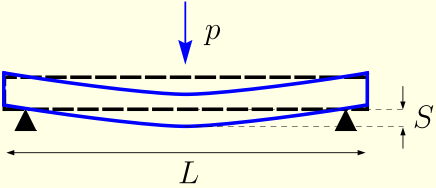
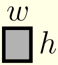
Derivace jako prostředek k hledání lokálních extrémů

Robert Mařík

22. ledna 2006

Mějme kulatinu délky L a poloměru r. Naším úkolem je vyříznout z kulatiny nosník obdélníkového průřezu, který bude co nejtužší – bude se co nejméně prohýbat.





$$S = C\frac{pL^4}{wh^3}$$

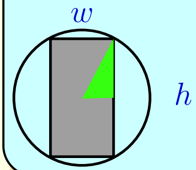
$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$

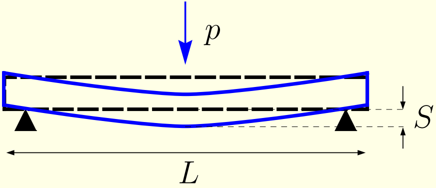
$S = C\dfrac{pL^4}{wh^3} \to$ minimum

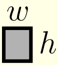
$wh^3 \to$ maximum

$$\begin{aligned}((4r^2-h^2)h^6)' &= (4r^2h^6-h^8)'\\ &= 24r^2h^5-8h^7\\ &= 8h^5(3r^2-h^2)\end{aligned}$$

Uvažujme nosník obdélníkového průřezu $w \times h$, délky L, vyříznutý z kulatiny o poloměru r a zatížený shora tlakem p.Toto zatížení způsobí, že nosník se prohne o S.







$$S = C\frac{pL^4}{wh^3}$$

$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$

$$S = C\frac{pL^4}{wh^3} \to \text{minimum}$$

$$wh^3 \to \text{maximum}$$

$$w = \sqrt{4r^2 - h^2}$$

$$\sqrt{4r^2 - h^2}\, h^3 \to \text{maximum}$$

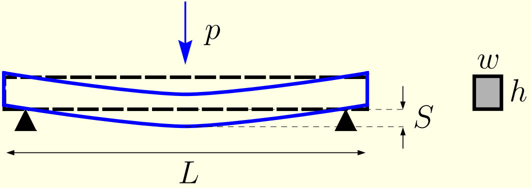
$$(4r^2 - h^2)h^6 \to \text{maximum}$$

$$\begin{aligned}((4r^2 - h^2)h^6)' &= (4r^2h^6 - h^8)' \\ &= 24r^2h^5 - 8h^7 \\ &= 8h^5(3r^2 - h^2)\end{aligned}$$

Derivace je nula pro $h = 0$ a pro $h = \sqrt{3}\, r \approx 1.73r$.

Z povahy úlohy je zřejmé, že

- Hledáme w a h tak, aby průhyb byl minimální.
- Podíl je minimální, pokud je jmenovatel co největší.



$$S = C\frac{pL^4}{wh^3}$$

$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$

$$S = C\frac{pL^4}{wh^3} \to \text{minimum}$$

$$wh^3 \to \text{maximum}$$

$$w = \sqrt{4r^2 - h^2}$$

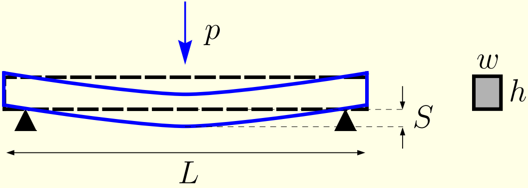
$$\sqrt{4r^2 - h^2}\, h^3 \to \text{maximum}$$

$$(4r^2 - h^2)h^6 \to \text{maximum}$$

$$\begin{aligned}((4r^2 - h^2)h^6)' &= (4r^2h^6 - h^8)' \\ &= 24r^2h^5 - 8h^7 \\ &= 8h^5(3r^2 - h^2)\end{aligned}$$

Derivace je nula pro $h = 0$ a pro $h = \sqrt{3}\, r \approx 1.73r$.
Z povahy úlohy je zřejmé, že $h = \sqrt{3}\, r$ je maximum.

Veličiny w a h jsou vázány červenou podmínkou.



$$S = C\frac{pL^4}{wh^3}$$

$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$

$$S = C\frac{pL^4}{wh^3} \to \text{minimum}$$

$$wh^3 \to \text{maximum}$$

$$w = \sqrt{4r^2 - h^2}$$

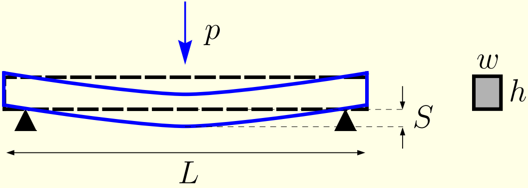
$$\sqrt{4r^2 - h^2}\, h^3 \to \text{maximum}$$

$$(4r^2 - h^2)h^6 \to \text{maximum}$$

$$\begin{aligned}((4r^2 - h^2)h^6)' &= (4r^2h^6 - h^8)' \\ &= 24r^2h^5 - 8h^7 \\ &= 8h^5(3r^2 - h^2)\end{aligned}$$

Derivace je nula pro $h = 0$ a pro $h = \sqrt{3}\, r \approx 1.73r$.
Z povahy úlohy je zřejmé, že $h = \sqrt{3}\, r$ je maximum.

Dosadíme za w. Průhyb je nyní funkcí jedné proměnné, h.



$$S = C\frac{pL^4}{wh^3}$$

$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$

$$S = C\frac{pL^4}{wh^3} \to \text{minimum}$$

$$wh^3 \to \text{maximum}$$

$$w = \sqrt{4r^2 - h^2}$$

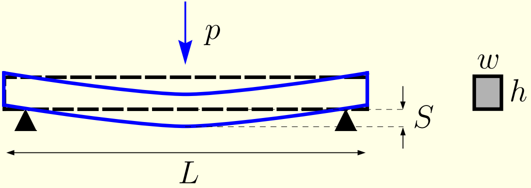
$$\sqrt{4r^2 - h^2}\, h^3 \to \text{maximum}$$

$$(4r^2 - h^2)h^6 \to \text{maximum}$$

$$\begin{aligned}((4r^2 - h^2)h^6)' &= (4r^2h^6 - h^8)' \\ &= 24r^2h^5 - 8h^7 \\ &= 8h^5(3r^2 - h^2)\end{aligned}$$

Derivace je nula pro $h = 0$ a pro $h = \sqrt{3}\,r \approx 1.73r$. Z povahy úlohy je zřejmé, že $h = \sqrt{3}\,r$ je maximum.

Výraz je maximální pokud je jeho druhá mocnina maximální. Výraz tedy umocníme a úloha se zjednoduší.



$$S = C\frac{pL^4}{wh^3}$$

$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$

$$S = C\frac{pL^4}{wh^3} \to \text{minimum}$$

$$wh^3 \to \text{maximum}$$

$$w = \sqrt{4r^2 - h^2}$$

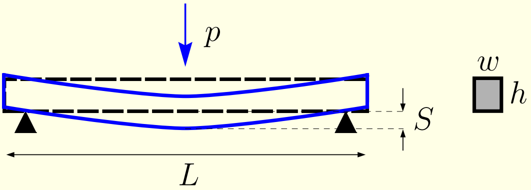
$$\sqrt{4r^2 - h^2}\, h^3 \to \text{maximum}$$

$$(4r^2 - h^2)h^6 \to \text{maximum}$$

$$\begin{aligned} ((4r^2 - h^2)h^6)' &= (4r^2h^6 - h^8)' \\ &= 24r^2h^5 - 8h^7 \\ &= 8h^5(3r^2 - h^2) \end{aligned}$$

Derivace je nula pro $h = 0$ a pro $h = \sqrt{3}\,r \approx 1.73r$.
Z povahy úlohy je zřejmé, že $h = \sqrt{3}\,r$ je maximum.

Pomocí derivace hledáme stacionární bod.



$$S = C\frac{pL^4}{wh^3}$$

$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$

$$S = C\frac{pL^4}{wh^3} \to \text{minimum}$$

$$wh^3 \to \text{maximum}$$

$$w = \sqrt{4r^2 - h^2}$$

$$\sqrt{4r^2 - h^2}\, h^3 \to \text{maximum}$$

$$(4r^2 - h^2)h^6 \to \text{maximum}$$

$$\begin{aligned}((4r^2 - h^2)h^6)' &= (4r^2h^6 - h^8)' \\ &= 24r^2h^5 - 8h^7 \\ &= 8h^5(3r^2 - h^2)\end{aligned}$$

Derivace je nula pro $h = 0$ a pro $h = \sqrt{3}\, r \approx 1.73r$.

Z povahy úlohy je zřejmé, že $h = \sqrt{3}\, r$ je maximum.

Tuhost nosníku bude maximální, pokud je výška nosníku rovna 1.73-násobku poloměru, tj. přibližně 0.866-násobku průměru.