

Gradient funkce

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{dla } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

analogicky pro funkce tří proměnných a složcové vektory

Vlastnosti gradientu:

- a) je kolmý na všechnice funkce f
- b) směr maximálního nárstu funkce f
- c) možnost odpovídajícího nárstu funkce f na určitou podmáčkovou délku
- d) $\sim 1D$ (jednorozměrný případ) → redukce na (parciální) derivaci.

Označení:

$$\nabla \dots \text{nabla operator} \quad \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\text{Formální príručka} \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Liniarita gradientu: Je součl. f a g funkce a c čísl., platí

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g, \quad \nabla(e \cdot f) = e \cdot \nabla f$$

Kvadratická approximace skalarové funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) (x - x_0, y - y_0)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \nabla f(x, y) (\Delta x, \Delta y)$$

(tři různé zápisy tétož)

Liniární approximace vektorového pole $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{... approximace majora "po řezech"}$$

$$F(x, y) \approx \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}(x - x_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}(y - y_0)$$

Pomocí maticeho součinu

$$F(x, y) \approx F(x_0, y_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}}_{J(x_0, y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \dots \text{jednotlivé matice}$$

Konstitutivní zákon

$$\text{Pro } x_0 = y_0 = F(x_0, y_0) \text{ platí}$$

$$F(x, y) \approx J(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Flot: } \vec{j} = -D \circ c$$

$D, \dots 2 \times 2$ nebo 3×3

$$\text{Darcy: } \vec{q} = -k \circ h$$

k , $h \dots$ symetrická matice

$$\text{Fourier: } \vec{q} = -k \circ \vec{T}$$

Geometrie - poklad

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

- $f(x, y) = C$... výskumice na množině C
(kritika v rovině)
- $z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$... třídující
rovinou ke grafu funkce f
- Pro $f(x_0, y_0) = 0$ (bač že je výskumice na množině 0)
a $z = 0$ (první třídu roviny s poštovou) dostaneme
 $0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$... třídu k
výskumice na množině 0 a bodu (x_0, y_0)
- Je-li $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, tj. třídu menší než první,
je výskumice $f(x, y) = 0$ implikací obecného
funkce $y = g(x)$.

Lokální extrema funkce dvou proměnných

Def: loc. max v bodě (x_0, y_0) , pokud $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$
pro všechna $(x, y) \in$ nejedle okolí bodu (x_0, y_0)
analogicky lokální minima

Fermatova věta: V bodě lokálního extrema je gradient

malouží nulo neexistuje.

Pravidlo: každá parciální derivace v bodě lokálního
extrema, která existuje, je malouží