Písemná část zkoušky/zápočtu z Inženýrské matematiky, 15.12.2022 (90 minut)

Body

1	2	3	4	5	6

Jméno: ....

1. [11 bodů]

a) Buď dána funkce dvou proměnných $f(x, y)$. Napište definici parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, její jednotku a její fyzikální význam.

b) Jedna z metod výpočtu nosníků je Castiglianova metoda. Při ní se parciální derivací derivuje energie nosníku podle zatěžující síly. V jakých jednotkách tato derivace vychází?

c) Veličina $T(x, y, t)$ udává teplotu v Černých Polích. Počátek soustavy souřadnic je na křižovatce před fakultou, osa x míří k rektorátu, osa y podél šaliny směrem do centra. Čas měříme v hodinách, souřadnice v metrech. Pro všechny parciální derivace podle jednotlivých proměnných určete jednotku této parciální derivace a slovní interpretaci hodnoty této derivace.

d) V příkladě z předchozího bodu je v počátku soustavy gradient teploty roven vektoru $(-1, 1)$. Jak je možné tento fakt interpretovat slovně? Co to znamená pro sledovanou teplotu?

e) Vypočtěte gradient funkce

$$F(x, y) = 2xy + ay^2 - x,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Pokud gradient není definován, napište definici gradientu a vysvětlete, proč není možné gradient v tomto případě určit.

---

2. [7 bodů] Dokažte, že diferenciální operátor prvního řádu

$$L[y] = y' + a(x)y$$

je lineární.

---

3. [8 bodů]

a) Zformulujte větu o nezávislosti křivkového integrálu druhého druhu na integrační cestě.

b) Určete, pro kterou hodnotu parametru a nezávisí křivkový integrál

$$\oint (x^3y + 1)\mathrm{d}x + 3ax^4\mathrm{d}y$$

na integrační cestě.

---

4. [10 bodů] V šedesátých letech byly představeny dvě průlomové ekologické teorie, rovnováha počtu druhů na ostrovech (Mc Arthur a Wilson) a problematika metapopulací (Levins). Na základě následujícího zadání sestavte diferenciální rovnice pro oba modely.

a) Počet N druhů na ostrově se mění v čase. Rychlost změny počtu druhů na ostrově je dána rozdílem rychlosti s jakou ostrov osidlují nové druhy a rychlosti, s jakou na ostrově usazené druhy vymírají.

- Rychlost usazování nových druhů je nepřímo úměrná počtu druhů na ostrově.
- Rychlost vymírání druhů je přímo úměrná počtu druhů na ostrově.

b) Procento n fragmentů životního prostředí, které jsou osídleny metapopulací se mění. Rychlost změny je dána rozdílem rychlosti osidlování nových fragmentů a rychlostí vymírání populace na již osídlených fragmentech.

- Rychlost, s jakou jsou osídlovány nové fragmenty, je úměrná současně procentu osídlených a procentu neosídlených fragmentů.
- Rychlost, s jakou vymírá populace na již osídlených fragmentech, je úměrná procentu osídlených fragmentů.

---

5. [8 bodů]

a) Napište difuzní rovnici v kartézských souřadnicích. Uvažujte co nejobecnější případ (přítomnost zdrojů, vývoj v čase, žádné dodatečné podmínky na vlastnosti materiálu, plný počet prostorových souřadnic).

b) Přepište tuto rovnici pro anizotropní homogenní materiál s lineární materiálovou charakteristikou a pro stacionární stav.

c) Vysvětlete, jak souvisí difuzní rovnice s rovnicí kontinuity. Pokud spolu nesouvisí, napište rovnici kontinuity.

---

6. [6 bodů] Určete, jakého typu je stacionární bod $(1, 2)$ systému

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + y - 3$$

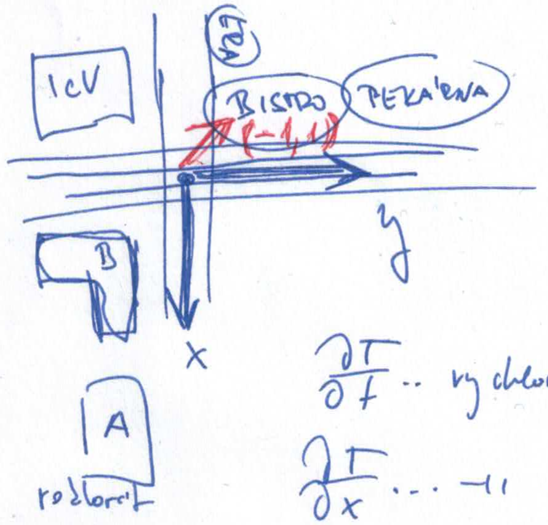
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - x^2 + xy - 2$$

1
a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cancel{\lim_{h\to 0} f(x+h,y) - f(x,y)} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$

- jednotka je stejná jako jednotka podílu $\frac{f}{x}$
- Rychlost s jakou roste f v závislosti na x.

b) $\left[\frac{\partial E}{\partial F}\right] = \frac{J}{N} = m$ (jednotka délky)

c)



$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = {}^{\circ}C/hod$

$\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = {}^{\circ}C/m = \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]$

$\frac{\partial T}{\partial t}$ .. rychlost s jakou roste teplota v čase

$\frac{\partial T}{\partial x}$ ... –"– ——— ve směru osy x

$\frac{\partial T}{\partial y}$ ... –"– ——— –"– ——— y

d) Teplota roste rychlostí $\sqrt{2}$ °C/m směrem k bistru.

e) $\nabla F = \begin{pmatrix} 2y - 1 \\ 2x + 2ay \end{pmatrix}$

2
$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)' + a(x)(y_1 + y_2) = y_1' + y_2' + a(x)y_1 + a(x)y_2$
$= y_1' + a(x)y_1 + y_2' + a(x)y_2 = L[y_1] + L[y_2]$

$L[c \cdot y_1] = (c \cdot y_1)' + a(x)(c y_1) = c \cdot y_1' + c \cdot a(x) y_1 =$
$= c(y_1' + a(x) y_1) = c \cdot L[y_1]$

③ a) Násl. výroky jsou ekvivalentní

i) $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ nezávisí na integrační cestě

ii) $\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0$ pro každou uzavřenou křivku C

iii) $\nabla \times \vec{F} = 0$

iv) $\nabla \varphi = \vec{F}$ pro nějakou skalární funkci φ

b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 y + 1\right) &= x^3 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(3 a x^4\right) &= 12 a x^3 \end{aligned}\right\} \nabla \times \vec{F} = 0 \quad \text{pro } a = \frac{1}{12}$$

---

④ a) $$\frac{dN}{dt} = \frac{k_1}{N} - k_2 \cdot N$$

b) $$\frac{dn}{dt} = k_1 n (1 - n) - k_2 \cdot n$$

---

⑤ a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma + \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

b) $$0 = \gamma + D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

c) Difuzní rovnice je rovnice kontinuity s dosazením konstitutivního zákona do toku.

---

6) $$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 - 2x + y & x \end{pmatrix} \qquad J(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0 \quad \text{nestabilní uzel}$$