PŘÍKLAD SE SOUSTAVOU VELKÝCH KANADSKÝCH JEZER

ROBERT MAŘÍK

1. ZÁKLADNÍ MODEL SAMOČIŠTĚNÍ

Nechť veličina $x(t)$ udává hmotnost populace částic, které znečišťují vodu v jezeře o objemu V. Předpokládejme, že do jezera přitéká čistá voda a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami (hladina se nemění, je v ustáleném stavu). Nechť veličina r udává, jaký objem vody se v jezeře takto vymění za jeden den. Předpokládejme dále (poněkud nerealisticky), že rozdělení znečišťujících částic v jezeře je rovnoměrné.
Úbytek hmotnosti nečistot za časovou jednotku je dán derivací x', kde čárka značí derivaci podle času t.
Tento úbytek hmotnosti je možno vyjádřit též ve tvaru $\frac{r}{V}x$, kde $\frac{r}{V}$ je pro dané jezero kladná konstanta udávající, jak velká část z celkového množství vody se v jezeře vymění za časovou jednotku. Označíme-li tuto konstantu symbolem k, je proces úbytku nečistot v jezeře popsán diferenciální rovnicí

$$x' = -kx. \tag{1.1}$$

Znaménko „$-$“ vyjadřuje, že intenzita znečištění v jezeře klesá.
Předpokládejme nyní, že do jezera neustále přitékají další nečistoty rychlostí $c(t)$. Rovnici (1.1) je potom nutno modifikovat na rovnici

$$x' = -kx + c(t). \tag{1.2}$$

2. MODEL SOUSTAVY DVOU JEZER

Uvažujme nyní soustavu dvou znečištěných jezer. Do prvního jezera o objemu V_1 vtéká čistá voda rychlostí r a vytéká stejnou rychlostí voda znečištěná. Tato znečištěná voda vtéká (opět rychlostí r) do druhého jezera o objemu V_2 a stejnou rychlostí vytéká z celé soustavy jezer voda obsahující nečistoty z obou jezer. Označme konstanty v rovnici samočištění jednotlivých jezer $k_1 = \frac{r}{V_1}$ a $k_2 = \frac{r}{V_2}$, dále označme $x(t)$ množství nečistot v čase t v prvním jezeře a $y(t)$ množství nečistot v čase t v druhém jezeře. Soustavu je možno popsat matematickým modelem

$$\begin{aligned} x' &= -k_1 x, \\ y' &= k_1 x - k_2 y. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Date: 27. srpna 2004.

3. Pět kanadských jezer

Označme indexy pět velkých kanadských jezer, jak je uvedeno v tabulce.

index i	jezero	objem V_i [míle^3]	přítok f_i [míle^3/rok]
1	Hořejší	2900	15
2	Michiganské	1180	38
3	Hurónké	850	15
4	Erijské	116	17
5	Onatrio	393	14

Označme p_i množství nečistot v přítoku i-tého jezera. Dále označme f_{ij} roční tok mezi jezerem i a jezerem j v kubických mílích za rok. Platí $f_{13} = 15$, $f_{23} = 38$, $f_{34} = 68$, $f_{45} = 85$ a $f_{56} = 99$, kde f_{56} je roční odtok ze soustavy jezer.
Označme x_i míru znečištění i-tého jezera. Soustava popisující vývoj systém má tvar (porovnejte s mapkou jezerního systému a s modelem dvou jezer)

$$
\begin{aligned}
x_1' &= p_1 f_1 - \frac{f_{13}}{V_1} x_1 \\
x_2' &= p_2 f_2 - \frac{f_{23}}{V_2} x_2 \\
x_3' &= p_3 f_3 + \frac{f_{13}}{V_1} x_1 + \frac{f_{23}}{V_2} x_2 - \frac{f_{34}}{V_3} x_3 \\
x_4' &= p_4 f_4 + \frac{f_{34}}{V_3} x_3 - \frac{f_{45}}{V_4} x_4 \\
x_5' &= p_5 f_5 + \frac{f_{45}}{V_4} x_4 - \frac{f_{56}}{V_5} x_5
\end{aligned}
$$

Studium modelu matematickou cestou je poněkud obtížnější. Pro modelování na počítači je nutno zadat množství nečistot p_i v přítocích jezer (nemusí se jednat o konstanty) a počáteční hodnoty znečištění. Pochopitelně, model nebere v úvahu efekty, které byly vyloučeny z úvah u jednoduchého modelu jednoho jezera.
Předpokládáme-li, že hodnoty p_i přitékajících nečistot jsou konstantní, lze usuzovat, že koncentrace nečistot v jednotlivých jezerech se ustálí na konstantních hodnotách. Pro velké hodnoty času tedy funkce, udávající velikost znečištění jednotlivých jezer, budou prakticky nerozlišitelné od konstantních funkcí a jejich derivace tedz budou prakticky nerozlišitelné od nuly. Takto lze snadno najít tzv. stacionární stav modelu, což je stav, ke kterému model vždy, nezávisle na předchozí historii, dospěje. Abychom nalezli hodnoty znečištění jednotlivých jezer v soustavě, stačí

vyřešit *soustavu lineárních rovnic*

$$
\begin{aligned}
\frac{f_{13}}{V_1}\boldsymbol{x_1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= p_1 f_1\\
\frac{f_{23}}{V_2}\boldsymbol{x_2} \qquad\qquad\qquad\qquad &= p_2 f_2\\
-\frac{f_{13}}{V_1}\boldsymbol{x_1} - \frac{f_{23}}{V_2}\boldsymbol{x_2} + \frac{f_{34}}{V_3}\boldsymbol{x_3} \qquad\qquad &= p_3 f_3\\
-\frac{f_{34}}{V_3}\boldsymbol{x_3} + \frac{f_{45}}{V_4}\boldsymbol{x_4} \qquad &= p_4 f_4\\
-\frac{f_{45}}{V_4}\boldsymbol{x_4} + \frac{f_{56}}{V_5}\boldsymbol{x_5} &= p_5 f_5
\end{aligned}
$$

Pro přehlednost jsou neznámé vyznačeny tučně. Tato soustava rovnic je jednoduchá a lze ji vyřešit postupným dopočíáváním neznámých. Pro složitější systémy však situace již nemusí být tak jednoduchá a pro to si odvodíme obecné metody, umožňující posoudit, zda daná soustava má vůbec nějaké řešení a dále metody, umožňující toto řešení najít.

Podobný model lze použít i na mnoha jiných místech, například v lékařství lze takto modelovat průchod účinných látek z žaludku do krve a z krve na místo určení. Potom je možno odhadnout dávkování léku, které zajistí dostatečnou koncentraci účinných látek v místě, kde jsou tyto látky potřebné.

U tohoto modelu pravděpodobně budeme zkoumat různé scénáře vývoje, podle toho, jak se mění intenzita znečišťování p_i. To znamená, že budeme soustavu opakovaně řešit s různými pravými stranami. V takovém případě je velice vhodné znát inverzní matici k matici soustavy, protože pak se problém najít řešení zužuje na problém vynásobit matici inverzní s maticí pravých stran.

KAT. MATEMATIKY, FAKULTA LESNICKÁ A DŘEVAŘSKÁ, MENDELOVA ZEMĚDĚLSKÁ A LESNICKÁ UNIVERZITA V BRNĚ
E-mail address: `marik@mendelu.cz`
URL: `www.mendelu.cz/user/marik`