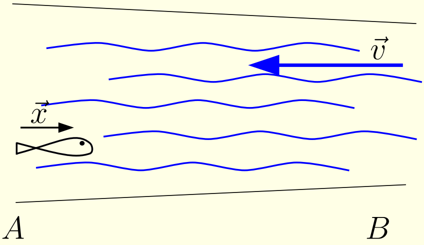
Hledání optimální rychlosti

Robert Mařík

22. ledna 2006

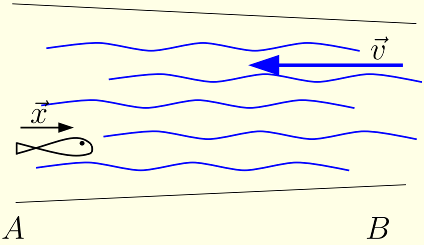
Snažíme-li se dostat proti proudu řeky z bodu A do bodu B, musíme plavat (či plout) dostatečně rychle, aby nás nestrhával proud, ale ne příliš rychle, abychom se brzo nevyčerpali (nespotřebovali mnoho paliva a nezavařili stroje). Je vhodné znát optimální rychlost, která umožní se do cíle dostat s vynaložením minimální energie.



Vhodnou volbou jednotek dosáhneme toho, že $\vec{v} = 1$.
Energie k přeplutí z bodu A do bodu B má být minimální : $\boxed{\dfrac{(x+1)^3}{x} \to \text{minimum}}$

$$\left(\frac{(x+1)^3}{x}\right)' = \frac{3(x+1)^2 \cdot x - (x+1)^3 \cdot 1}{x^2}$$

- Uvažujme rybu, která plave proti proudu v řece. Rychlosti jsou měřeny vzhledem k břehu. Ryba popluje takovou rychlostí, aby vydala co nejméně energie.
- Energie vydaná za časovou jednotku na plvání je úměrná výrazu $(x+v)^3$ (třetí mocnině relativní rychlosti ryby vzhledem k vodě).

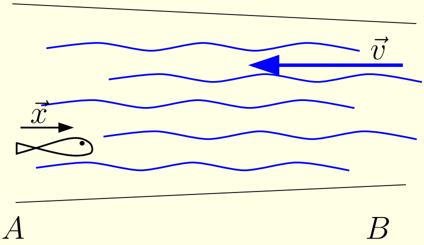


Vhodnou volbou jednotek dosáhneme toho, že $\vec{v} = 1$.

Energie k přeplutí z bodu A do bodu B má být minimální : $\boxed{\dfrac{(x+1)^3}{x} \to \text{minimum}}$

$$\left(\frac{(x+1)^3}{x}\right)' = \frac{3(x+1)^2 \cdot x - (x+1)^3 \cdot 1}{x^2}$$

- Energie vynaložená za časovou jednotku na plavání je úměrná výrazu $(x+1)^3$.
- Ryba popluje celkem $\dfrac{\text{vzdálenost k uplavání}}{\text{rychlost}}$ časových jednotek a doba plavání je tedy nepřímo úměrná rychlosti vzhledem k břehu x.



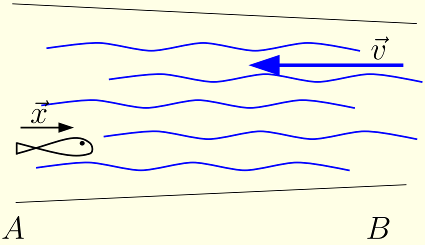
Vhodnou volbou jednotek dosáhneme toho, že $\vec{v} = 1$.
Energie k přeplutí z bodu A do bodu B má být minimální : $\boxed{\dfrac{(x+1)^3}{x} \to \text{minimum}}$

$$\left(\frac{(x+1)^3}{x}\right)' = \frac{3(x+1)^2 \cdot x - (x+1)^3 \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2\Big[3x - (x+1)\Big]}{x^2} = \frac{(x+1)^2\Big[2x - 1\Big]}{x^2}$$

Derivace je nulová pro $x = \dfrac{1}{2}$, tj. když ryba plave vzhledem k břehu poloviční rychlostí, než jakou proudí voda. Z povahy úlohy je zřejmé, že se jedná o minimum.

Hledáme derivaci.



Vhodnou volbou jednotek dosáhneme toho, že $\vec{v} = 1$.
Energie k přeplutí z bodu A do bodu B má být minimální : $\boxed{\dfrac{(x+1)^3}{x} \to \text{minimum}}$

$$\left(\frac{(x+1)^3}{x}\right)' = \frac{3(x+1)^2 \cdot x - (x+1)^3 \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2\Big[3x - (x+1)\Big]}{x^2} = \frac{(x+1)^2\Big[2x-1\Big]}{x^2}$$

Derivace je nulová pro $x = \dfrac{1}{2}$, tj. když ryba plave vzhledem k břehu poloviční rychlostí, než jakou proudí voda. Z povahy úlohy je zřejmé, že se jedná o minimum.
Stacionární bod $x = -1$ nemá v této úloze praktický význam a nevšímáme si jej.

Sestaveno podle knihy **Calculus, an introduction to applied mathematics**, H.P. Greenspan, D. J. Benney, J. E. Turner, nakl. McGraw Hill (1986), str. 128.

Migrující ryby umí vyřešit tuto optimalizační úlohu (nebo aspoň znají její řešení) – plavou proti proudu poloviční rychlostí, než je rychlost proudu (viz uvedená literatura).

