Parciální derivace a chyby nepřímo měřených veličin

Robert Mařík

21. ledna 2006

Modul pružnosti ve smyku G zpravidla měříme pomocí torzní deformace tyče délky l, kruhového průřezu o poloměru r. Vyvolá-li dvojice sil o celkovém momentu M deformaci o velikosti φ, vypočteme G podle vzorce

$$G = \frac{2lM}{\pi r^4 \varphi}.$$

Byly naměřeny hodnoty $r = 0.5$ mm, $l = 0.5$ m, $M = 0.02$ Nm a $\varphi = 1.4$ rad. Chceme zjistit, jak nepřesnosti při měření těchto veličin ovlivní celkovou nepřesnost při výpočtu veličiny G. K tomu využijeme aparát parciálních derivací.

$$\boxed{G = \frac{2lM}{\pi r^4 \varphi}} = \frac{2M}{\pi r^4 \varphi} l$$

Platí

$$\frac{\partial G}{\partial l} = \frac{2M}{\pi r^4 \varphi} = \frac{G}{l}$$

a proto můžeme psát přibližný vzorec

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial l} \Delta l = \frac{G}{l} \Delta l$$

a pro relativní chyby platí

$$\frac{\Delta G}{G} \approx \frac{\Delta l}{l}$$

a jsou tedy stejné. Jednoprocentní nejistota při měření délky tyče tedy vyvolává stejnou nejistotu u modulu pružnosti G.

$$\boxed{G = \frac{2lM}{\pi r^4 \varphi}} = \frac{2lM}{\pi \varphi} r^{-4}$$

Platí

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -4 \frac{2lM}{\pi \varphi} r^{-5} = -4 \frac{G}{r}$$

a proto můžeme psát přibližný vzorec

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial r} \Delta r = -4 \frac{G}{r} \Delta r$$

a pro relativní chyby platí

$$\frac{\Delta G}{G} \approx -4 \frac{\Delta r}{r}.$$

Jednoprocentní nejistota při měření poloměru tyče tedy vyvolává čtyřnásobnou nejistotu u modulu pružnosti G.

$$\boxed{G = \frac{2lM}{\pi r^4 \varphi}} = \frac{2M}{\pi r^4 \varphi} l$$

Platí

$$\frac{\partial G}{\partial l} = \frac{2M}{\pi r^4 \varphi} = \frac{G}{l}$$

a proto můžeme psát přibližný vzorec

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial l} \Delta l = \frac{G}{l} \Delta l$$

a pro relativní chyby platí

$$\frac{\Delta G}{G} \approx \frac{\Delta l}{l}$$

$$\boxed{G = \frac{2lM}{\pi r^4 \varphi}} = \frac{2lM}{\pi \varphi} r^{-4}$$

Platí

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -4 \frac{2lM}{\pi \varphi} r^{-5} = -4 \frac{G}{r}$$

a proto můžeme psát přibližný vzorec

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial r} \Delta r = -4 \frac{G}{r} \Delta r$$

a pro relativní chyby platí

$$\frac{\Delta G}{G} \approx -4 \frac{\Delta r}{r}.$$

Závěr: Při měření je tedy nutné se soustředit na to, aby relativní chyba byla co nejmenší především při měření poloměru tyče (resp. drátu). Chyba při měření délky drátu není tak podstatná (přesněji – projeví se čtyřikrát méně). Podobně je možno proanalyzovat vliv φ a M.