Lineární operátory

Operátor: zobrazení z množiny funkcí do množiny funkcí.

Př: $F_1(f) = \frac{df}{dx}$, $F_2(f) = \int_0^x f(t)\,dt$

$F_3(f) = \ln(f(x))$

Lineární operátor: Operátor, který zachovává lineární kombinace funkcí.

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2]$$

$C_{1,2} \in \mathbb{R}$, $y_{1,2}$ funkce

ekvivalentní vyjádření

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

$$L[C_1 y_1] = C_1 L[y_1]$$

Příklady lineárních operátorů

1) $L[y](x) = a(x) \cdot y(x)$ ... násobení zadanou funkcí $a(x)$

Skutečně $L[y_1 + y_2] = a(x)(y_1 + y_2) = a(x) y_1 + a(x) y_2 =$

$= L[y_1] + L[y_2]$

$L[C_1 y_1] = a(x)(C_1 y_1) = a(x) \cdot C_1 \cdot y_1 =$

$= C_1\, a(x)\, y_1 = C_1 L[y_1]$

2) $L[y] = \frac{dy}{dx}$ ... operátor derivace, $\frac{d}{dx} = '$

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = L[y_1] + L[y_2]$$

$$L[C_1 \cdot y_1] = (C_1 y_1)' = C_1 y_1' = C_1 L[y_1]$$

3) $L[y] = a(x) \cdot y + y'$ .. lineární diferenciální operátor prvního řádu

$$L[y] = y' + a(x) \cdot y$$

$$\cancel{L[y] = a(x) \cdot y}$$

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)' + a(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= y_1' + y_2' + a(x) y_1 + a(x) y_2 =$$

$$= y_1' + a(x) y_1 + y_2' + a(x) y_2 = L[y_1] + L[y_2]$$

$$L[C_1 y_1] = (C_1 y_1)' + a(x) C_1 y_1 = C_1 y_1' + a(x) C_1 y_1 =$$

$$= C_1 y_1' + C_1 a(x) y_1 = C_1 (y_1' + a(x) y_1) =$$

$$= C_1 L[y_1]$$

– Využití linearity při řešení rovnic

PROBLÉM $\xrightarrow{\text{linearita}}$ jednodušší problém $\longrightarrow$ řešení jednodušší úlohy $\xrightarrow{\text{linearita}}$ ŘEŠENÍ PŮVODNÍHO PROBLÉMU

PROBLÉM $\xrightarrow{\text{linearita}}$ jiný jednodušší problém $\longrightarrow$ řešení další jednodušší úlohy $\xrightarrow{\text{linearita}}$ ŘEŠENÍ PŮVODNÍHO PROBLÉMU

⋮

(*) $L[y] = b(x)$ ... rovnice s nenulovou funkcí y

(**) $L[y] = 0$ ... asociovaná homogenní rovnice

$L[y_1] = b(x)$ $\quad L[y_2] = 0$ ... řešení rovnic (*) a (**)

$$L[y_1 + C_2 y_2] = L[y_1] + C_2 L[y_2] =$$

$$= b(x) + C_2 \cdot 0 = b(x)$$

... řešení rovnice (*)

Př: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty)$ ... rovnice tepelné výměny

jedno řešení snadné: $T(t) = T_\infty$

$$\frac{dT}{dt} = -kT + kT_\infty$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = k \cdot T_\infty$$ ... DR s lineárním operátorem

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0$$ ... asociovaná homogenní rovnice

$$\frac{dT}{dt} = -kT$$ ... najdi ty, které po derivování/násobení změní na $(-k)$-násobek

$$T(t) = e^{-k.t}$$ ... nekonstantní řešení

$$T(t) = T_\infty + C.e^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}$$

... nekonečně mnoho řešení

... každé je řešením rovnice $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty)$

... žádné jiné řešení neexistuje (jednoznačnost řešení).

<u>Obecněji</u>: Jsou-li $y_1, y_2, \dots y_n$ řešením rovnice

$$L[y] = 0$$

a y_p řešení rovnice

$$L[y] = b(x)$$

je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_p$ řešením

$$L[y] = b(x)$$

pro libovolná reálná čísla $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Jednoznačnost řešení může znamenat, že žádné jiné řešení neexistuje.

LDR 1. řádu

$$y' + a(x)\cdot y = b(x) \quad , \quad a, b \text{ spojité na } I$$

Každá poč. úloha má právě jedno řešení definované na celém I.

Variace konstant:

α) $y' + a(x)y = 0 \Rightarrow y' = -a(x)\cdot y \Rightarrow y = e^{-\int a(x)dx}$ .. partikulární řešení

z linearity $\quad y = C\cdot e^{-\int a(x)dx}$ ... všechna řešení

β) $y' + a(x)\cdot y = b(x) \quad , \quad y = k(x)\cdot y_{p0}(x) \quad , \quad y_{p0}(x) = e^{-\int a(x)dx}$

$$k'\cdot y_{p0} + k\, y_{p0}' + a(x)\cdot k\cdot y_{p0} = b(x)$$

$$k'\, y_{p0} = b(x) \Rightarrow k' = \frac{b(x)}{y_{p0}} \Rightarrow k = \int k'(x)dx$$

Všechna řešení rovnice $y' + a(x)\,y = b(x)$ jsou

$$y = C\cdot e^{-\int a(x)b(x)} + \underbrace{\int b(x)\, e^{\int a(x)dx}\, dx}_{k(x)} \cdot \underbrace{e^{-\int a(x)dx}}_{y_{p0}(x)}$$

Metoda integračního faktoru

$$y'\, e^{\int a(x)dx} + a(x)\cdot y\, e^{\int a(x)dx} = b(x)\cdot e^{\int a(x)dx}$$

$$\left(y\, e^{\int a(x)dx}\right)' = b(x)\, e^{\int a(x)dx}$$

$$y\, e^{\int a(x)dx} = C + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx}\, dx$$

$y = \dots$ (stejné jako výše)

Rozmanitost „ekosystému" lineárních operátorů

- Součet lineárních operátorů je lineárním operátorem.

Skutečně:

$$(L_1+L_2)[y_1+y_2] = L_1[y_1+y_2] + L_2[y_1+y_2] =$$
$$= L_1[y_1] + L_1[y_2] + L_2[y_1] + L_2[y_2] =$$
$$= L_1[y_1] + L_2[y_1] + L_1[y_2] + L_2[y_2]$$
$$= (L_1+L_2)[y_1] + (L_1+L_2)[y_2]$$

$$(L_1+L_2)[c_1 y_1] = L_1[c_1 y_1] + L_2[c_1 y_1] =$$
$$= c_1 L_1[y_1] + c_1 L_2[y_1] =$$
$$= c_1\left(L_1[y_1] + L_2[y_1]\right) = c_1(L_1+L_2)[y_1]$$

Dokonce: Linearita LD op. prvního řádu plyne z linearity derivace, z linearity násobení a výše uvedené věty

$$y' + a(x)\cdot y$$

- Postupná aplikace lin. op. je lin. op.

Skutečně: $L_1[L_2[y_1+y_2]] = L_1[L_2[y_1] + L_2[y_2]] = L_1[L_2[y_1]] + L_1[L_2[y_2]]$

$$L_1[L_2[c_1 y_1]] = L_1[c_1 L_2[y_1]] = c_1 L_1[L_2[y_1]]$$

Příklad: $y'' + p(x)y' + q\cdot y$ je lineární

(lineární diferenciální operátor druhého řádu)

Další lineární operátory

$\nabla \cdot \vec{F}$

$$\cancel{\mathrm{div}\,\vec{F}} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{kde } \vec{F} = (P, Q, R)$$

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

x-ová komponenta rotace: $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$

rotace $\nabla \times \vec{F}$

divergence gradientu $\nabla \cdot (\nabla \varphi)$

člen z difuzní rovnice charakterizující tok

$$\nabla \cdot (A \cdot \nabla \varphi)$$

Operátor z difuzní rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla u)$$

Levá strana rovnice vedení tepla

$$\rho \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla (\lambda \cdot \nabla T)$$

Nelineární operátor

Např. rovnice podzemní vody

$$S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot \left(k \cdot h \cdot \nabla h \right) = \sigma$$

Linearita levé strany „kazí" difuzní koeficient $k \cdot h$

Triz: $\nabla(h^2) = \left(\frac{\partial h^2}{\partial x}, \frac{\partial h^2}{\partial y}\right) = \left(2h\frac{\partial h}{\partial x}, 2h\frac{\partial h}{\partial y}\right) =$

$= 2h\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 2h\nabla h$ a odtud

$$h \nabla h = \frac{1}{2} \nabla(h^2)$$

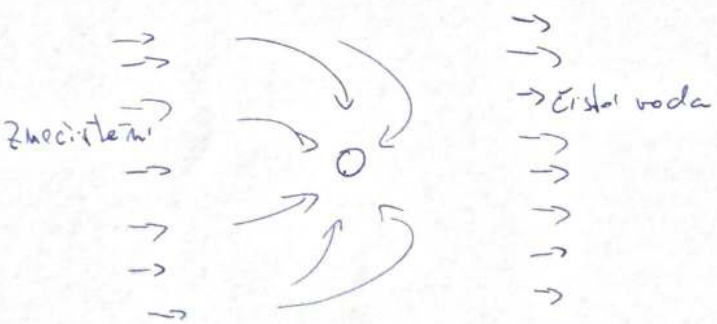
definujme $H := h^2$

stacionární případ: $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} k \nabla H \right) = \sigma$$

na levé straně je lineární operátor $-\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} k \nabla H \right)$

Využití: hydraulická clona se dá zkombinovat z rovinného proudění podzemní vody $\left(-\nabla\left(\frac{1}{2} k \nabla H\right) = 0 \right)$ a radiálního proudění k čerpané studni $\left(-\nabla\left(\frac{1}{2} k \nabla H\right) = \sigma \right)$.

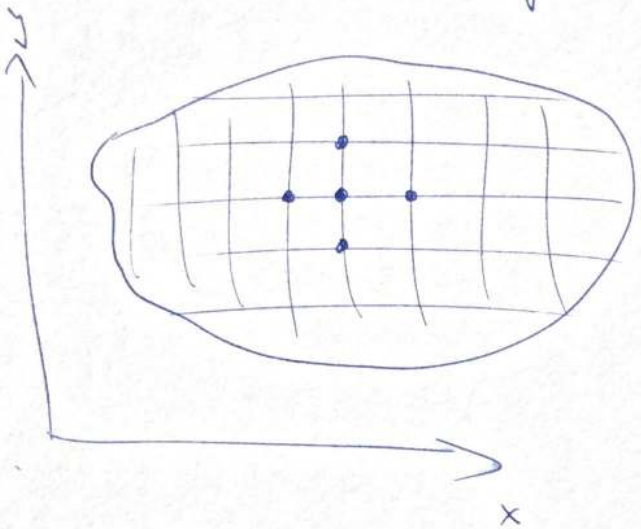


Díky linearitě dokážeme proudění hydraulickou clonou „rozložit" na jednodušší dílčí prozkoumané případy.

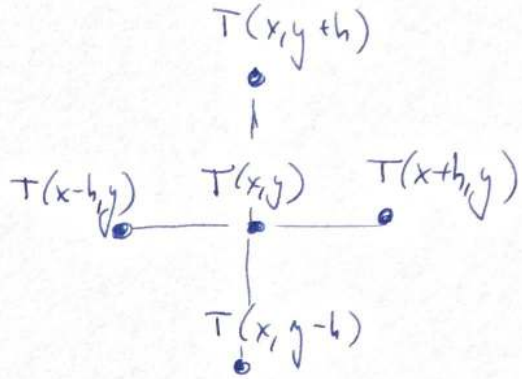
Diferenční schéma pro rci vedení tepla

Stacionární rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



detail



$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots \text{ analogicky}$$

1) dosaďte vztahy pro $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ do rovnice a dokažte, že výsledkem je <u>lineární rovnice</u>, pokud $T(x,y)$, $T(x \pm h, y)$, $T(x, y \pm h)$ považujeme jako neznámé

2) ukažte, že z rovnice plyne, že ve stacionárním stavu je teplota $T(x,y)$ aritmetickým průměrem teplot $T(x \pm h, y)$, $T(x, y \pm h)$

3) modifikujte 1. vztah pro rovnici v izotropním prostředí

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$