{1+\sqrt{1-1}}{1} + C$$

$$C = 0$$

$$y = -\sqrt{1-x^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

- Rovnice křivky táhnutí je

$$y = -\sqrt{1-x^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Další čtení

- http://mathworld.wolfram.com/Tractrix.html
- http://www.pballew.net/tractrix.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Tractrix