

Logistická rovnice

Robert Mařík

rukopis 26. ledna 2017, revize 10. února 2017

Co je posláním tohoto dokumentu?

Tento dokument je ukázka, jak může vypadat projekt odevzdaný do Aplikované matematiky. Vznikl strojovým překladem z http://commons.bcit.ca/math/examples/forestry/differential_eqns/ a ruční editací.

Úvod

Růst mnoha přírodních populací závisí na hustotě populace. Je-li velikost populace nízká, neuplatňuje se konkurence a populace roste rychle. Tím, že populace roste, je větší konkurence a boj o zdroje pro přežití a její růst zpomaluje. Hodnota nazývaná *nosná kapacita prostředí* je maximální hodnota velikosti populace, která je trvale udržitelná v dlouhodobém měřítku. Pro řídké populace, růst je často přímo úměrný velikosti populace, a pro populace v blízkosti nosné kapacity prostředí je růst zhruba úměrný rozdílu mezi nosnou kapacitou prostředí a velikosti populace.

Matematický model

Je-li C nosná kapacita prostředí, k konstanta úměrnosti představující tempo růstu, kdy hustota populace je velmi nízká, je jednou z možností jak modelovat růst populace rovnice

$$\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{N}{C}\right), \quad (1)$$

kde N je velikost populace v čase t (nebo hustota populace) a $\frac{dN}{dt}$ je rychlost změny velikosti této populace (nebo hustoty populace). Všimněte si, že když je N malé, pak je rovnice blízká rovnici

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

protože N je mnohem menší než C . Z toho důvodu roste velikost populace N exponenciálně. Avšak, jak se N zvyšuje směrem k C , rychlost růstu se snižuje a

v blízkosti C máme přibližně

$$\frac{dN}{dt} = k(C - N),$$

kde se pravá strana blíží k nule jakmile se C blíží k N .

Rovnici (1) je možné vyřešit a jejím řešením je funkce

$$N = \frac{C}{1 - e^{-kt-A}}. \quad (2)$$

Příklad

Předpokládejme, že pro orla bělohavého je v určité oblasti nosná kapacita prostředí 14.2 orlů na kilometr čtvereční. Tempo růstu při řídkém osídlení je $k = 40\%$ ročně. Průzkum z roku 1998 ukazuje, že hustota osídlení byla 3.1 orlů na kilometr čtvereční. Odhadněte další vývoj populace za předpokladu, že všechny vnější podmínky zůstanou beze změny, tj. že nosná kapacita prostředí C a tempo růstu k zůstávají beze změny.

Řešení: Čas budeme měřit v letech a přitom se odkazovat na rok 1998 jako na čas $t = 0$. Při $t = 0$ má rovnice (2) tvar

$$3.1 = \frac{14.2}{1 + e^{-A}}$$

a běžnými algebraickými úpravami dostáváme $A = -1.2755$. Hustota populace je tedy dána vztahem

$$N = \frac{14.2}{1 - e^{-0.4t+1.2755}}.$$

Zdrojové kódy

Tento dokument je vystaven na <http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/1/>. Zdrojový text v jazyce Markdown je k dispozici na http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/1/logisticka_rovnice.txt, PDF verze je na adrese http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/1/logisticka_rovnice.pdf.

PDF je vytvořeno následujícím příkazem.

```
pandoc logisticka_rovnice.txt -s -o logisticka_rovnice.pdf
```

Html je vytvořeno následujícím příkazem.

```
pandoc --toc --css=pandoc.css -s --mathjax="http://cdn.mathjax.org/mathjax/latest/MathJax.js"
```

Aby se html zobrazovalo pěkně, tak v adresáři musí být ještě soubor <http://user.mendelu.cz/marik/am/projekt/1/pandoc.css>.

Je možné vytvořit i slidy

```
pandoc -t slidy -s --mathjax="http://cdn.mathjax.org/mathjax/latest/MathJax.js?config=TeX-AM"
```