Aplikovaná a Inženýrská matematika

cvičení

Robert Mařík

30. listopadu 2020

Obsah

1 Parciální derivace

1.1 Výpočet pomocí vzorců

Vypočtěte následující parciální derivace

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right)$

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right)$

c) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x(3 - x - 2y)\right)$

d) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x(3 - x - 2y)\right)$

e) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$

f) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$

g) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$

h) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$

1.2 Parciální derivace, pocitová teplota analyticky

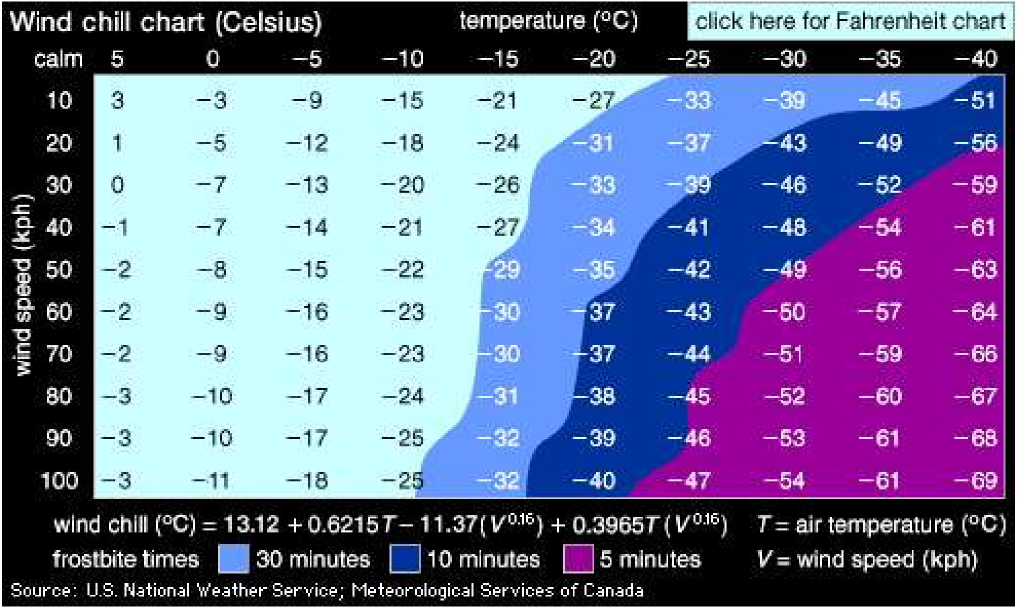
Zdroj: pixabay.com

Kanadský empirický vzorec pro pocitovou teplotu v zimě (wind chill factor) je

$$W(T, v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16},$$

kde T je teplota (ve stupních Celsia) a v je rychlost větru (v km/hod). Teplota je $-11.0\,^\circ\mathrm{C}$ a rychlost větru $26\,\mathrm{km/hod}$. Určete parciální derivace pocitové teploty podle skutečné teploty a podle rychlosti větru (včetně jednotky) a výsledky interpretujte slovně.

1.3 Pocitová teplota numericky



Wind chill chart (Celsius) temperature (°C) click here for Fahrenheit chart

wind speed (kph)	5	0	−5	−10	−15	−20	−25	−30	−35	−40
calm	5	0	−5	−10	−15	−20	−25	−30	−35	−40
10	3	−3	−9	−15	−21	−27	−33	−39	−45	−51
20	1	−5	−12	−18	−24	−31	−37	−43	−49	−56
30	0	−7	−13	−20	−26	−33	−39	−46	−52	−59
40	−1	−7	−14	−21	−27	−34	−41	−48	−54	−61
50	−2	−8	−15	−22	−29	−35	−42	−49	−56	−63
60	−2	−9	−16	−23	−30	−37	−43	−50	−57	−64
70	−2	−9	−16	−23	−30	−37	−44	−51	−59	−66
80	−3	−10	−17	−24	−31	−38	−45	−52	−60	−67
90	−3	−10	−17	−25	−32	−39	−46	−53	−61	−68
100	−3	−11	−18	−25	−32	−40	−47	−54	−61	−69

wind chill (°C) = $13.12 + 0.6215T - 11.37(V^{0.16}) + 0.3965T(V^{0.16})$ T = air temperature (°C)

frostbite times 30 minutes 10 minutes 5 minutes V = wind speed (kph)

Source: U.S. National Weather Service; Meteorological Services of Canada

a) Vypočtěte pomocí centrální diference parciální derivaci $\dfrac{\partial W}{\partial v}$ pro teplotu $-15\,^\circ\mathrm{C}$ a rychlost větru $40\,\mathrm{km\,hod}^{-1}$ a intepretujte výsledek slovně.

b) Pocitová teplota W je lineární v proměnné T. Proto derivace $\dfrac{\partial W}{\partial T}$ nezávisí na T. Jak se tato skutečnost odrazí v tabulce?

c) Odhadněte z tabulky, zda vliv větru klesá nebo roste s rychlostí větru. Potvrďte svou hypotézu analytickým výpočtem parciální derivace $\dfrac{\partial W}{\partial v}$ a vysvětlete fyzikálně.

1.4 Parciální derivace, tepelná kapacita dřeva

Vypočtěte a slovně interpretujte parciální derivaci měrné tepelné kapacity dřeva c podle teploty T a podle obsahu vody MC w v bodě o hodnotě MC 12% a teplotě 27°C.

Pro obě derivace použijte dopřednou diferenci (v tabulce nejsou ekvidistatní kroky MC).

Poznámka: Kromě dopředné diference je možné uvažovat ještě zpětou diferenci definovanou vztahem

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

což je vlastně dopředná diference na předhozím intervalu. Ukažte, že centrální diference je průměrem dopředné a zpětné diference.

Table 4–8. Heat capacity of solid wood at selected temperatures and moisture contents

Temperature		Heat capacity (kJ kg^{-1} K^{-1} (Btu lb^{-1} °F^{-1}))			
(K)	(°C (°F))	Ovendry	5% MC	12% MC	20% MC
280	7 (44)	1.2 (0.28)	1.3 (0.32)	1.5 (0.37)	1.7 (0.41)
290	17 (62)	1.2 (0.29)	1.4 (0.33)	1.6 (0.38)	1.8 (0.43)
300	27 (80)	1.3 (0.30)	1.4 (0.34)	1.7 (0.40)	1.9 (0.45)
320	47 (116)	1.3 (0.32)	1.5 (0.37)	1.8 (0.43)	2.0 (0.49)
340	67 (152)	1.4 (0.34)	1.6 (0.39)	1.9 (0.46)	2.2 (0.52)
360	87 (188)	1.5 (0.36)	1.7 (0.41)	2.0 (0.49)	2.3 (0.56)

Zdroj: Wood handbook

1.5 Veličiny z rovnice vedení tepla

V případech, kdy je při tepelné výměně nutno uvažovat vedení tepla (vysoké Biotovo číslo), modelujeme změnu teploty podle rovnice vedení tepla, kterou jsme na přednášce odvodili pro jednorozměrný případ ve tvaru

$$\varrho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Typickým případem vedení tepla v jedné dimenzi je vedení tepla ve stěně.

Uvažujme jednorozměrnou úlohu s vedením tepla. Osa x směřuje doprava, teplota v bodě x a čase t je $T(x,t)$ ve stupních Celsia. Tok tepla v čase t a v bodě x je $q(x,t)$ v joulech za sekundu. Kladný tok je ve směru osy x. Podle Fourierova zákona je

$$q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Tyč má teplotu $0\,^\circ$C, pravý konec udržujeme na této teplotě, levý konec ohříváme na $20\,^\circ$C a udržujeme na této teplotě. Ve zbytku tyče (stěny) se postupně nastolí rovnováha vlivem vedení tepla.

Vyjádřete následující veličiny a určete jejich znaménko.

a) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času.
b) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle roste teplota směrem doprava.
c) Rychlost, jak rychle se klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava.
d) Rychlost, se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.
e) Rychlost, se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.

1.6 Okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla

K modelu stěny pomocí rovnice vedení tepla je ještě nutné přidat podmínky související s počátečním stavem (počáteční podmínky) a s chováním na okrajích (okrajové podmínky).

Nechť stěna je na intervalu $x \in [0, L]$, $x = 0$ je vnitřní okraj a $x = L$ je vnější okraj. Výraz $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}$ udává tok tepla ve směru osy x. Tok ve směru osy x má kladné znaménko. Naformulujte okrajové podmínky v následujících scénářích.

a) Z venku dokonale izolovaná stěna. Na hranici $x = L$ nedochází k toku tepla.

b) Vnitřní část stěny je udržovaná na konstantní teplotě $T = 23^\circ\mathrm{C}$.

c) Stěna je zvenku osvětlená a zahřívaná Sluncem. Na vnější hranici je konstantní tok tepla směrem do stěny.

d) Stěna je zvenku ochlazována prouděním vzduchu. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.

e) Stěna je zevnitř ohřívána prouděním vzduchu od radiátorů. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.

Zpracováno podle Cengel: Mass and heat transfer.

2 Gradient

2.1 Linearizace pocitové teploty

Pocitová teplota W z minulého cvičení má v bodě odpovídajícím teplotě $T = -11°\mathrm{C}$ a rcyhlosti větru $v = 26\,\mathrm{km\,hod}^{-1}$ má hodnotu

$$W = -20.2°\mathrm{C}$$

a parciální derivace

$$\frac{\partial W}{\partial v} = -0.163°\mathrm{C\,hod\,km}^{-1}$$

Zdroj: pixabay.com

a

$$\frac{\partial W}{\partial T} = 1.289.$$

Najděte pomocí lineární aproximace vzorec pro pocitovou teplotu v okolí tohoto bodu.

2.2 Parciální derivace, gradient

Určete gradient funkcí $z = ax^2y - 2xy^2$ a $h = \dfrac{ax}{y^2} + 5x^3y^2$, kde $a \in \mathbb{R}$ je reálný parametr.

2.3 Gradient funkce s vrstevnicemi ve tvaru kružnic

Určete gradient funkce $z = x^2 + y^2$ a zkontrolujte, že je v každém bodě kolmý ke kružnici se středem v počátku. Využijte toho, že spojnice bodu na kružnici se středem kružnice je kolmá k této kružnici.

2.4 Gradient funkce s paprskovitými vrstevnicemi

Určete gradient funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ a zkontrolujte, že je v každém bodě tečný ke kružnici se středem v počátku. Využijte toho, že tečna je kolmá na poloměr.

2.5 Tečná rovina atd.

Pro funkci $f(x, y) = x^2 + \dfrac{x}{y^2} - 6$ najděte

a) gradient,

b) gradient v bodě $(2, 1)$,

c) lineární aproximaci v bodě $(2, 1)$,

d) tečnou rovinu v bodě $(2, 1)$,

e) rovnici vrstevnice bodem $(2, 1)$ a rovnici tečny k vrstevnici tímto bodem,

f) explicitní vyjádření funkce dané v okolí bodu $(2, 1)$ implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$,

g) lineární aproximace v okolí bodu $x = 2$ pro funkci získanou v předchozím bodu.

2.6 Linearizace vektorové funkce, Jacobiho matice

Jacobiho matice se používá k linearizaci vektorových funkcí, které mají na vstupu i na výstupu vektor. Jsou to matice, kde gradienty jednotlivých komponent vektorové funkce jsou zapsány do řádků matice.

Najděte Jacobiho matici pro funkci

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 + xy + 6y)\vec{i} + e^{3x}\vec{j}$$

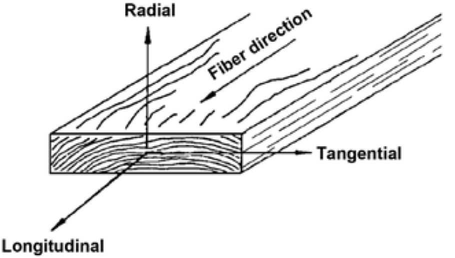
a poté hodnotu této matice v bodě $(0, 0)$.

2.7 Parciální derivace, gradient a násobení matic

Vypočtěte gradient funkce

$$T = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ukažte, že vrstevnice této funkce jsou kružnice se středem v počátku, nakreslete obrázek s těmito vrstevnicemi a vyznačte do tohoto obrázku gradienty v bodech $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$ a $C = (1, 1)$



Zdroj: Wood handbook

Uvažujte součinitel tepelné vodivosti

$$\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a vypočtěte tok tepla v bodech A, B, C. Porovnejte směr tohoto toku se směrem gradientu a vysvětlete svá pozorování. Snaží se matice usměrnit teplo do směru osy x nebo do směru osy y? Odpovídá situace spíše dřevu s podélným směrem v ose x nebo v ose y?

3 Divergence, rovnice vedení tepla

3.1 Divegrence vektorového pole

a) Vypočtěte divergenci vektorového pole

$$\vec{F} = x^2 y \vec{\imath} + (x + y^2)\vec{\jmath}.$$

b) Zakreslete do obrázku směr toku vektorového pole v bodě $(2, 1)$.

c) Vypočtěte divergenci vektorového pole v bodě $(2, 1)$ a podle toho, zda je kladná nebo záporná rozhodněte, zda tok v daném bodě sílí nebo slábne.

d) Předpokládejme, že dané vektorové pole reprezentuje stacionární tok. Je v bodě $(2, 1)$ zdroj nebo spotřebič?

3.2 Divegrence vektorového pole s parametrem

a) Vypočtěte divergenci vektorového pole

$$\vec{F} = ax^3 y^2 \vec{\imath} + 3x^2 y \vec{\jmath},$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je reálný parametr.

b) Určete hodnotu parametru a tak, aby pole bylo v bodě $(-1, 2)$ nezřídlové, tj. aby mělo nulovou divergenci v bodě $(-1, 2)$.

3.3 Rovnice vedení tepla v dvourozměrném materiálu

Teplota ve dvourozměrné desce pro $0 \leq x \leq 10$ a $0 \leq y \leq 10$ zachycené v určitém okamžiku termokamerou je popsána rovnicí

$$T(x, y) = (2x - y)^2 + x^4.$$

Rozměry jsou v centimetrech, teplota ve stupních Celsia. (Formálně to nevychází, ale ke každému členu můžeme dodat konstantu, která jeho rozměr opraví. Pro jednoduchost tuto komplikaci vynecháme.)

Zdroj: pixabay.com

a) Vypočtěte gradient ∇T a tok tepla $-k \cdot \nabla T$. Součinitel tepelné vodivosti (v jednotkách kompatibilních se zadáním) je $k = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Určete, zda na levém okraji desky teče teplo dovnitř desky nebo z desky ven.

c) Vypočtěte divergenci toku tepla, tj. $\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T)$.

d) V desce nejsou zdroje tepla. Ochlazuje se deska uprostřed, nebo otepluje?

3.4 Vedení tepla v různých materiálech

a) Zapište rovnici vedení tepla v trojrozměrném izotropním a v trojrozměrném ortotropním materiálu. Ve druhém případě volte osy ve směru vlastních vektorů.

b) Napište, jak je možné zjednodušit rovnice z předchozího bodu, pokud jsou materiálové konstanty nezávislé na poloze (homogenní materiál) a na teplotě (lineární materiál).

4 Rotace, kmenová funkce gradientu

4.1 Rotace vektorového pole v rovině

Vypočtěte rotaci funkce $\vec{F} = xy^2\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$.

4.2 Rotace vektorového pole v prostoru

Vypočtěte rotaci funkce $\vec{F} = xyz\vec{\imath} + 5x^2y\vec{\jmath} - 3x^2z\vec{k}$.

4.3 Divergence a rotace 2D funkce s parametrem

Vypočtěte divergenci a rotaci funkce $\vec{F} = ax^2y^3\vec{\imath} + (x^2 + y)\vec{\jmath}$.

4.4 Nalezení kmenové funkce 1/3

Pro vektorové pole

$$\frac{4}{5}xy^3\vec{\imath} + \frac{6}{5}x^2y^2\vec{\jmath}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

4.5 Nalezení kmenové funkce 2/3

Pro vektorové pole

$$\left(x^2 + \frac{4}{5}xy^3\right)\vec{\imath} + \left(\frac{6}{5}x^2y^2 + y\right)\vec{\jmath}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

4.6 Nalezení kmenové funkce 3/3

Pro vektorové pole

$$\left(y + \frac{4}{5}xy^3\right)\vec{\imath} + \left(\frac{6}{5}x^2y^2 + x^2\right)\vec{\jmath}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

5 Křivkové integrály

5.1 Křivkový integrál druhého druhu po třech různých křivkách

Vypočtěte

$$\int_{C_i} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

pro vektorové pole

$$\vec{F} = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

po třech různých křivkách C_1, C_2 a C_3.

$$\begin{aligned} C_1 &\colon \vec{r} = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ C_2 &\colon \vec{r} = (1-t)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}, \quad t \in [0,1] \\ C_3 &\colon \vec{r} = (1-t^2)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}, \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Tj. počítáme

$$\int_{C_i} -y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y$$

po třech zadaných křivkách C_1, C_2 a C_3.

5.2 Křivkový integrál druhého druhu po parabole

Vypočtěte

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$$

pro vektorové pole

$$\vec{F} = x^2\vec{\imath} + (x+y)\vec{\jmath}$$

po části paraboly

$$C\colon \vec{r} = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath}, \quad t \in [0,1]$$

tj. počítáme

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

po zadané křivce C.

5.3 Křivkový integrál druhého druhu po kubické parabole

Vypočtěte
$$\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$
pro vektorové pole
$$\vec{F} = 2y\vec{\imath} + x^2 y\vec{\jmath}$$
po části kubické paraboly
$$C\colon \vec{r} = t\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath}, \quad t \in [0,1],$$
tj. počítáme
$$\int_C 2y\,\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y$$
po zadané křivce C.

5.4 Tok vektorového pole uzavřenou křivkou

Vypočtěte tok vektorového pole

$$\vec{\Phi}_1 = (x+2)\vec{\imath}$$

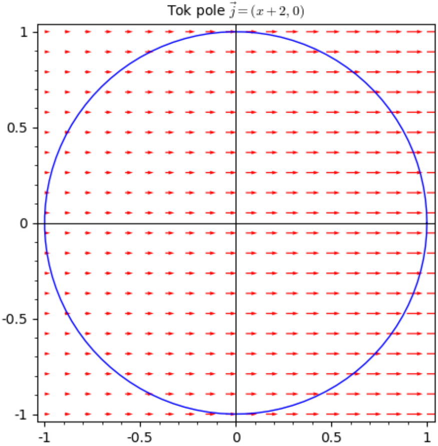
jednotkovou kružnicí se středem v počátku orientovanou proti směru hodinových ručiček, tj.

$$C\colon \vec{r} = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Návod:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \pi$$

a tento integrál je možno najít například grafickou cestou.



Zdroj: vlastní

5.5 Tok vektorového pole uzavřenou křivkou

Vypočtěte tok vektorového pole

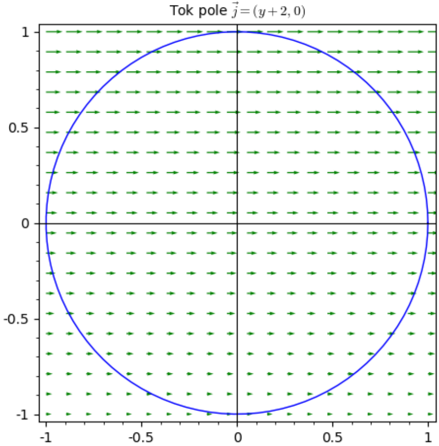
$$\vec{\Phi}_2 = (y+2)\vec{\imath}$$

jednotkovou kružnicí se středem v počátku orientovanou proti směru hodinových ručiček, tj.

$$C\colon \vec{r} = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Návod:

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = 0$$



Zdroj: vlastní

6 Dvojné integrály

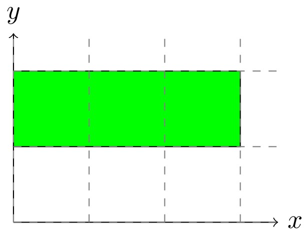
6.1 Integrál přes obdélník

Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes obdélník

$$0 \leq x \leq 3$$
$$1 \leq y \leq 2.$$



6.2 Kvadratický moment pro obdélník

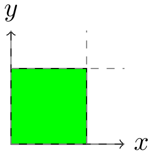
Vypočtěte integrál

$$\iint_{\Omega} y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

přes obdélník se stranami podél os, se středem v počátku a délkou stran a a b, tj. přes množinu Ω danou nerovnostmi

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2},$$
$$-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}.$$

6.3 Integrál závislý na parametru



Vypočtěte dvojný integrál

$$I_n = \iint_\Omega y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes jednotkový čtverec

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1$$

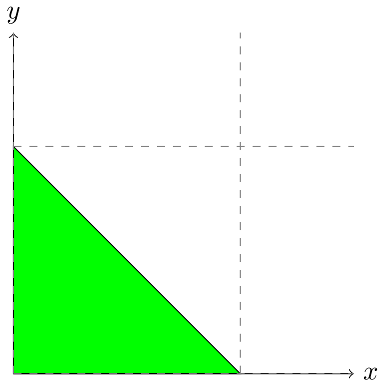
v závislosti na parametru $n \geq 0$.

6.4 Integrál přes trojúhelník

Vypočtěte integrál

$$\iint_\Omega xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes trojúhelník Ω s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$.



6.5 Integrál pod parabolou

Vypočtěte integrály

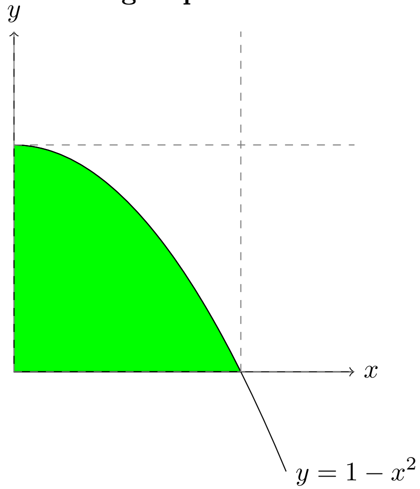
$$I_1 = \iint_\Omega x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_2 = \iint_\Omega y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_3 = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

přes množinu Ω danou nerovnostmi

$$0 \leq x \leq 1,$$
$$0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Určete obsah a polohu těžiště této množiny.

6.6 Integrál přes čtvrtkružnici



Vypočtěte integrály

$$I_1 = \iint_\Omega x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_2 = \iint_\Omega y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_3 = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

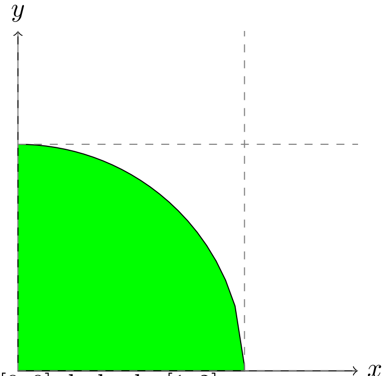
přes čtvrtkružnici na obrázku (čtvrtina jednotkové kružnice v prvním kvadrantu). Určete obsah a polohu těžiště této čtvrtkružnice.

6.7 Kvadratický moment kruhu

Vypočtěte kvadratický moment kruhu o poloměru R vzhledem k ose procházející středem.

7 Křivkový integrál pomocí potenciálu, Greenova věta, rovnice kontinuity

7.1 Křivkový integrál pomocí kmenové funkce



Určete, pro jako hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ křivkový integrál vektorového pole

$$\vec{F} = ax^2y\vec{\imath} + (x^3+1)\vec{\jmath}$$

po křivce C, tj.

$$\int_C ax^2y\,\mathrm{d}x + (x^3+1)\,\mathrm{d}y$$

nezávisí na integrační cestě v $\mathbb{R}^2$. Najděte kmenovou funkci příslušného vektorového pole a vypočtěte křivkový integrál po křivce z bodu $[0,0]$ do bodu $[1,2]$.

7.2 Křivkový integrál pomocí kmenové funkce 2

Pro jakou hodnotu parametru m je křivkový integrál

$$\int (6x^2y + x + y)\,\mathrm{d}x + (mx^3 + x)\,\mathrm{d}y$$

nezávislý na integrační cestě v $\mathbb{R}^2$? Vypočtěte hodnotu tohoto integrálu po křivce z bodu $(2,1)$ do bodu $(1,3)$.

7.3 Kmenová funkce pomocí křivkového integrálu

Ukažte, že vektorové pole $\vec{F} = (6x^2y + x + y, 2x^3 + x)$ má kmenovou funkci. Vypočtěte z definice křivkový integrál v tomto vektorovém poli po křivce $\vec{r}(t) = (at, bt)$, $t \in [0,1]$, tj. po úsečce z počátku do bodu (a,b) a ukažte, že tímto způsobem obdržíme kmenovou funkci.

7.4 Greenova věta

Určete integrál

$$\oint_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

po křivce, která je kladně orientovanou hranicí jednotkového čtverce s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ pro vektorovou funkci

$$\vec{F} = x^7\vec{i} + xy\vec{j}.$$

7.5 Rovnice vedení tepla v materiálech různých vlastností

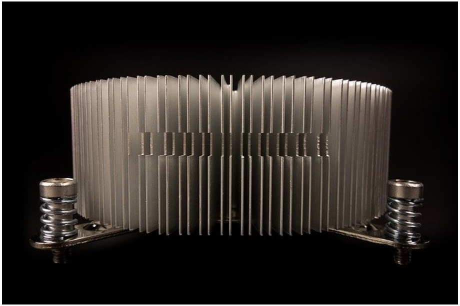
Rovnice vedení tepla v ortotropním materiálu umístěném do souřadné soustavy tak, aby vlastní směry tenzoru tepelné vodivosti (jako např. anatomické směry dřeva) má nejobecnější možné vyjádření

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Za jakých okolností je možno veličiny λ_x a λ_y napsat před vnější derivaci tak, aby v rovnici vznikly druhé derivace?

7.6 Stacionární vedení tepla v žebru chladiče

Vyjímečně jsme nuceni do rovnice vedení tepla zahrnout i zdroje. Modelujte vedení tepla v žebru chladiče. Úlohu uvažujte jako jednorozměrnou, materiál homogenní izotropní s konstantní tepelnou vodivostí. Kolem chladiče proudí vzduch a teplotě T_0 a chladič ztrácí teplo rychlostí úměrnou rozdílu teploty žebra v daném místě a teploty okolního vzduchu. (Koeficient úměrnosti je dán koeficient přestupu tepla a šířkou žebra). Uvažujte stacionární děj.



Zdroj: pixabay.com

8 Diferenciální rovnice I

8.1 Model růstu úměrného velikosti chybějícího množství

Mnoho živočichů roste tak, že mohou dorůstat jisté maximální délky a rychlost jejich růstu je úměrná délce, která jim do této maximální délky chybí (tj. kolik ještě musí do této maximální délky dorůst). Sestavte matematický model popisující takovýto růst (von Bertalanffy growth model).

Jakmile vidíme, že v zadání figuruje rychlost změny veličiny, která nás zajímá, je jasné, že kvantitativní model bude obsahovat derivaci. Zatím se učíme model zapsat, později ho budeme umět i vyřešit.

Zdroj: pixabay.com

8.2 Kontaminace a čištění

Znečišťující látky se v kontaminované oblasti rozkládají tak, že za den se samovolně rozloží 8% aktuálního znečištění. Kromě toho pracovníci odstraňují látky rychlostí 30 galonů denně. Vyjádřete tento proces kvantitativně pomocí vhodného modelu.

Zdroj: pixabay.com

Tento příklad opět zmiňuje rychlost změny, tj. derivaci. Tentokrát se na změně podílejí dva procesy a jejich účinek se sčítá. Příklad navíc připomíná, jak se pracuje se změnou vyjádřenou procenty. Toto je používané například při úročení spojitým úrokem. Pokud pokles změníme na růst, tj. pokud změníme znaménka u derivace, máme okamžitě model růstu financí na účtu, na kterém se pravidelně připisuje úrok a k tomu se přidává fixní úložka.

8.3 Populace jelenů

Populace jelenů v národním parku přibývá rychlostí 10% za rok. Správa parku každý rok odebere 50 jedinců. Napište matematický model pro velikost populace jelenů v tomto parku.

Zdroj: pixabay.com, autor Free-Photos

8.4 Hrubý model chřipkové epidemie

Rychlost s jakou roste počet nemocných chřipkou je úměrný současně počtu nemocných a počtu zdravých jedinců. Sestavte model takového šíření chřipky.

Toto je současně model popisující šíření informace v populaci, stačí si místo chřipky představit nějakou informaci předávanou mezi lidmi (sociální difuze).

8.5 Ropná skvrna

Zdroj: pixabay.com

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

8.6 Model učení

Rychlost učení (tj. časová změna objemu osvojené látky nebo procento z maximální manuální zručnosti) je úměrná objemu dosud nenaučené látky. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

Porovnejte s příkladem 8.1.

8.7 Řešení ODE a IVP

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = te^y$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = kr^3, \quad r(0) = r_0 > 0$

(6) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = 0$

(7) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = -2$

Umění najít řešení diferenciální rovnice je sympatické, není to však nic proti umění sestavit model (naučili jsme se již ve druhém týdnu, připomeneme si v následujícím modelu), umění posoudit jednoznačnost řešení (většina modelů se řeší numericky a musíme být přesvědčeni o smysluplnosti takové činnosti) a stabilitu řešení (řešení, která nejsou stabilní, jsou sice v souladu s přírodními zákony, ale pravděpodobnost jejich spontánního výskytu je nulová). Jednoznačnost a zjednodušenou verzi stability řešení (stabilita konstantních řešení) jsme viděli na přednášce a připomeneme v dalších příkladech.

8.8 Tloušťka ledu

Takzvaný Stefanův zákon (J. Stefan, Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere, 1891) vyjadřuje že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu a najděte řešení vzniklé diferenciální rovnice.

Zdroj: pixabay.com

8.9 Model vypouštění nádrže

Zdroj: www.rodovystatek.cz

Z fyziky je známo, že rychlost s jakou vytéká tekutina otvorem u dna nádoby je úměrná odmocnině výšky hladiny (protože se mění potenciální energie úměrná výšce na kinetickou energii úměrnou druhé mocnině rychlosti). Proto je i rychlost s jakou se zmenšuje objem vody v nádrži úměrná odmocnině výšky hladiny.

Ukažte, že matematickým popisem procesu je diferenciální rovnice. Napište rovnici pro výšku hladiny vody v nádrži jako funkci času. Uvažujte tři případy: nádrž **cylindrického tvaru** (válec postavený na podstavu), nádrž ve tvaru **kvádru** a nádrž ve tvaru **kužele** otočeného vrcholem dolů (trychtýř).

V tomto příkladě vystupuje derivace jak rychlost, ale po přepisu zadání do modelu máme v rovnici dvě různé veličiny, které se mění: objem vody a výšku hladiny. Musíme ještě najít a použít vztah mezi rychlostmi změn těchto veličin. Fyzikální zákon je formulován pro derivaci objemu a nás zajímá derivace výšky.

8.10 Problematika jednoznačnosti v modelu vypouštění nádrže

Ve cvičení 8.9 jsme odvodili rovnici

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}$$

popisující úbytek hladiny vody v nádrži tvaru kvádru, ze které vypouštíme vodu.

Zdroj: www.rodovystatek.cz

A) Zkontrolujte, že pro $h > 0$ má každá počáteční úloha jediné řešení. Interpretujte tento výsledek prakticky.

B) Pro $h = 0$ by řešení nemuselo být určeno jednoznačně. A opravdu není. Řešením je například $h(t) = 0$ nebo

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}k^2t^2 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Zkontrolujte dosazením (pozor: pro $t < 0$ platí $\sqrt{t^2} = |t| = -t$) a rozmyslete, jestli nejednoznačnost je jenom matematický trik, nebo jestli má fyzikální interpretaci.

9 Diferenciální rovnice II

10 Autonomní systémy

10.1 Stavebniny vedle čebínského nádraží: model

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. Předpokládejme, že personál stavebnin přisypává na hromadu materiál konstantní rychlostí (v jednotkách objemu za jednotku času). Tato hromada je však v poměrně otevřené krajině a vítr rozfoukává materiál po okolí. Je rozumné předpokládat, že rozfoukávání (opět v jednotkách objemu za jednotku času) se děje rychlostí úměrnou povrchu návětrné strany pláště.

Zdroj: vlastní

- Napište rovnici pro derivaci objemu hromady podle času.
- Existuje konstantní řešení? Pokud ano, je stabilní nebo nestabilní? Zdůvodněte.
- Může hromada skončit i při neustálém přisypávání celá rozfoukaná?
- Mohou pracovníci navršit hromadu do libovolné výšky anebo pro velkou hromadu je již rozfoukávání rychlejší než přisypávání?

10.2 Časový rozestup mezi trolejbusy

Uvažujme dva trolejbusy jedoucí za sebou po stejné trati. Označme $x(t)$ jejich časový odstup. Pokud první trolejbus zastaví na určité zastávce v čase t, druhý trolejbus na tuto zastávku dorazí v čase $x(t)$. Naším úkolem je zjistit, jak se $x(t)$ mění s rostoucím t.

Zdroj: vlastní

Předpokládejme, že **(1)** pokud žádní pasažéři nečekají na druhý vůz, druhý vůz se pohybuje rychleji než první vůz a oba vozy se "sjedou", tj. $x(t)$ klesá konstantní rychlostí, pokud na druhý vůz nečekají žádní pasažéři **(2)** rychlost druhého vozu klesá (a rozestup roste) s rostoucím počtem pasažérů, kteří čekají na zastávce **(3)** počet pasažérů kteří čekají na zastávce roste s rostoucím intervalem mezi oběma vozy.

Navrhněte model pro rozestup trolejbusů, najděte stacionární řešení a posuďte jeho stabilitu.

10.3 Propeptid kolagenu

Kolagen je klíčový protein pojivových tkání. Jeden z kroků při syntéze kolagenu spočívá v reakci tří molekul propeptidu kolagenu, zkráceně propeptidu. Tento propeptid se formuje konstantní rychlostí a kromě toho, že je surovinou pro produkci kolagenu, se ještě rozpadá rychlostí úměrnou koncentraci. Napište matematický model pro množství (koncentraci) propeptidu kolagenu.

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life

Zdroj: pixabay.com

10.4 Jelen a los

Uvažujme populaci jelenů a losů. Tyto populace spolu soupeří o potravu. **(1)** Bez konkurence by populace jelena rostla rychlostí 3 a populace losa rychlostí 2 na jeden kus. **(2)** Vnitrodruhová konkurence se projevuje v obou populacích stejně a je rovna druhé mocnině příslušné velikosti populace. **(3)** Mezidruhová konkurence je vyjádřena členem rovným součinu velikosti populací a tato konkurence se projeví s koeficientem 0.5 v populaci losa a s koeficientem 1 v populaci jelena.

Zdroj: pixabay.com

Sestavte matematický model a otestujte jej numerickým experimentem na stabilitu stacionárních bodů. Poté zdvojnásobte parametry mezidruhové konkurence a sledujte změnu odezvy.

10.5 Puštík obecný

Zdroj: wikimedia

Puštík obecný se téměř výhradně živí malými hlodavci. Předpokládejme následující vztahy. **(1)** Populace hlodavců má porodnost 0.1 na jedince a úmrtnost 0.025 na jedince za jednotku času. **(2)** Rychlost s jakou jeden puštík konzumuje hlodavce je úměrná počtu hlodavců s kostantou úměrnosti 0.01. **(3)** Porodnost v populaci puštíka je úměrná množství zkonzumované potravy s konstantou úměrnosti 0.05. **(4)** Úmrtnost v populaci puštíka je 0.1 na jedince za jednotku času.

Vyjádřete tyto vztahy matematickým modelem.

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life. Doslova přeloženo. Porodnost je ve skutečnosti společný efekt zvýšené porodnosti a snížené úmrtnosti v případě, že puštík má přístup k potravě.

10.6 Kůň Převalského

Kůň Převalského je divoký kůň ze střední Asie, jediný druh koně, který nebyl domestikován. V divočině jsou tyto koně loveni vlky. Napište matematický model založený na následujících předpokladech. **(1)** Porodnost v populaci koní je 0.15 na jedince. **(2)** Úmrtnost v populaci koní je 0.01 na jedince. **(3)** Vlci se živí i jinou potravou, mají tedy kladnou porodnost. Ta je 0.1 na jedince. **(4)** Vlci mají konstantní úmrtnost 0.05 na jedince. **(5)** Pravděpodobnost s jakou je kůň uloven vlkem je úměrná počtu vlků s konstantou úměrnosti 0.02.

Zdroj: pixabay.com

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life

Podle Wikipedie kůň Převalského přežil jenom díky péči zoologických zahrad a z rodokmenu je zřejmé, že 70 procent jedinců tohoto druhu má původní předky ze zoologické zahrady v Praze.

10.7 Analýza pomocí vlastních čísel

Autonomní systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x^2y + y^3 - 5$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3xy^2 - 3y$$

má stacionární bod $(1, 1)$. Najděte Jacobiho matici v tomto bodě, vlastní čísla této matice a určete typ stacioárního bodu.

11 Diferenciální rovnice druhého řádu

12 Více integrálů

13 Více diferenciálních rovnic

14 Shrnutí