

Vlhkost dřeva

Robert Mařík

jaro 2017

Úvod

Posláním tohoto dokumentu je jednak ukázka toho, jak může vypadat projekt do Aplikované matematiky a jednak vysvětlení významu parciální derivace. Protože se jedná i o učební materiál, je delší než požadovaná stránka a půl. Protože budu pracovat se vzorečkem který je jednoduchý na zápis do počítače, přidávám do dokumentu i vzorce se složitějším formátováním, jako například definici parciální derivace.

Teorie parciální derivace

Je-li $f(x, y)$ funkce dvou proměnných, je parciální derivace podle x definována vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

a analogicky je definována parciální derivace podle y . Fyzikálně se u parciální derivace podle x jedná o rychlost s jakou se mění funkce f při změnách funkce x . Pokud se veličina x změní o Δx , změní se funkce f přibližně o $\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$. Analogické tvrzení platí pro proměnnou y .

Vlhkost dřeva



Nejjednodušší a nejrychlejší metodou měření vlhkosti dřeva je použití měřiče určeného k tomuto účelu. Tento přístroj měří elektrické vlastnosti dřeva a na základě korelací mezi těmito veličinami a vlhkostí dřeva zobrazuje přímo výslednou vlhkost. Tato metoda je rychlá, ale není příliš přesná, protože korelace mezi vlhkostí a elektrickými vlastnostmi dřeva není moc těsná. Přesnější ale nepoměrně složitější metodou je stanovení hmotnosti dřeva v syrovém stavu, hmotnosti dřeva po vysušení v peci a výpočet podílu vody ve dřevě. Přesná metodika měření (při jaké teplotě se dřevo suší, jak má vypadat měřený vzorek, jak se ním má před měřením a po měření zacházet, jak se pozná že vzorek je dostatečně vysušený) nás teď nezbude zajímat, podíváme se pouze na vzorec, do nějž se dosazují naměřené hodnoty.

Budeme pracovat s definicí vlhkosti dřeva ve tvaru

$$M = \frac{m - m_0}{m_0}$$

kde m je syrového hmotnost dřeva, m_0 hmotnost sušiny a M vlhkost vyjádřená desetinným číslem (nikoliv v procentech). Pro snazší derivování si funkci upravíme na tvar

$$M = mm_0^{-1} - 1$$

a derivováním dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial m} &= m_0^{-1} = \frac{1}{m_0}, \\ \frac{\partial M}{\partial m_0} &= m(-1)m_0^{-2} = -\frac{m}{m_0^2}.\end{aligned}$$

Změna parametru m o Δm tedy vyvolá změnu M přibližně o $\frac{1}{m_0} \Delta m$. Podobně, změna parametru m_0 o Δm_0 tedy vyvolá změnu M přibližně o hodnotu $-\frac{m}{m_0^2} \Delta m_0$. Všimněte si, že zvětšení hodnoty m způsobí zvětšení hodnoty M (derivace podle m je kladná), kdežto zvětšení hodnoty m_0 způsobí zmenšení hodnoty M (derivace podle m_0 je záporná). Hodnoty Δm a Δm_0 často reprezentují nepřesnosti vzniklé při měření a vektor

$$\left(\frac{1}{m_0} \Delta m, -\frac{m}{m_0^2} \Delta m_0 \right)$$

charakterizuje vliv chyby ve měření vstupních dat na spolehlivost výsledku. Zpravidla se za chybu výsledku považuje délka tohoto vektoru, tj.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{m_0} \Delta m \right)^2 + \left(-\frac{m}{m_0^2} \Delta m_0 \right)^2}$$

Příklad

Při měření vlhkosti dřeva byla naměřena hmotnost syrového vzorku

$$m = 36 \text{ g} \pm 1 \text{ g}$$

a hmotnost sušiny

$$m_0 = 22 \text{ g} \pm 1 \text{ g}.$$

Určete vlhkost dřeva.

Řešení: Ze vzorce pro vlhkost dostáváme

$$M = \frac{36 - 22}{22} = 0.6364.$$

Parciální derivace v bodě $(m, m_0) = (36, 22)$ jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial m}(36, 22) &= \frac{1}{22} = 0.04545, \\ \frac{\partial M}{\partial m_0}(36, 22) &= -\frac{36}{22^2} = -0.07438. \end{aligned}$$

Číslo 0.07438 je zhruba o polovinu větší než 0.04545. Vidíme tedy, že parciální derivace podle m_0 je zhruba o polovinu větší než parciální derivace podle m a nepřesnost měření v m_0 se proto projeví na spolehlivosti výsledku o polovinu větší měrou. Navíc, v praxi bude nepřesnost měření m_0 větší než nepřesnost měření m , protože kromě chyby způsobené vážením se na nepřesnosti měření hmotnosti m_0 může podepsat i proces sušení. Dřevo nemuselo být dostatečně vysušené, nebo naopak mohlo v peci začít hořet pokud experimentátor spěchal a nedodržel technologický postup.

Znaménko derivace nerozhoduje, protože při stanovení chyby měření nevíme, zda skutečná hodnota je větší nebo menší. Délka vektoru charakterizujícího chybu je po zaokrouhlení na jednu platnou cifru směrem nahoru rovna

$$\sqrt{(0.04545)^2 + (-0.07438)^2} = 0.09$$

a výsledná vlhkost dřeva je

$$M = 0.64 \pm 0.09,$$

tj. v procentech

$$M = 64\% \pm 9\%.$$

Odkazy

- PDF verze http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/2/vlhkost_dreva.pdf
- markdown verze http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/2/vlhkost_dreva.txt
- html verze <http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/2/>
- html slidy <http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/2/slides.html>
- příkazy pro generování všech verzí <http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/2/prikaz>