Př $y' - 2y = e^x$ $\qquad y' + a(x)y = b(x)$

$$a(x) = -2$$

$$\int a(x)\,dx = \int -2\,dx = -2x$$

$$e^{\int a(x)dx} = e^{-2x}$$

$$y' - 2y = e^x \qquad \Big|\cdot e^{-2x}$$

$$y' e^{-2x} - 2e^{-2x} y = e^x \cdot e^{-2x}$$

$$\left(y\, e^{-2x}\right)' = e^{-x}$$

$$y\, e^{-2x} = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$$

$$y = \left(-e^{-x} + C\right) e^{2x}$$

$$\boxed{y = -e^x + C \cdot e^x} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Př 1 $\quad y' + \frac{2}{x} y = \sqrt{x} \qquad y' + a(x) y = b(x)$

$$a(x) = \frac{2}{x}$$

$$\int a(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = 2 \ln x$$

$$e^{\int a(x)dx} = e^{2 \cdot \ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^2 = x^2$$

$$y' + \frac{2}{x} y = \sqrt{x} \qquad \Big| \cdot x^2$$

$$x^2 y' + 2xy = x^2 \cdot \sqrt{x}$$

$$\left(x^2 y\right)' = x^{\frac{5}{2}}$$

$$x^2 y = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C \qquad \Big| : x^2$$

$$\boxed{y = \frac{2}{7} x^{\frac{3}{2}} + C \cdot x^{-2}} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Př:

$$y' + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y = 1 \qquad y' + a(x) y = b(x)$$

$$a(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\int a(x)\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln \sin x$$

$$e^{\int a(x) dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

$$y' + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y = 1 \qquad | \cdot \sin x$$

$$\sin x \cdot y' + \cos x \cdot y = \sin x$$

$$(\sin x \cdot y)' = \sin x$$

$$\sin x \cdot y = \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$y = -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{c}{\sin x}$$

Př: Najděte řešení rovnice

$$y' + a(x)y = x^2 - 2\sin x.$$

Víme, že řešení rovnice

$$y' + a(x)y = \sin x$$

je y_1 a že řešení rovnice

$$y' + a(x)y = x^2$$

je y_2.

$L[y_1] = \sin x \qquad L[y_2] = x^2$

$L[\ ?\ ] = x^2 - 2\sin x$

$L[\ ?\ ] = L[y_2] - 2L[y_1]$

$L[y_2 - 2y_1] = L[y_2] - 2L[y_1] = x^2 - \sin 2x$

Řešení rovnice $y' + a(x)y = x^2 - 2\sin x$

je $y_2 - 2y_1$.

Př: Najděte LDR 1. řádu takovou, že funkce

$$y = x^2 + Cx \qquad C \in \mathbb{R}$$

je obecným řešením této rovnice

Najdeme $y' + a(x)y = b(x)$ tak, aby platilo

α) $y = x^2$ je řešením rovnice $y' + a(x)y = b(x)$

β) $y = x$ je řešením rovnice $y' + a(x)y = 0$

odβ) $y = x$, $y' = 1$, $y' + a(x)y = 0$

$$1 + a(x) \cdot x = 0$$

$$a(x) = -\frac{1}{x}$$

adα) $y = x^2$, $y' = 2x$, $y' + a(x)y = b(x)$

$$2x - \frac{1}{x} \cdot x^2 = b(x)$$

$$b(x) = x$$

Řešení: $\boxed{y' - \frac{1}{x}y = x}$

Jiný způsob: $y = x^2 + Cx \quad | \cdot \frac{1}{x}$ (osamostatnit C)

$\frac{1}{x}y = x + C \quad | \cdot \frac{d}{dx}$ (zderivovat)

$-\frac{1}{x^2}y + \frac{1}{x}y' = 1 + 0 \quad | \cdot x$ (osamostatnit y')

$$\boxed{y' - \frac{1}{x}y = x}$$

Př: Najděte LDR 1. řádu s obecným řešením

$$y = \frac{C + 2x}{\sqrt{x}}.$$

$$y = \frac{C + 2x}{\sqrt{x}} \quad \Big| \cdot \sqrt{x}$$

$$y \cdot \sqrt{x} = C + 2x \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{x} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 + 2$$

$$y' \cdot \sqrt{x} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' + \frac{1}{2x} y = \frac{2}{\sqrt{x}}$$