Tečna a lineární aproximace

Robert Mařík

23. ledna 2006

Napište tečnu ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ v bodě $x_0 = 0$.

Napište tečnu ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ v bodě $x_0 = 0$.

tečna: $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$

Napište tečnu ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ v bodě $x_0 = 0$.

tečna: $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$

$y(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$

Napište tečnu ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ v bodě $x_0 = 0$.

tečna: $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$

$$y(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$$

$$y'(x) = \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

Napište tečnu ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ v bodě $x_0 = 0.$

tečna: $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$

$$y(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$$

$$y'(x) = \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)\bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{2}$$

Napište tečnu ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ v bodě $x_0 = 0$.

tečna: $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$

$$y(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$$

$$y'(x) = \left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2}$$

tečna: $\quad y = \frac{1}{2} \cdot (x - 0) + 1 = 1 + \frac{1}{2}x$

Nejlepší lineární aproximace pro malá x:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

Pro malé x lze funkci poměrně přesně nahradit její tečnou.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$E = mc^2$$

Vyjdeme z relativistického vztahu pro celkovou energii.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$E = mc^2 = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Hmotnost se v teorii relativity nepovažuje za konstantní, ale mění se podle uvedeného vzorce.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$E = mc^2 = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Ve vzorci vystupuje pro $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ zadaná funkce. Nahradíme ji tedy lineární funkcí. Můžeme si to dovolit pokud je v mnohem menší než c.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$E = mc^2 = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{klidová energie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{kinetická energie}}$$

Po úpravě dostáváme složku energie nesouvisející s pohybem a vzorec pro kinetickou energii, známý z Newtonovské mechaniky.