Diferenciální počet, stavba zavěšených mostů a prohýbání nosných lan

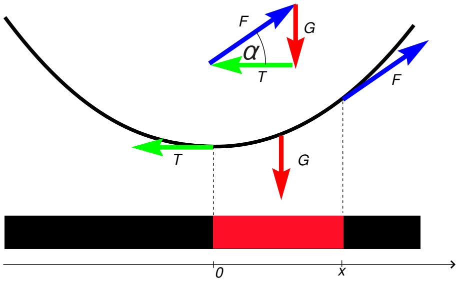
Robert Mařík

20. dubna 2011

Problém 1: Na obrázku je most zavěšený na laně. Hmotnost nosného lana a svislých lan je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti vozovky. Délka svislých lan, na kterých je vozovka zavěšena, je zvolena tak, aby namáhání bylo rovnoměrně rozloženo. Je potřeba zvolit délku svislých nosných lan aby hlavní nosné lano mělo (při rovné vozovce) tvar, který je pro ně “přirozený”. Potom nebude vozovka zbytečně namáhána ve vertikálním směru.

K čemu by mohlo dojít, pokud rovnoměrné zatížení nezajistíme?

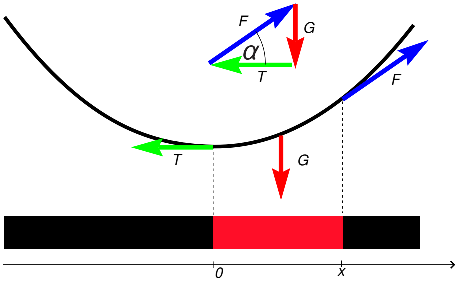
Na napnutém laně visí težký gumový pás sloužící pro děti jako skluzavka nebo opora při šplhání nahoru. Nosné lano má tendenci se prohnout, dírky na uchycení tuto tendenci nerespektují a jsou vyvrtané všechny v jedné řadě. Krajní dírky jsou tedy nejvíc namáhané a v tomto místě dojde k poruše materiálu.



Zjednodušená formulace: Jaký tvar zaujme lano zanedbatelné hmotnosti, které nese zátěž rovnoměrně rozloženou ve vodorovném směru?

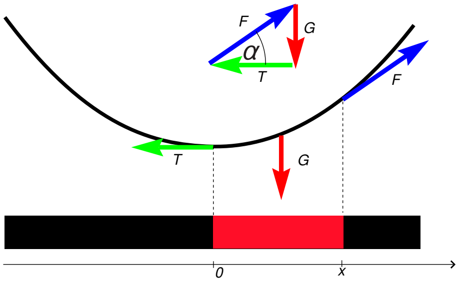
Fyzikální podstata: Osu x volíme vodorovně, počátek je volen v nejnižším bodě lana. Na část lana mezi tímto nejnižším bodem a obecným bodem x působí tyto síly:

- Tahová síla T v bodě $x = 0$. Tato síla má směr tečný k lanu, tj. vodorovný.

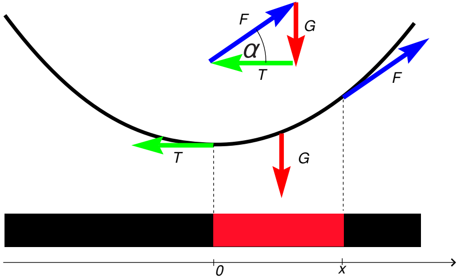


- Tahová síla F v obecném bodě x. Tato síla má také tečný směr k lanu. Směrnice přímky, ve které síla působí, je tedy rovna derivaci funkce, kterou hledáme.

- Tíhová síla, způsobená gravitací. Tato síla je součinem hmotnosti m a tíhového zrychlení $\vec{g}$. Podle předpokladu je hmotnost rozložena konstantně. Definujeme-li tedy lineární hustotu τ mostu jako hmotnost jedné délkové jednotky, je hmotnost mostu délky x dána vztahem $m = \tau x$.

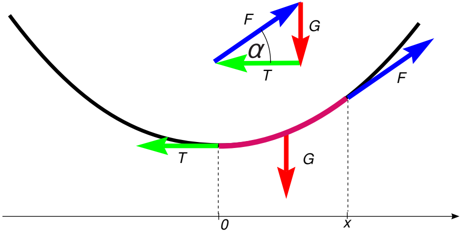


Uvažovaný úsek je v klidu, celková síla, která na něj působí je tedy nulová. To znamená, že vektorový součet všech tří sil je nulový vektor a po přesunutí tedy vektory tvoří strany pravoúhlého trojúhelníka. Z tohoto trojúhelníka plyne $\operatorname{tg}\alpha = \frac{G}{T} = \frac{\tau x g}{T} = \mu x$, kde $\mu = \frac{\tau g}{T}$ je konstanta.



Matematické formulace: Najděte rovnici křivky splňující rovnici $y' = \mu x$.
Řešení: Známe-li derivaci funkce, původní funkci najdeme integrováním.
$$y(x) = \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \mu x\,\mathrm{d}x = \mu \frac{1}{2}x^2 + C.$$
Nosné lano musí mít parabolický tvar.

Problém 2: Uvažujme stejnou situaci, ale hmota je rozložena rovnoměrně podél délky lana.



Jediné, co se na předchozí úloze mění, je vztah pro tíhu. Hmotnost uvažovaného úseku lana je součinem lineární hustoty τ a délky tohoto úseku, dané vztahem $\int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$. Platí tedy

$$y' = \alpha \int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Matematická formulace: Nalezněte funkci splňující

$$y' = \alpha \int_0^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Řešení: Derivováním (1) dostáváme

$$y'' = \alpha\sqrt{1 + [y'(x)]^2}.$$

Vskutku, je-li funkce $\mathcal{F}(x)$ primitivní funkcí k funkci $\sqrt{1 + y'^2(x)}$, je podle Newtonovy–Leibnizovy věty integrál napravo roven rozdílu $\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0)$. Derivováním podle x obdržíme $F'(x)$, což není nic jiného než $\sqrt{1 + y'^2(x)}$, protože $\mathcal{F}$ je podle předpokladu primitivní funkcí. Úkolem je tedy najít funkci, která splňuje rovnici

$$y'' = \alpha\sqrt{1 + y'^2}$$

Substituce $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$ převádí tuto rovnici na rovnici

$$z' = \alpha\sqrt{1 + z^2}.$$

Separací proměnných obdržíme

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \alpha dx$$

a po integraci

$$\ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) = \alpha x + C.$$

Odsud

$$\begin{aligned} z + \sqrt{1+z^2} &= e^{\alpha x + C} \\ \sqrt{1+z^2} &= e^{\alpha x + C} - z \\ 1 + z^2 &= e^{2(\alpha x + C)} - 2ze^{\alpha x + C} + z^2 \\ 2ze^{\alpha x + C} &= e^{2(\alpha x + C)} - 1 \\ z &= \frac{1}{2}\left[e^{\alpha x + C} - e^{-(\alpha x + C)}\right] \end{aligned}$$

Platí tedy

$$y' = \frac{1}{2}\left[e^{\alpha x+C} - e^{-(\alpha x+C)}\right]$$

a integrací obdržíme

$$y' = \frac{1}{2\alpha}\left[e^{\alpha x+C} + e^{-(\alpha x+C)}\right] = \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x + C)$$

Lano zaujme tvar hyperbolického kosinu.