

Aplikovaná a Inženýrská matematika cvičení

Robert Mařík

30. listopadu 2020

Obsah

1	Parciální derivace	3
2	Gradient	18
3	Divergence, rovnice vedení tepla	31
4	Rotace, kmenová funkce gradientu	39
5	Křivkové integrály	47
6	Dvojné integrály	64
7	Křivkový integrál pomocí potenciálu, Greenova věta, rovnice kontinuity	78

8	Diferenciální rovnice I	90
9	Diferenciální rovnice II	112
10	Autonomní systémy	113
11	Diferenciální rovnice druhého řádu	128
12	Více integrálů	129
13	Více diferenciálních rovnic	130
14	Shrnutí	131

1 Parciální derivace

1.1 Výpočet pomocí vzorců

Vypočtěte následující parciální derivace

a) $\frac{\partial}{\partial x} (x^2y + 2xy^3 + x + 1)$

e) $\frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{1 - x^2 - y^2})$

b) $\frac{\partial}{\partial y} (x^2y + 2xy^3 + x + 1)$

f) $\frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{1 - x^2 - y^2})$

c) $\frac{\partial}{\partial x} (3x(3 - x - 2y))$

g) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

d) $\frac{\partial}{\partial y} (3x(3 - x - 2y))$

h) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

Řešení:

a) $\frac{\partial}{\partial x} (x^2y + 2xy^3 + x + 1) = 2x \cdot y + 2y^3 + 1 + 0 = 2xy + 2y^3 + 1$

b) $\frac{\partial}{\partial y} (x^2y + 2xy^3 + x + 1) = x^2 + 2x \cdot 3y^2 + 0 + 0 = x^2 + 6xy$

$$\text{c) } \frac{\partial}{\partial x} \left(3x(3 - x - 2y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(9x - 3x^2 - 6xy \right) = 9 - 3 \cdot 2x - 6 \cdot 1 \cdot y = 9 - 6x - 6y$$

$$\text{d) } \frac{\partial}{\partial y} \left(3x(3 - x - 2y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(9x - 3x^2 - 6xy \right) = 0 - 0 - 6x = -6x$$

$$\text{e) } \dots = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (0 - 2x - 0) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\text{f) } \dots = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \text{ (z předchozího výpočtu a symetrie)}$$

$$\text{g) } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1(x^2 + y^2) - x(2x + 0)}{(x^2 + y^2)^2} = \dots \text{ (derivace podílu)}$$

$$\text{h) } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x(x^2 + y^2)^{-1} \right) = x(-1)(x^2 + y^2)^{-2}(0 + 2y) = \dots \text{ (derivace}$$

konstantního násobku mocninné funkce s vnitřní složkou)

1.2 Parciální derivace, pocitová teplota analyticky

Kanadský empirický vzorec pro pocitovou teplotu v zimě (wind chill factor) je

$$W(T, v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16},$$

kde T je teplota (ve stupních Celsia) a v je rychlost větru (v km/hod). Teplota je -11.0°C a rychlost větru 26 km/hod. Určete parciální derivace pocitové teploty podle skutečné teploty a podle rychlosti větru (včetně jednotky) a výsledky interpretujte slovně.



Zdroj: pixabay.com

Řešení:

Dosazením do vzorce dostáváme $W(-11, 26) = -20.212^\circ\text{C}$. Derivováním dostáváme

$$\frac{\partial W}{\partial T}(T, v) = 0.6215 + 0.3965v^{0.16},$$

$$\frac{\partial W}{\partial v}(T, v) = -11.37 \times 0.16v^{-0.84} + 0.3965 \times 0.16Tv^{-0.84}$$

a po dosazení

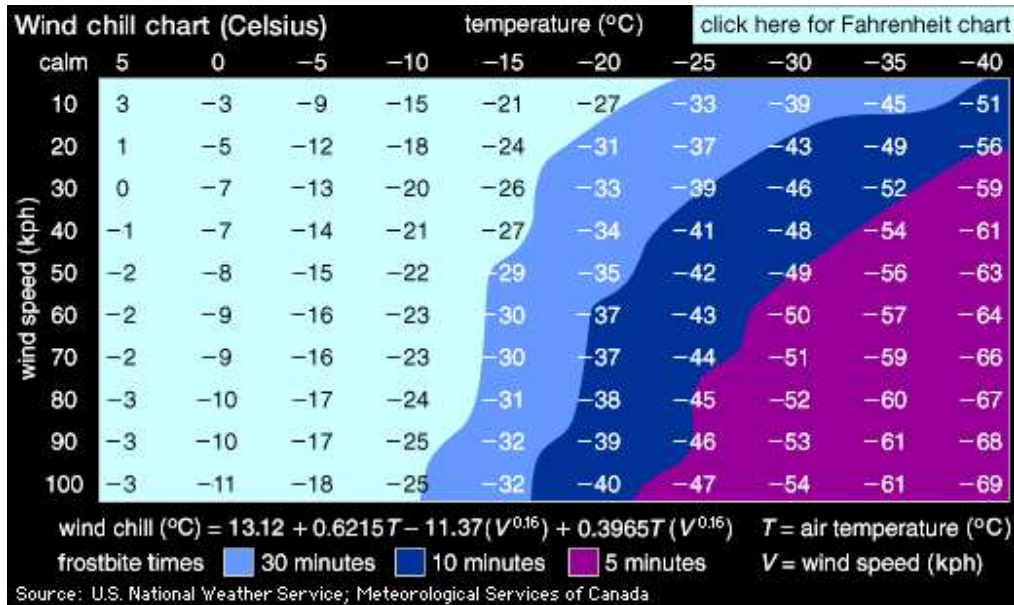
$$\frac{\partial W}{\partial T}(-11, 26) = 1.289,$$

$$\frac{\partial W}{\partial v}(-11, 26) = -0.163 \text{ }^{\circ}\text{C} / (\text{km hod}^{-1}) = -0.163 \text{ }^{\circ}\text{C hod km}^{-1}.$$

Za dané teploty a rychlosti větru je pocitová teplota -20.2 stupňů Celsia. Nárůst teploty o jeden stupeň způsobí nárůst pocitové teploty přibližně o 1.3 stupně. Tedy změna teploty se projeví na pocitové teplotě 1.3 -násobkem, tj. každkouzměnu vnímáme o třicet procent intenzivněji.

Podobně, zesílení větru o jeden kilometr za hodinu způsobí snížení pocitové teploty přibližně o 0.16 stupně.

1.3 Pocitová teplota numericky



- a) Vypočtete pomocí centrální difference parciální derivaci $\frac{\partial W}{\partial v}$ pro teplotu -15°C a rychlost větru 40 km hod^{-1} a interpretejte výsledek slovně.
- b) Pocitová teplota W je lineární v proměnné T . Proto derivace $\frac{\partial W}{\partial T}$ nezávisí na T . Jak se tato skutečnost odrazí v tabulce?
- c) Odhadněte z tabulky, zda vliv větru klesá nebo roste s rychlostí větru. Potvrďte svou hypotézu analytickým výpočtem parciální derivace $\frac{\partial W}{\partial v}$ a vysvětlete fyzikálně.

Řešení:

a)

$$\frac{\partial W}{\partial v}(T = -15, v = 40) \approx \frac{-29 - (-26)}{50 - 30} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{km hod}^{-1}} = -0.15^{\circ}\text{C}/(\text{km hod}^{-1})$$

Za podmínek, kde je 15 stupňů pod nulou a vítr o rychlosti 40 kilometrů za hodinu každé další zesílení větru o kilometr za hodinu sníží pocitovou teplotu přibližně o patnáct setin stupně.

- b) Neformálně: V rámci každého řádku jsou stejně velké skoky. Přesněji: V každém řádku je přibližně aritmetická posloupnost, data se mění odečtením pevné konstanty. Případné fluktuace od tohoto pravidla jsou způsobeny zaokrouhlením.
- c) Pokud se díváme na data po sloupcích, s rostoucí silou větru jsou skoky menší a proto parciální derivace podle větru s rostoucí rychlostí větru klesá. To potvrzuje i analytický výpočet, protože u rychlosti je mocnina menší než jedna a ta se po zderivání změní na zápornou mocninu a tím se změní charakter závislosti na rychlosti větru. Fyzikálně vítr odfoukává izolační mikrovrstvu vzduchu kolem tváře nebo těla a proto cítíme ve větším větru větší chlad. Pokud je vítr silný, nestačí se tato mikrovrstva vytvořit ani v minimální míře a proto je jedno, jestli fouká hodně nebo ještě více.

1.4 Parciální derivace, tepelná kapacita dřeva

Vypočtete a slovně interpretujte parciální derivaci měrné tepelné kapacity dřeva c podle teploty T a podle obsahu vody MC w v bodě o hodnotě MC 12% a teplotě 27°C.

Pro obě derivace použijte dopřednou diferenci (v tabulce nejsou ekvidistatní kroky MC).

Poznámka: Kromě dopředné difference je možné uvažovat ještě zpětou diferenci definovanou vztahem

$$\frac{f(x) - f(x - h)}{h},$$

což je vlastně dopředná difference na předchozím intervalu. Ukažte, že centrální difference je průměrem dopředné a zpětné difference.

Řešení:

$$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{1.8 - 1.7}{47 - 27} = 0.005 \text{ kJ kg}^{-1} \text{K}^{-2} = 5 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-2}$$

Table 4–8. Heat capacity of solid wood at selected temperatures and moisture contents

Temperature		Heat capacity (kJ kg ⁻¹ K ⁻¹ (Btu lb ⁻¹ °F ⁻¹))			
(K)	(°C (°F))	Ovendry	5% MC	12% MC	20% MC
280	7 (44)	1.2 (0.28)	1.3 (0.32)	1.5 (0.37)	1.7 (0.41)
290	17 (62)	1.2 (0.29)	1.4 (0.33)	1.6 (0.38)	1.8 (0.43)
300	27 (80)	1.3 (0.30)	1.4 (0.34)	1.7 (0.40)	1.9 (0.45)
320	47 (116)	1.3 (0.32)	1.5 (0.37)	1.8 (0.43)	2.0 (0.49)
340	67 (152)	1.4 (0.34)	1.6 (0.39)	1.9 (0.46)	2.2 (0.52)
360	87 (188)	1.5 (0.36)	1.7 (0.41)	2.0 (0.49)	2.3 (0.56)

Zdroj: Wood handbook

Tato hodnota udává, o kolik vzroste měrná tepelná kapacita dřeva dané teploty a vlhkosti při zvýšení teploty o jeden stupeň Celsia (o jeden Kelvin).

$$\frac{\partial c}{\partial w} = \frac{1.9 - 1.7}{20 - 12} = 0.025 \text{ kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1} (\text{procento MC})^{-1} = 25 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1} (\text{procento MC})^{-1}$$

Tato hodnota udává, o kolik vzroste měrná tepelná kapacita dřeva dané teploty a vlhkosti při zvýšení obsahu vody o jedno procento.

Průměr centrální a zpětné difference:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{2} &= \frac{\frac{f(x)-f(x-h)+f(x+h)-f(x)}{h}}{2} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \end{aligned}$$

1.5 Veličiny z rovnice vedení tepla

V případech, kdy je při tepelné výměně nutno uvažovat vedení tepla (vysoké Biotovo číslo), modelujeme změnu teploty podle rovnice vedení tepla, kterou jsme na přednášce odvodili pro jednorozměrný případ ve tvaru

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Typickým případem vedení tepla v jedné dimenzi je vedení tepla ve stěně.

Uvažujme jednorozměrnou úlohu s vedením tepla. Osa x směřuje doprava, teplota v bodě x a čase t je $T(x, t)$ ve stupních Celsia. Tok tepla v čase t a v bodě x je $q(x, t)$ v joulech za sekundu. Kladný tok je ve směru osy x . Podle Fourierova zákona je

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Tyč má teplotu 0°C , pravý konec udržujeme na této teplotě, levý konec ohříváme na 20°C a udržujeme na této teplotě. Ve zbytku tyče (stěny) se postupně nastolí rovnováha vlivem vedení tepla.

Vyjádřete následující veličiny a určete jejich znaménko.

- a) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času.
- b) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle roste teplota směrem doprava.
- c) Rychlost, jak rychle se klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava.
- d) Rychlost, se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.
- e) Rychlost, se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.

Řešení:

- a) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času je $\frac{\partial T}{\partial t}$ a tato derivace je v každém bodě kladná, protože tyč se ohřívá. Po čase se asi ustálí rovnováha a derivace bude nulová, teplota se přestane měnit. Měříme ve stupních celsia za sekundu. $\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = ^\circ\text{C s}^{-1}$
- b) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle se roste teplota směrem doprava, je $\frac{\partial T}{\partial x}$ a tato derivace je záporná, protože vlevo je horký konec a teplota směrem doprava klesá. Měříme ve stupních celsia na metr. $\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = ^\circ\text{C m}^{-1}$
- c) Rychlost, jak rychle se klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava, je $-\frac{\partial T}{\partial x}$ a tato veličina je kladná, protože vlevo je horký konec a teplota směrem doprava opravdu klesá. Měříme ve stupních celsia na metr. $\left[-\frac{\partial T}{\partial x}\right] = ^\circ\text{C m}^{-1}$
- d) Rychlost, se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy je $\frac{\partial q}{\partial x}$.

Teplo teče doprava a přitom se spotřebovává, protože se ohřívá tyč. Proto tok klesá a parciální derivace je záporná. Měříme v joulech za sekundu na metr. $\left[\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \text{J s}^{-1} \text{ m}^{-1}$

- e) Rychlost, se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy je $-\frac{\partial q}{\partial x}$ a tato veličina je kladná, což plyne z předchozího bodu a z toho, že jsme změnili znaménko. Měříme v joulech za sekundu na metr. $\left[-\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \text{J s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ Tato veličina udává, kolik tepla se za jednotku času ubude v toku na metrovém úseku tyče. Ze zákona zachování energie se toto teplo nemůže “ztratit”, ale použije se na zvýšení teploty, což je vyjádřeno právě v rovnici vedení tepla.

1.6 Okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla

K modelu stěny pomocí rovnice vedení tepla je ještě nutné přidat podmínky související s počátečním stavem (počáteční podmínky) a s chováním na okrajích (okrajové podmínky).

Nechť stěna je na intervalu $x \in [0, L]$, $x = 0$ je vnitřní okraj a $x = L$ je vnější okraj. Výraz $-k \frac{\partial T}{\partial x}$ udává tok tepla ve směru osy x . Tok ve směru osy x má kladné znaménko. Naformulujte okrajové podmínky v následujících scénářích.

- a) Z venku dokonale izolovaná stěna. Na hranici $x = L$ nedochází k toku tepla.
- b) Vnitřní část stěny je udržovaná na kon-

stantní teplotě $T = 23^\circ\text{C}$.

- c) Stěna je zvenku osvětlená a zahřívána Sluncem. Na vnější hranici je konstantní tok tepla směrem do stěny.
- d) Stěna je zvenku ochlazována prouděním vzduchu. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.
- e) Stěna je zevnitř ohřívána prouděním vzduchu od radiátorů. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.

Zpracováno podle Cengel: Mass and heat transfer.

Řešení:

a) $\frac{\partial T}{\partial x}(L) = 0$

b) $T(0) = 23$

c) $-k \frac{\partial T}{\partial x}(L) = -Q$, kde Q je teplo za jednotku času dodané ze Slunce. Jedná se výkon Slunce dopadající na stěnu vynásobený koeficientem absorpce, protože část tepelného výkonu se odráží. Záporné znaménko je proto, že teplo teče do stěny, tj. proti směru osy x .

d) $-k \frac{\partial T}{\partial x}(L) = h(T - T_{\text{okolí}})$, kde h je koeficient přestupu tepla.

e) $-k \frac{\partial T}{\partial x}(0) = h(T_{\text{místnost}} - T)$, kde h je koeficient přestupu tepla. Všimněte si, že poslední dvě podmínky se liší znaménkem u veličiny T . To proto, že v jednom případě je kladný směr toku tepla do materiálu a jednou z materiálu. Pokud chceme mít popis jednotný, nebo nezávislý na zvolené souřadné soustavě, formulujeme podmínky pro tok tepla ven z materiálu. Tento tok získáme tak, že tok tepla vynásobíme skalárně s jednotkovým vektorem směřujícím ven z materiálu kolmo na jeho povrch. V tomto případě by pro tok ze stěny do místnosti bylo $k \frac{\partial T}{\partial x}(0) = h(T - T_{\text{místnost}})$. Tento tok by byl záporný, protože ve skutečnosti teplo uniká z místnosti stěnou ven.

2 Gradient

2.1 Linearizace pocitové teploty

Pocitová teplota W z minulého cvičení má v bodě odpovídajícím teplotě $T = -11^\circ\text{C}$ a rychlosti větru $v = 26 \text{ km hod}^{-1}$ má hodnotu

$$W = -20.2^\circ\text{C}$$

a parciální derivace

$$\frac{\partial W}{\partial v} = -0.163^\circ\text{C hod km}^{-1}$$

a

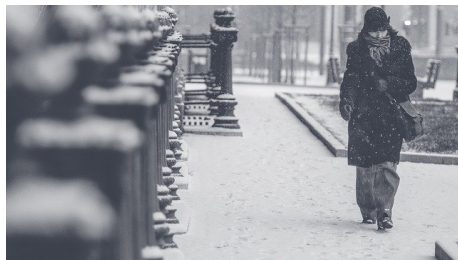
$$\frac{\partial W}{\partial T} = 1.289.$$

Najděte pomocí lineární aproximace vzorec pro pocitovou teplotu v okolí tohoto bodu.

Řešení:

Přímým použitím vzorce pro lineární aproximaci dostáváme

$$\begin{aligned} W &= -20.2 + 1.289(T - (-11)) - 0.163(v - 26) \\ &= -20.2 + 1.289(T + 11) - 0.163(v - 26), \end{aligned}$$



Zdroj: pixabay.com

příčemž všechny veličiny dostazujeme v jednotkách SI (stupně Celsia a kilometry za hodinu).

2.2 Parciální derivace, gradient

Určete gradient funkcí $z = ax^2y - 2xy^2$ a $h = \frac{ax}{y^2} + 5x^3y^2$, kde $a \in \mathbb{R}$ je reálný parametr.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2axy - 2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ax^2 - 4xy$$

$$\nabla z = (2axy - 2y^2, ax^2 - 4xy) = (2axy - 2y^2)\vec{i} + (ax^2 - 4xy)\vec{j}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a}{y^2} + 15x^2y^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = ax(-2)y^{-3} + 10x^3y = -\frac{2ax}{y^3} + 10x^3y$$

$$\nabla h = \left(\frac{a}{y^2} + 15x^2y^2, -\frac{2ax}{y^3} + 10x^3y \right) = \left(\frac{a}{y^2} + 15x^2y^2 \right) \vec{i} + \left(-\frac{2ax}{y^3} + 10x^3y \right) \vec{j}$$

2.3 Gradient funkce s vrstevnicemi ve tvaru kružnic

Určete gradient funkce $z = x^2 + y^2$ a zkontrolujte, že je v každém bodě kolmý ke kružnici se středem v počátku. Využijte toho, že spojnice bodu na kružnici se středem kružnice je kolmá k této kružnici.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$\nabla z = (2x, 2y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

Vektor $(2x, 2y)$ v bodě (x, y) míří směrem od počátku, tj ve směru spojnice se středem a tedy je kolmý k vrstevnici.

2.4 Gradient funkce s paprskovitými vrstevnicemi

Určete gradient funkce $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ a zkontrolujte, že je v každém bodě tečný ke kružnici se středem v počátku. Využijte toho, že tečna je kolmá na poloměr.

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} y \frac{(-1)}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \nabla z &= \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x)\end{aligned}$$

Vektor $(-y, x)$ v bodě (x, y) je kolmý k vektoru (x, y) a míří směrem od počátku, tj. k poloměru. Proto je tečný ke kružnici.

2.5 Tečná rovina atd.

Pro funkci $f(x, y) = x^2 + \frac{x}{y^2} - 6$ najděte

- a) gradient,
- b) gradient v bodě $(2, 1)$,
- c) lineární aproximaci v bodě $(2, 1)$,
- d) tečnou rovinu v bodě $(2, 1)$,
- e) rovnici vrstevnice bodem $(2, 1)$ a rovnici tečny k vrstevnici tímto bodem,
- f) explicitní vyjádření funkce dané v okolí bodu $(2, 1)$ implicitně rovnicí $f(x, y) = 0$,
- g) lineární aproximace v okolí bodu $x = 2$ pro funkci získanou v předchozím bodu.

Řešení:

a) $\nabla f = \left(2x + \frac{1}{y^2}, -2\frac{x}{y^3} \right)$

b) $\nabla f(2, 1) = (5, -4)$

c) $f(x, y) \approx 5(x - 2) - 4(y - 1)$

d) $z = 5(x - 2) - 4(y - 1)$

e) Rovnice vrstevnice je

$$x^2 + \frac{x}{y^2} - 6 = 0$$

a tečna

$$5(x - 2) - 4(y - 1) = 0,$$

tj.

$$5x - 4y - 6 = 0.$$

f) Postupnými úpravami a výběrem správného znaménka po vyřešení kvadratické rov-

nice vzhledem k y dostáváme

$$x^2 + \frac{x}{y^2} - 6 = 0$$

$$\frac{x}{y^2} = 6 - x^2$$

$$y^2 = \frac{x}{6 - x^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{6 - x^2}}$$

g) Z rovnice tečny k vrstevnici

$$5(x - 2) - 4(y - 1) = 0$$

dostáváme

$$y = 1 + \frac{5}{4}(x - 2)$$

a proto

$$\sqrt{\frac{x}{6 - x^2}} \approx 1 + \frac{5}{4}(x - 2)$$

v okolí $x = 2$.

2.6 Linearizace vektorové funkce, Jacobiho matice

Jacobiho matice se používá k linearizaci vektorových funkcí, které mají na vstupu i na výstupu vektor. Jsou to matice, kde gradienty jednotlivých komponent vektorové funkce jsou zapsány do řádků matice.

Najděte Jacobiho matici pro funkci

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 + xy + 6y)\vec{i} + e^{3x}\vec{j}$$

a poté hodnotu této matice v bodě $(0, 0)$.

Řešení:

Platí

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + xy + 6y) = 2x + y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + xy + 6y) = x + 6$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{3x}) = 3e^{3x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{3x}) = 0$$

a proto má Jacobiho matice tvar

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y & x + 6 \\ 3e^{3x} & 0 \end{pmatrix}.$$

V bodě $(0, 0)$ potom

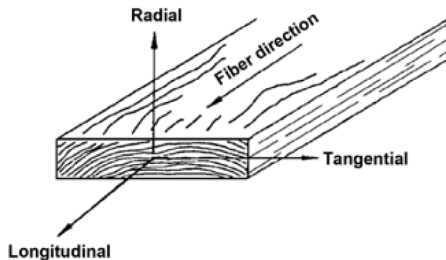
$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.7 Parciální derivace, gradient a násobení matic

Vypočtěte gradient funkce

$$T = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ukažte, že vrstevnice této funkce jsou kružnice se středem v počátku, nakreslete obrázek s těmito vrstevnicemi a vyznačte do tohoto obrázku gradienty v bodech $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$ a $C = (1, 1)$



Zdroj: Wood handbook

Uvažujte součinitel tepelné vodivosti

$$\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a vypočtěte tok tepla v bodech A , B , C . Porovnejte směr tohoto toku se směrem gradientu a vysvětlete svá pozorování. Snaží se matice usměrnit teplo do směru osy x nebo do směru osy y ? Odpovídá situace spíše dřevu s podélným směrem v ose x nebo v ose y ?

Řešení:

Platí

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a ze symetrie

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Odsud

$$\nabla T = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^T = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)^T.$$

Tok tepla je

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$

Dosazením dostáváme $\vec{q}(A) = (0, 3)^T$, $\vec{q}(B) = (2, 0)^T$, $\vec{q}(C) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2, 3)^T$. Porovnáním s gradientem $\nabla T(A) = -(0, 1)^T$, $\nabla T(B) = -(1, 0)^T$ a $\nabla T(C) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ vidíme, že v bodech A a B je tok proti směru gradientu, v bodě C se tok stáčí do směru osy y . Protože ve ose y má dřevo větší vodivost, jedná se o podélný směr. To je ale vlastně vidět už ze zadané matice.

3 Divergence, rovnice vedení tepla

3.1 Divergence vektorového pole

a) Vypočtete divergenci vektorového pole

$$\vec{F} = x^2 y \vec{i} + (x + y^2) \vec{j}.$$

b) Zakreslete do obrázku směr toku vektorového pole v bodě $(2, 1)$.

c) Vypočtete divergenci vektorového pole v bodě $(2, 1)$ a podle toho, zda je kladná nebo záporná rozhodněte, zda tok v daném bodě sílí nebo slábne.

d) Předpokládejme, že dané vektorové pole reprezentuje stacionární tok. Je v bodě $(2, 1)$ zdroj nebo spotřebič?

Řešení:

$$\text{a) } \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2) = 2xy + (0 + 2y) = 2y(x + 1)$$

b) $\vec{F}(2, 1) = 2^2 \cdot 1 \vec{i} + (2 + 1^2) \vec{j} = 4 \vec{i} + 3 \vec{j} = (4, 3)$, tj. vektorové pole teče směrem doprava nahoru směrem daným směrnici 0.75, tj. pod úhlem menším než 45° .

c) $\nabla \cdot \vec{F}(2, 1) = 2 \cdot 1 \cdot (2 + 1) = 6 > 0$. Divergence je kladná a proto se tok zahušťuje.

d) Zdroj (kladná divergence).

3.2 Divergence vektorového pole s parametrem

a) Vypočtete divergenci vektorového pole

$$\vec{F} = ax^3y^2\vec{i} + 3x^2y\vec{j},$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je reálný parametr.

b) Určete hodnotu parametru a tak, aby pole bylo v bodě $(-1, 2)$ nezřídlové, tj. aby mělo nulovou divergenci v bodě $(-1, 2)$.

Řešení:

$$\text{a) } \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^3y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y) = 3ax^2y^2 + 3x^2 = 3x^2(ay^2 + 1)$$

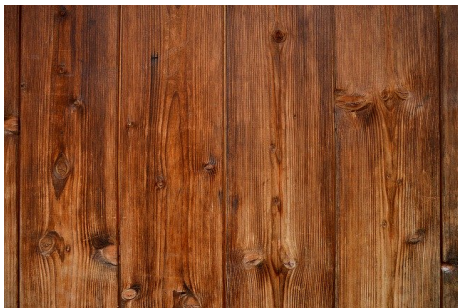
$$\text{b) } \nabla \cdot \vec{F}(-1, 2) = 3(-1)^2(a \cdot 2^2 + 1) = 3(4a + 1) \text{ a } \nabla \cdot \vec{F}(-1, 2) = 0 \text{ pokud } 3(4a + 1) = 0, \\ \text{tj. } a = -\frac{1}{4}.$$

3.3 Rovnice vedení tepla v dvourozměrném materiálu

Teplota ve dvourozměrné desce pro $0 \leq x \leq 10$ a $0 \leq y \leq 10$ zachycené v určitém okamžiku termokamerou je popsána rovnicí

$$T(x, y) = (2x - y)^2 + x^4.$$

Rozměry jsou v centimetrech, teplota ve stupních Celsia. (Formálně to nevychází, ale ke každému členu můžeme dodat konstantu, která jeho rozměr opraví. Pro jednoduchost tuto komplikaci vynecháme.)



Zdroj: pixabay.com

- a) Vypočtete gradient ∇T a tok tepla $-k \cdot \nabla T$. Součinitel tepelné vodivosti (v jednotkách kompatibilních se zadáním) je $k = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.
- b) Určete, zda na levém okraji desky teče teplo dovnitř desky nebo z desky ven.
- c) Vypočtete divergenci toku tepla, tj. $\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T)$.
- d) V desce nejsou zdroje tepla. Ochladuje se deska uprostřed, nebo otepluje?

Řešení:

a) Gradient je vektor složený z parciálních derivací.

$$\nabla T = (4(2x - y) + 4x^3, -2(2x - y))^T$$

Tok je tenzor vodivosti maticově vynásobený s gradientem teploty a faktorem (-1) .

$$-k \cdot \nabla T = - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4(2x - y) + 4x^3 \\ -2(2x - y) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 14(2x - y) + 16x^3 \\ -8(2x - y) + 4x^3 \end{pmatrix}$$

b) Do vztahu pro tok dosadíme rovnici levého okraje desky, tj. $x = 0$.

$$-k \cdot \nabla T(x = 0) = \begin{pmatrix} 14y \\ -8y \end{pmatrix}$$

Na levém okraji desky je $y > 0$ a proto $14y > 0$. Tok míří doprava a teplo teče na tomto okraji do desky.

c) Vypočteme divergenci toku určeného v prvním bodě.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T) &= \frac{\partial}{\partial x}(-14(2x - y) - 16x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(8(2x - y) - 4x^3) \\ &= -48x^2 - 28 - 8 \\ &= -48x^2 - 36\end{aligned}$$

d) Do vztahu pro divergenci dosadíme bod, který nás zajímá.

$$\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T)(x = 5, y = 5) = -1236$$

Tok tepla se zmenšuje a protože jde o stav bez zdrojů, teplo se v daném místě akumuluje a deska se proto otepluje. Z rovnice vedení tepla

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T)$$

plyne v daném bodě

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 1236$$

a můžeme dokonce odhadnout, jak rychle teplota roste.

3.4 Vedení tepla v různých materiálech

- a) Zapište rovnici vedení tepla v trojrozměrném izotropním a v trojrozměrném ortotropním materiálu. Ve druhém případě volte osy ve směru vlastních vektorů.
- b) Napište, jak je možné zjednodušit rovnice z předchozího bodu, pokud jsou materiálové konstanty nezávislé na poloze (homogenní materiál) a na teplotě (lineární materiál).

Řešení:

a) Izotropní: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$

Ortotropní: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right)$

b) Izotropní: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$

Ortotropní: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

4 Rotace, kmenová funkce gradientu

4.1 Rotace vektorového pole v rovině

Vypočtěte rotaci funkce $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2xy\vec{j}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2xy & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} (2xy) - \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \right) \\ &= \vec{k}(2y - 2xy) \\ &= 2y(1 - x)\vec{k}\end{aligned}$$

4.2 Rotace vektorového pole v prostoru

Vypočtěte rotaci funkce $\vec{F} = xyz\vec{i} + 5x^2y\vec{j} - 3x^2z\vec{k}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 5x^2y & -3x^2z \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-3x^2z) - \frac{\partial}{\partial z} (5x^2y) \right] \\ &\quad + \vec{j} \left[\frac{\partial}{\partial z} (xyz) - \frac{\partial}{\partial x} (-3x^2z) \right] \\ &\quad + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} (5x^2y) - \frac{\partial}{\partial y} (xyz) \right) \\ &= (xy + 6xz)\vec{j} + (10xy - xz)\vec{k} \\ &= x(y + 6z)\vec{j} + x(10y - z)\vec{k}\end{aligned}$$

4.3 Divergence a rotace 2D funkce s parametrem

Vypočtěte divergenci a rotaci funkce $\vec{F} = ax^2y^3\vec{i} + (x^2 + y)\vec{j}$.

Řešení:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 2axy^3 + 1$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax^2y^3 & x^2 + y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(2x - 3ax^2y^2)$$

4.4 Nalezení kmenové funkce 1/3

Pro vektorové pole

$$\frac{4}{5}xy^3\vec{i} + \frac{6}{5}x^2y^2\vec{j}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

Řešení:

Platí $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{4}{5}xy^3$ a $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{6}{5}x^2y^2$.

Odsud

$$\varphi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = \int \frac{4}{5}xy^3 dx = \frac{4}{5} \frac{x^2}{2} y^3 = \frac{2}{5}x^2y^3 + C_1(y)$$

a

$$\varphi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = \int \frac{6}{5}x^2y^2 dy = \frac{6}{5}x^2 \frac{y^3}{3} = \frac{2}{5}x^2y^3 + C_2(x).$$

Porovnáním musí být $C_1(y) = C_2(x) = C \in \mathbb{R}$ a

$$\varphi(x, y) = \frac{2}{5}x^2y^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4.5 Nalezení kmenové funkce 2/3

Pro vektorové pole

$$\left(x^2 + \frac{4}{5}xy^3\right) \vec{i} + \left(\frac{6}{5}x^2y^2 + y\right) \vec{j}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

Řešení:

$$\text{Platí } \frac{\partial\varphi}{\partial x} = x^2 + \frac{4}{5}xy^3 \text{ a } \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{6}{5}x^2y^2 + y.$$

Odsud

$$\varphi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = \int x^2 + \frac{4}{5}xy^3 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} \frac{x^2}{2} y^3 = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^2y^3 + C_1(y)$$

a

$$\varphi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = \int \frac{6}{5}x^2y^2 + y dy = \frac{6}{5}x^2 \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{5}x^2y^3 + \frac{1}{2}y^2 + C_2(x).$$

Porovnáním musí být $C_1(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$ a $C_2(x) = \frac{x^3}{3} + C$, $C \in \mathbb{R}$ a

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2y^3 + \frac{1}{2}y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4.6 Nalezení kmenové funkce 3/3

Pro vektorové pole

$$\left(y + \frac{4}{5}xy^3\right) \vec{i} + \left(\frac{6}{5}x^2y^2 + x^2\right) \vec{j}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

Řešení:

$$\text{Platí } \frac{\partial\varphi}{\partial x} = y + \frac{4}{5}xy^3 \text{ a } \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{6}{5}x^2y^2 + x^2.$$

Odsud

$$\varphi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = \int y + \frac{4}{5}xy^3 dx = xy + \frac{4}{5} \frac{x^2}{2} y^3 = xy + \frac{2}{5}x^2y^3 + C_1(y)$$

a

$$\varphi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = \int \frac{6}{5}x^2y^2 + x^2 dy = \frac{2}{5}x^2 \frac{y^3}{3} + x^2y = \frac{2}{5}x^2y^3 + x^2y + C_2(x).$$

Porovnáním musí být

$$xy + C_1(y) = x^2y + C_2(x),$$

což není možné splnit.

Ověříme, že parciální derivace $\frac{\partial}{\partial y} \left(y + \frac{4}{5}xy^3 \right)$ a $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5}x^2y^2 + x^2 \right)$ jsou různé. Platí

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(y + \frac{4}{5}xy^3 \right) = 1 + \frac{12}{5}xy^2$$

a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5}x^2y^2 + x^2 \right) = \frac{12}{5}xy^2 + 2x$$

a protože obě parciální derivace jsou různé, kmenová funkce neexistuje.

5 Křivkové integrály

5.1 Křivkový integrál druhého druhu po třech různých křivkách

Vypočtěte

$$\int_{C_i} \vec{F} d\vec{r}$$

pro vektorové pole

$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

po třech různých křivkách C_1 , C_2 a C_3 .

$$C_1: \vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$C_2: \vec{r} = (1-t)\vec{i} + t\vec{j}, \quad t \in [0, 1]$$

$$C_3: \vec{r} = (1-t^2)\vec{i} + t\vec{j}, \quad t \in [0, 1]$$

Tj. počítáme

$$\int_{C_i} -y dx + x dy$$

po třech zadaných křivkách C_1 , C_2 a C_3 .

Řešení:

Vektory budeme pro stručnost zapisovat jako uspořádané dvojice.

Křivka C_1 . Derivací křivky $\vec{r} = (\cos(t), \sin(t))$ podle t dostáváme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\sin t, \cos t).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Odsud formálně

$$\vec{F} d\vec{r} = 1 dt$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2},$$

kde poslední Riemannův integrál není nutné počítat, protože integrál z jedničky je délka intervalu, přes který se integruje.

Křivka C_2 . Derivací křivky $\vec{r} = (1 - t, t)$ podle t dostáváme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-1, 1).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-t, 1 - t).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = (-t, 1 - t) \cdot (-1, 1) = (-t)(-1) + (1 - t) \cdot 1 = 1.$$

Odsud formálně

$$\vec{F} d\vec{r} = 1 dt$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 1 dt = 1,$$

kde ani v tomto případě poslední Riemannův integrál není nutné počítat, protože integrál z jedničky je délka intervalu, přes který se integruje.

Křivka C_3 . Derivací křivky $\vec{r} = (1 - t^2, t)$ podle t dostáváme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-2t, 1).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-t, 1 - t^2).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = (-t, 1 - t^2) \cdot (-2t, 1) = (-t)(-2t) + (1 - t^2) \cdot 1 = t^2 + 1.$$

Odsud formálně

$$\vec{F} d\vec{r} = (t^2 + 1) dt$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \left[\frac{1}{3} t^3 + t \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}.$$

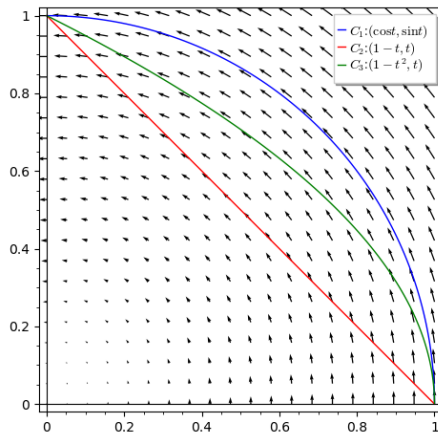
Interpretace jako práce, srovnání.

Všechny křivky jsou z bodu $[1,0]$ do bodu $[0,1]$. Nejblíže k počátku je úsečka C_2 , nejdále je čvrtkružnice C_1 , křivka C_3 je mezi nimi.

Integrál fyzikálně znamená práci vektorového pole $(-y, x)$ po zadané křivce. Toto vektorové pole míří po kružnicích okolo počátku proti směru hodinových ručiček. Délka vektoru je rovna vzdálenosti od počátku.

Křivka C_1 je nejdále od počátku a vektorové pole je na ní nejsilnější. Navíc v každém bodě je síla ve směru křivky a proto se projeví ve výsledném příspěvku bez redukování. Díky tomu můžeme integrál po kružnici počítat stejně

jako práci na přímce, tj. součinem délky křivky $\frac{\pi}{2}$ a velikosti síly $|\vec{F}| = 1$. Po dalších křivkách je síla menší (křivky jdou blíže ke středu) a navíc se neuplatní celá velikost síly, protože síla svírá s křivkou nenulový úhel a při práci se projeví pouze tečná komponenta.



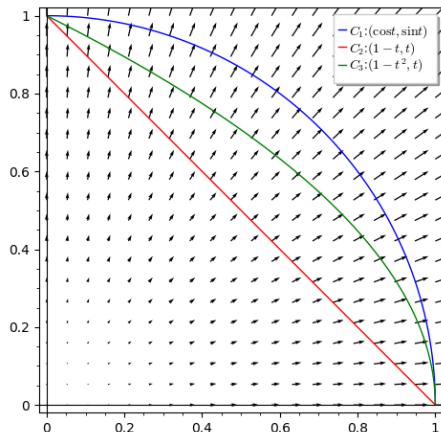
Zdroj: vlastní

Interpretace jako tok, srovnání.

Všechny křivky jsou z bodu $[1, 0]$ do bodu $[0, 1]$. Nejbližší k počátku je úsečka C_2 , nejdále je čvrtkružnice C_1 , část paraboly C_2 je mezi nimi.

Integrál fyzikálně znamená tok vektorového pole (x, y) křivkou. Toto vektorové pole míří směrem z počátku a zesiluje směrem od počátku, protože délka vektoru je rovna vzdálenosti od počátku.

Proto je hodnota po křivce nejbližší počátku nejmenší atd. Na křivce C_1 (kružnice) je tok v každém bodě kolmý ke křivce a stejně velký a proto je celkový tok snadné určit jako součin velikosti vektorového pole na křivce ($|\vec{F}|=1$) a délky křivky $\frac{\pi}{2}$.



Zdroj: vlastní

5.2 Křivkový integrál druhého druhu po parabole

Vypočtěte

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

pro vektorové pole

$$\vec{F} = x^2 \vec{i} + (x + y) \vec{j}$$

po části paraboly

$$C: \vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad t \in [0, 1]$$

tj. počítáme

$$\int_C x^2 dx + (x + y) dy$$

po zadané křivce C .

Řešení:

Vektory budeme pro stručnost zapisovat jako uspořádané dvojice.

Derivací křivky $\vec{r} = (t, t^2)$ podle t dostáváme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 2t).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (t^2, t + t^2).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 2t) \cdot (t^2, t + t^2) = 1 \cdot t^2 + 2t \cdot (t + t^2) = 3t^2 + 2t^3.$$

Odsud formálně

$$\vec{F} d\vec{r} = (3t^2 + 2t^3) dt$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 (3t^2 + 2t^3) dt = \left[t^3 + \frac{1}{2} t^4 \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

5.3 Křivkový integrál druhého druhu po kubické parabole

Vypočtěte

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

pro vektorové pole

$$\vec{F} = 2y\vec{i} + x^2y\vec{j}$$

po části kubické paraboly

$$C: \vec{r} = t\vec{i} + t^3\vec{j}, \quad t \in [0, 1],$$

tj. počítáme

$$\int_C 2y dx + x^2y dy$$

po zadané křivce C .

Řešení:

Vektory budeme pro stručnost zapisovat jako uspořádané dvojice.

Derivací křivky $\vec{r} = (t, t^3)$ podle t dostáváme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 3t^2).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (2t^3, t^2t^3) = (2t^3, t^5).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 3t^2) \cdot (2t^3, t^5) = 1 \cdot 2t^3 + 3t^2 \cdot t^5 = 2t^3 + 3t^7.$$

Odsud formálně

$$\vec{F} d\vec{r} = (2t^3 + 3t^7) dt$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 (2t^3 + 3t^7) dt = \left[\frac{1}{2} t^4 + \frac{3}{8} t^8 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - 0 = \frac{7}{8}.$$

5.4 Tok vektorového pole uzavřenou křivkou

Vypočtěte tok vektorového pole

$$\vec{\Phi}_1 = (x + 2)\vec{i}$$

jednotkovou kružnicí se středem v počátku orientovanou proti směru hodinových ručiček, tj.

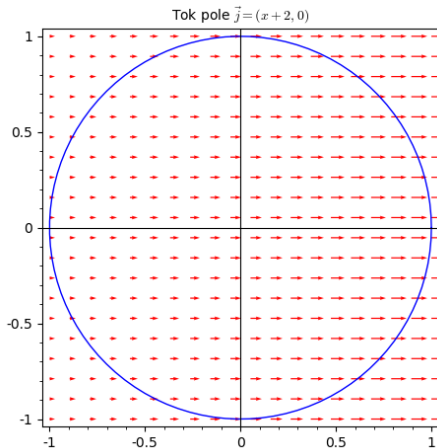
$$C: \vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Návod:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$$

a tento integrál je možno najít například grafickou cestou.

Řešení: Vektorové pole teče směrem doprava a směrem doprava i zesiluje. Dá se čekat, že tok ven pravou polovinou kružnice bude větší než tok dovnitř levou polovinou kružnice a celkový tok bude nenulový.



Zdroj: vlastní

Vektorové pole je

$$\vec{\Phi}_1 = (x + 2, 0)$$

a pro výpočet toku musíme integrovat křivkovým integrálem druhého druhu vektorové pole

$$\vec{F} = (0, x + 2).$$

Vskutku, tok vektorového pole zadaného v komponentách $\Phi_1 = (P, Q)$ je vyjádřen integrálem druhého druhu vektorového pole $\vec{F} = (-Q, P)$ a v našem případě je $P = x + 2$ a $Q = 0$. Derivací rovnice křivky obdržíme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Rovnice vektorového pole $\vec{F}$ podél křivky C má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (0, 2 + \cos t).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t) \cdot (0, 2 + \cos(t)) = 2 \cos t + \cos^2 t.$$

Odsud formálně

$$\vec{F} d\vec{r} = (2 \cos t + \cos^2 t) dt$$

a integrál má tvar

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (2 \cos t + \cos^2 t) dt = \pi,$$

kde poslední Riemannův integrál není nutné počítat, protože integrál z první části je nulový díky geometrické interpretaci integrálu a periodicitě funkce $\cos t$ a integrál z druhého sčítance byl součástí zadání.

5.5 Tok vektorového pole uzavřenou křivkou

Vypočtěte tok vektorového pole

$$\vec{\Phi}_2 = (y + 2)\vec{i}$$

jednotkovou kružnicí se středem v počátku orientovanou proti směru hodinových ručiček, tj.

$$C: \vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

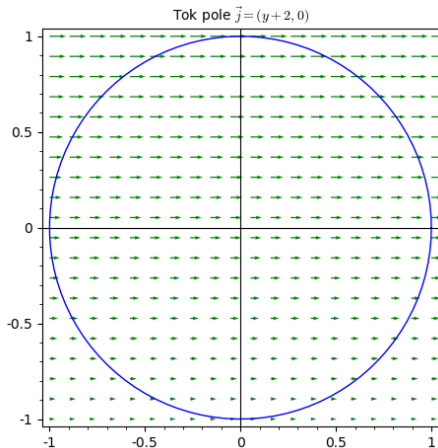
Návod:

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = 0$$

Řešení: Vektorové pole teče směrem doprava. Kromě toho zesiluje směrem nahoru. Dá se čekat, že tok ven pravou polovinou kružnice bude v každý výšce stejný jako tok dovnitř levou polovinou kružnice a celkový tok bude nulový.

Vektorové pole je

$$\vec{\Phi}_2 = (y + 2, 0)$$



Zdroj: vlastní

a pro výpočet toku musíme integrovat křivkovým integrálem druhého druhu vektorové pole

$$\vec{F} = (0, y + 2).$$

Vskutku, tok vektorového pole zadaného v komponentách $\Phi_2 = (P, Q)$ je vyjádřen integrálem druhého druhu vektorového pole $\vec{F} = (-Q, P)$ a v našem případě je $P = y + 2$ a $Q = 0$. Derivací rovnice křivky obdržíme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Rovnice vektorového pole $\vec{F}$ podél křivky C má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (0, 2 + \sin t).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t) \cdot (0, 2 + \sin(t)) = 2 \cos t + \cos t \sin t.$$

Odsud formálně

$$\vec{F} d\vec{r} = (2 \cos t + \cos t \sin t) dt$$

a integrál má tvar

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (2 \cos t + \cos t \sin t) dt.$$

Integrál z prvního sčítance můžeme vypočítat pomocí primitivní funkce

$$\int_0^{2\pi} 2 \cos x \, dx = [2 \sin x]_0^{2\pi} = 2 \sin(2\pi) - 2 \sin 0 = 0$$

a integrál z druhého sčítance je nulový, proto je nulový i celý integrál.

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = 0$$

6 Dvojn  integrály

6.1 Integrál přes obdélník

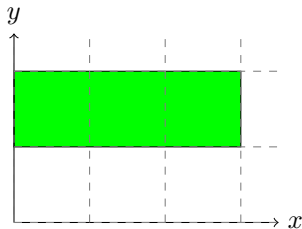
Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$$

přes obdélník

$$0 \leq x \leq 3$$

$$1 \leq y \leq 2.$$



Řešení:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xy^2 dx dy &= \int_0^3 x dx \int_1^2 y^2 dy \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 \times \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{9}{2} - 0 \right] \times \left[\frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{3} \right] = \frac{9}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

6.2 Kvadratický moment pro obdélník

Vypočtete integrál

$$\iint_{\Omega} y^2 \, dx dy,$$

přes obdélník se stranami podél os, se středem v počátku a délkou stran a a b , tj. přes množinu Ω danou nerovnostmi

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} &\leq x \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{b}{2} &\leq y \leq \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\iint_{\Omega} y^2 \, dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \times \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \, dy = a \times \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = a \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8} \right) = \frac{1}{12} ab^3$$

6.3 Integrál závislý na parametru

Vypočtěte dvojný integrál

$$I_n = \iint_{\Omega} y^n dx dy$$

přes jednotkový čtverec

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1$$

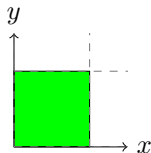
v závislosti na parametru $n \geq 0$.

Řešení:

$$\iint_{\Omega} y^n dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 y^n dy = 1 \times \left[\frac{1}{n+1} y^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Správnost můžeme ověřit pomocí vzorců pro obsah

$$I_0 = 1$$



a polohu težiště

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{2},$$

což porovnáme s očekávanými výsledky. Dalším využitím je působíště tlakové síly na přehradu (viz přednáška), které je při orientaci osy y od hladiny směrem dolů v místě

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

tj. ve dvou třetinách hloubky.

6.4 Integrál přes trojúhelník

Vypočtěte integrál

$$\iint_{\Omega} xy^2 \, dx dy$$

přes trojúhelník Ω s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$.

Řešení:

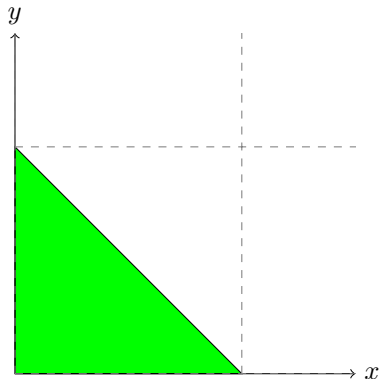
Rovnice přímky, ve které leží přepona trojúhelníka, je

$$y = 1 - x$$

a trojúhelník tedy je možno zapsat soustavou nerovností

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq 1 - x. \end{aligned}$$

Použitím těchto nerovností můžeme dvojný integrál transformovat na dvojnásobný a



vypočítat.

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} xy^2 \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy^2 \, dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x(1-x)^3 \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x - 3x^2 + 3x^3 - x^4 \, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} x^2 - x^3 + \frac{3}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{60}\end{aligned}$$

6.5 Integrál pod parabolou

Vypočtěte integrály

$$I_1 = \iint_{\Omega} x \, dx dy,$$

$$I_2 = \iint_{\Omega} y \, dx dy,$$

$$I_3 = \iint_{\Omega} dx dy,$$

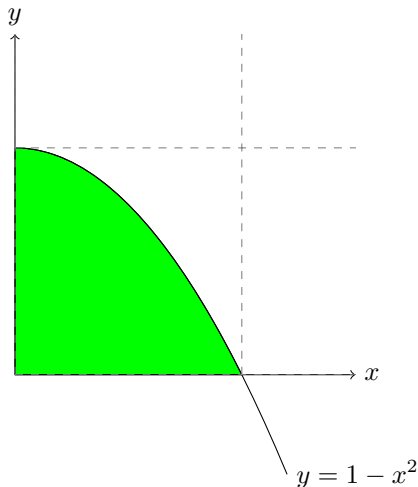
přes množinu Ω danou nerovnostmi

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Určete obsah a polohu těžiště této množiny.

Řešení:



$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} x \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x \, dy dx = \int_0^1 [xy]_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 x(1-x^2) dx = \int_0^1 x - x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} y \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} y \, dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right] = \frac{4}{15}\end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} dy dx = \int_0^1 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Obsah je $\frac{2}{3}$ a souřadnice těžiště jsou $\left[\frac{3}{8}, \frac{4}{10} \right]$. Toto je možné porovnat s obsahem a souřadnicemi těžiště trojúhelníka, který vznikne nahrazením paraboly přímkou a tento trojúhelník má obsah $\frac{1}{2}$ a souřadnice těžiště $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$.

6.6 Integrál přes čtvrtkružnici

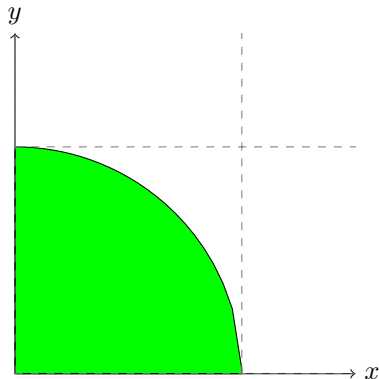
Vypočtěte integrály

$$I_1 = \iint_{\Omega} x \, dx dy,$$

$$I_2 = \iint_{\Omega} y \, dx dy,$$

$$I_3 = \iint_{\Omega} dx dy,$$

přes čtvrtkružnici na obrázku (čtvrtina jednotkové kružnice v prvním kvadrantu). Určete obsah a polohu těžiště této čtvrtkružnice.



Řešení:

V polárních souřadnicích daných rovnicemi

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

má čtvrtkružnice vyjádření $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} x \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi \times r \, d\varphi dr = \int_0^1 r^2 \, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \times [\sin \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} y \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \varphi \times r \, d\varphi dr = \int_0^1 r^2 \, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \times [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times r \, d\varphi dr = \int_0^1 r \, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 \times \pi 2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Obsah je $\frac{\pi}{4}$, což odpovídá čtvrtině vzorce pro obsah jednotkového kruhu. Souřadnice

těžiště jsou obě stejné, což odpovídá symetrii množiny. Tyto souřadnice leží v bodě

$$\frac{4}{3\pi} \approx 0.42,$$

což odpovídá tomu, že těžiště je posunuto doprava nahoru ve srovnání těžištěm trojúhelníka, který by vznikl nahrazením oblouku úsečkou.

6.7 Kvadratický moment kruhu

Vypočtěte kvadratický moment kruhu o polooměru R vzhledem k ose procházející středem.

Řešení:

Vypočteme kvadratický moment kruhu daného v polárních souřadnicích nerovnicemi

$$\begin{aligned}0 &\leq r \leq R, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi.\end{aligned}$$

Přímým výpočtem dostáváme

$$\iint_{\Omega} y^2 \, dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \varphi \times r \, d\varphi dr = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \pi = \frac{\pi}{4} R^4,$$

kde při výpočtu integrálu přes proměnnou φ využijeme nápovědu, kterou jsme měli již v sadě úloh s křivkovým integrálem.

Že je výsledkem veličina úměrná čtvrté mocnině poloměru je zřejmé i z rozměrové analýzy (resp. z Buckinghamova Π teorému), uvedeným výpočtem však vidíme i konstantu úměrnosti.

To že kvadratický moment roste se čtvrtou mocninou poloměru značí, že snížení průměru tyče na polovinu vede k redukci tuhosti na přibližně $(0.5)^4$ tj. na šest procent. Devadesát šest procent tuhosti je v materiálu, který se při tomto odstraní. Proto jsou trubky při stejné spotřebě materiálu odolnější vůči ohnutí než tyče. Proto mají listy rostlin nebo listy vrtulí větrných elektráren materiál odpovídající za tuhost na povrchu. Proto máme kosti duté.

7 Křivkový integrál pomocí potenciálu, Greenova věta, rovnice kontinuity

7.1 Křivkový integrál pomocí kmenové funkce

Určete, pro jakou hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ křivkový integrál vektorového pole

$$\vec{F} = ax^2y\vec{i} + (x^3 + 1)\vec{j}$$

po křivce C , tj.

$$\int_C ax^2y \, dx + (x^3 + 1) \, dy$$

nezávisí na integrační cestě v $\mathbb{R}^2$. Najděte kmenovou funkci příslušného vektorového pole a vypočtěte křivkový integrál po křivce z bodu $[0, 0]$ do bodu $[1, 2]$.

Řešení:

Podmínka pro nezávislost na integrační cestě je

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax^2y & x^3 + 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 1) - \frac{\partial}{\partial y}(ax^2y) \right) = \vec{k}(3x^2 - ax^2y) = \vec{k}x^2(3 - a) \end{aligned}$$

a odsud $a = 3$. Totéž dokážeme určit pomocí věty, kterou jsme se ukázali již v souvislosti s pojmem gradient, ze které vyplývá podmínka na existenci kmenové funkce ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial y}(ax^2y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 1)$$

$$ax^2 = 3x^2$$

$$a = 3$$

Kmenová funkce $\varphi(x, y)$ vektorového pole $\vec{F} = (3x^2y, x^3 + 1)$ splňuje

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2y$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^3 + 1.$$

Integrací dostáváme

$$\varphi = \int 3x^2y \, dx = x^3y + C_1(y)$$

$$\varphi = \int x^3 + 1 \, dy = x^3y + y + C_2(x)$$

Porovnáním dostáváme kmenovou funkci

$$\varphi(x, y) = x^3y + y + C,$$

kde C je integrační konstanta. Integrál po křivce (tvar není důležitý, vzhledem k nezávislosti na integrační cestě stačí počáteční a koncový bod) je

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \varphi(1, 2) - \varphi(0, 0) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

7.2 Křivkový integrál pomocí kmenové funkce 2

Pro jakou hodnotu parametru m je křivkový integrál

$$\int (6x^2y + x + y) dx + (mx^3 + x) dy$$

nezávislý na integrační cestě v $\mathbb{R}^2$? Vypočtete hodnotu tohoto integrálu po křivce z bodu $(2, 1)$ do bodu $(1, 3)$.

Řešení:

Podmínka pro nezávislost na integrační cestě je

$$\frac{\partial}{\partial y}(6x^2y + x + y) = \frac{\partial}{\partial x}(mx^3 + x).$$

Po výpočtu derivací dostáváme

$$6x^2 + 1 = 3mx^2 + 1$$

a odsud $m = 2$.

Hledáme funkci, jejímž gradientem je vektorové pole $\vec{F} = (6x^2y+x+y, 2x^3+x)$. Integrací podle x a podle y dostáváme

$$\int (6x^2y + x + y) \, dx = 2x^3y + \frac{1}{2}x^2 + xy + C_1(y)$$

a

$$\int (2x^3 + x) \, dy = 2x^3y + xy + C_2(x).$$

Porovnáním získáme kmenovou funkci

$$\varphi(x, y) = 2x^3y + \frac{1}{2}x^2 + xy + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Integrál po křivce z bodu $(2, 1)$ do bodu $(1, 3)$ má hodnotu

$$\varphi(1, 3) - \varphi(2, 1) = 6 + \frac{1}{2} + 3 - (16 + 2 + 2) = -\frac{21}{2}.$$

7.3 Kmenová funkce pomocí křivkového integrálu

Ukažte, že vektorové pole $\vec{F} = (6x^2y + x + y, 2x^3 + x)$ má kmenovou funkci. Vypočtěte z definice křivkový integrál v tomto vektorovém poli po křivce $\vec{r}(t) = (at, bt)$, $t \in [0, 1]$, tj. po úsečce z počátku do bodu (a, b) a ukažte, že tímto způsobem obdržíme kmenovou funkci.

Řešení: Platí

$$\frac{\partial}{\partial y}(6x^2y + x + y) = 6x^2 + 1 = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + x)$$

a proto kmenová funkce existuje.

Derivací křivky dostáváme rovnici tečného vektoru

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (a, b)$$

a dosazením křivky do vektorového pole

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (6a^2t^2bt + at + bt, 2a^3t^3 + at) = (6a^2bt^3 + at + bt, 2a^3t^3 + at).$$

Skalární součin je daný vztahem

$$\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = a(6a^2bt^3 + at + bt) + b(2a^3t^3 + at) = 8a^3bt^3 + a^2t + 2abt.$$

Křivkový integrál je tedy roven

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_0^1 8a^3bt^3 + a^2t + 2abt \, dt = \left[2a^3bt^4 + \frac{1}{2}a^2t^2 + abt^2 \right]_0^1 = 2a^3b + \frac{1}{2}a^2 + ab.$$

Podle věty o nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě máme

$$\varphi(a, b) - \varphi(0, 0) = 2a^3b + \frac{1}{2}a^2 + ab$$

a odsud

$$\varphi(a, b) = 2a^3b + \frac{1}{2}a^2 + ab + \varphi(0, 0),$$

neboli (po přejmenování proměnných a zavedení konstanty C místo $\varphi(0, 0)$)

$$\varphi(x, y) = 2x^3y + \frac{1}{2}x^2 + xy + C.$$

7.4 Greenova věta

Určete integrál

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r}$$

po křivce, která je kladně orientovanou hranicí jednotkového čtverce s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ pro vektorovou funkci

$$\vec{F} = x^7 \vec{i} + xy \vec{j}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{r} &= \oint_C x^7 \, \mathrm{d}x + xy \, \mathrm{d}y \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^7) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 y \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
 &= \int_0^1 y \, \mathrm{d}y \times \int_0^1 \mathrm{d}x \\
 &= \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 \times 1 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

7.5 Rovnice vedení tepla v materiálech různých vlastností

Rovnice vedení tepla v ortotropním materiálu umístěném do souřadné soustavy tak, aby vlastní směry tenzoru tepelné vodivosti (jako např. anatomické směry dřeva) má nejobecnější možné vyjádření

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

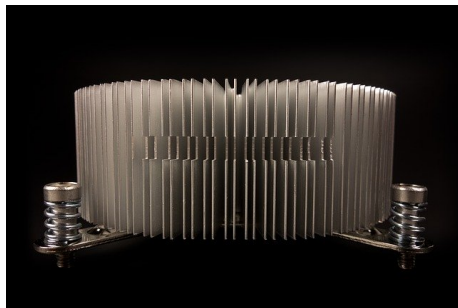
Za jakých okolností je možno veličiny λ_x a λ_y napsat před vnější derivaci tak, aby v rovnici vznikly druhé derivace?

Řešení:

V případě, že tyto veličiny nezávisí na poloze. Materiál tedy musí být homogenní. Závislost na poloze nesmí být ani zprostředkována přes teplotu. Tyto veličiny tedy nesmí být ani funkcemi teploty. Jinými slovy, konstanta úměrnosti ve Fourierově zákoně se nesmí měnit s teplotou, vztah z Fourierova zákona musí být opřesněn lineární a takové materiály se nazývají materiály s lineární materiálovou odezvou (zkráceně lineární materiály). Veličiny λ_x a λ_y se dají napsat před vnější derivace pouze pokud je materiál homogenní a lineární.

7.6 Stacionární vedení tepla v žebrech chladiče

Vyjímečně jsme nuceni do rovnice vedení tepla zahrnout i zdroje. Modelujte vedení tepla v žebrech chladiče. Úlohu uvažujte jako jedno-rozměrnou, materiál homogenní izotropní s konstantní tepelnou vodivostí. Kolem chladiče proudí vzduch a teplotě T_0 a chladič ztrácí teplo rychlostí úměrnou rozdílu teploty žebra v daném místě a teploty okolního vzduchu. (Koeficient úměrnosti je dán koeficient přestupu tepla a šířkou žebra). Uvažujte stacionární děj.



Zdroj: pixabay.com

Řešení:

$$0 = -h(T - T_0) + \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)$$

Ke stejnému závěru je možné dojít i přesnou analýzou ve 3D, viz Cengel, Heat transfer, kapitola 3–6 Heat transfer from finned surfaces.

8 Diferenciální rovnice I

8.1 Model růstu úměrného velikosti chybějícího množství

Mnoho živočichů roste tak, že mohou dorůstat jisté maximální délky a rychlost jejich růstu je úměrná délce, která jim do této maximální délky chybí (tj. kolik ještě musí do této maximální délky dorůst). Sestavte matematický model popisující takovýto růst (von Bertalanffy growth model).

Jakmile vidíme, že v zadání figuruje rychlost změny veličiny, která nás zajímá, je jasné, že kvantitativní model bude obsahovat derivaci. Zatím se učíme model zapsat, později ho budeme umět i vyřešit.



Zdroj: pixabay.com

Řešení: Je-li L délka a $L_{\max}$ maximální délka, potom do maximální délky chybí $L_{\max} - L$ a model má tvar

$$\frac{dL}{dt} = k (L_{\max} - L).$$

8.2 Kontaminace a čištění

Znečišťující látky se v kontaminované oblasti rozkládají tak, že za den se samovolně rozloží 8% aktuálního znečištění. Kromě toho pracovníci odstraňují látky rychlostí 30 galonů denně. Vyjádřete tento proces kvantitativně pomocí vhodného modelu.

Tento příklad opět zmiňuje rychlost změny, tj. derivaci. Tentokrát se na změně podílejí dva procesy a jejich účinek se počítá. Příklad navíc připomíná, jak se pracuje se změnou vyjádřenou procenty. Toto je používané například při úročení spojitým úrokem. Pokud pokles změníme na růst, tj. pokud změníme znaménka u derivace, máme okamžitě model růstu financí na účtu, na kterém se pravidelně připisuje úrok a k tomu se přidává fixní úložka.



Zdroj: pixabay.com

Řešení: Je-li y znečištění v galonech a t čas ve dnech, má model tvar

$$\frac{dy}{dt} = -0.08y - 30.$$

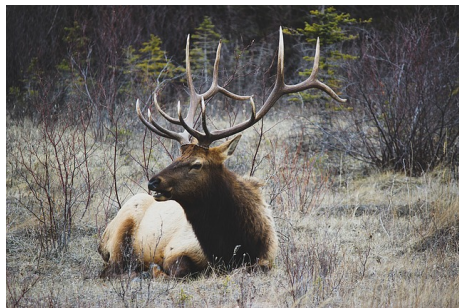
8.3 Populace jelenů

Populace jelenů v národním parku přibývá rychlostí 10% za rok. Správa parku každý rok odebere 50 jedinců. Napište matematický model pro velikost populace jelenů v tomto parku.

Řešení: Je-li x velikost populace jelenů, platí

$$\frac{dx}{dt} = 0.10x - 50,$$

kde t je čas v letech.



Zdroj: pixabay.com, autor Free-Photos

8.4 Hrubý model chřipkové epidemie

Rychlost s jakou roste počet nemocných chřipkou je úměrný současně počtu nemocných a počtu zdravých jedinců. Sestavte model takového šíření chřipky.

Toto je současně model popisující šíření informace v populaci, stačí si místo chřipky představit nějakou informaci předávanou mezi lidmi (sociální difuze).

Řešení: Je-li M velikost populace a y počet nemocných, je v populaci $M - y$ zdravých a model má tvar

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y).$$

8.5 Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

Řešení: Je-li r poloměr, je r^2 druhá mocnina a protože se jedná o nepřímo úměrnost, platí

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{r^2}.$$



Zdroj: pixabay.com

8.6 Model učení

Rychlost učení (tj. časová změna objemu osvojené látky nebo procento z maximální manuální zručnosti) je úměrná objemu dosud nenaučené látky. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

Porovnejte s příkladem 8.1.

Řešení: Je-li L objem naučené látky a $L_{\max}$ maximální objem látky kterou je možné se naučit, je objem dosud nenaučené látky $L_{\max} - L$ a model má tvar

$$\frac{dL}{dt} = k (L_{\max} - L).$$

8.7 Řešení ODE a IVP

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = xy^2$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = te^y$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$$

$$(5) \quad \frac{dr}{dt} = kr^3, \quad r(0) = r_0 > 0$$

$$(6) \quad \frac{dm}{dt} = m + 2, \quad m(0) = 0$$

$$(7) \quad \frac{dm}{dt} = m + 2, \quad m(0) = -2$$

Umění najít řešení diferenciální rovnice je sympatické, není to však nic proti umění sestavit model (naučili jsme se již ve druhém týdnu, připomeneme si v následujícím modelu), umění posoudit jednoznačnost řešení (většina modelů se řeší numericky a musíme být přesvědčeni o smysluplnosti takové činnosti) a stabilitu řešení (řešení, která nejsou stabilní, jsou sice v souladu s přírodními zákony, ale pravděpodobnost jejich spontánního výskytu je nulová). Jednoznačnost a zjednodušenou verzi stability řešení (stabilita konstantních řešení) jsme viděli na přednášce a připomeneme v dalších příkladech.

Řešení:

$$(1) \frac{dy}{dx} = x \cdot y^2$$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$y^2 = 0,$$

tj. je jediné konstantní řešení

$$y = 0.$$

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

$$y^{-2}dy = xdx$$

a integrováním

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$(2) \frac{dy}{dt} = t \cdot e^y$$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$e^y = 0.$$

Protože tato rovnice nemá řešení, zadaná diferenciální rovnice nemá konstantní řešení.

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

$$e^{-y}dy = tdt$$

a integrováním

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = x \cdot \sqrt{y}$$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$\sqrt{y} = 0,$$

tj. jediné řešení

$$y = 0.$$

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

$$\frac{1}{\sqrt{y}}dy = xdx$$

a integrováním

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$$

- Konstantní řešení

$$y = 0$$

(viz předchozí příklad) nesplňuje počáteční podmínku a proto jej nemusíme uvažovat

- Obecné řešení

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

dává po dosazení $x = 0$ a $y = 1$ rovnici

$$2\sqrt{1} = 0 + C.$$

Odsud dostáváme $C = 2$ a řešení zadané počáteční úlohy je

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 2.$$

$$(5) \quad \frac{dr}{dt} = k \cdot r^3, \quad r(0) = r_0 > 0$$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$r^3 = 0,$$

tj. jediné konstantní řešení je

$$r = 0$$

a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

$$r^{-3}dr = kdt$$

a integrováním

$$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt + C.$$

Dosazením počáteční podmínky $t = 0$, $r = r_0$ dostáváme

$$-\frac{1}{2}r_0^{-2} = C.$$

Tím je dána konstanta C a po použití této konstanty v obecném řešení dostáváme řešení počáteční úlohy ve tvaru

$$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt - \frac{1}{2}r_0^{-2}.$$

$$(6) \quad \frac{dm}{dt} = m + 2, \quad m(0) = 0$$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$m + 2 = 0,$$

tj.

$$m = -2$$

a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

$$\frac{1}{m+2}dm = dt$$

a integrováním

$$\ln|m+2|=t+C.$$

Po dosazení počáteční podmínky $t=m=0$ dostáváme

$$C=\ln 2$$

a počáteční úloha má řešení

$$\ln(m+2)=t+\ln(2).$$

(Vzhledem k počáteční podmínce je m kladné a nemusíme psát absolutní hodnotu.)

$$(7) \quad \frac{dm}{dt}=m+2, \quad m(0)=-2$$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$m+2=0, .$$

tj.

$$m=-2.$$

Toto řešení splňuje počáteční podmínku.

- Pravá strana má ohraničenou (dokonce konstantní) derivaci podle m . Proto je řešení každé počáteční úlohy určeno jednoznačně. Řešení z předchozího bodu je jediné a další nemusíme hledat.

8.8 Tloušťka ledu

Takzvaný Stefanův zákon (J. Stefan, Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere, 1891) vyjadřuje že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu a najděte řešení vzniklé diferenciální rovnice.



Zdroj: pixabay.com

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= -\frac{k}{h} \\ h \, dh &= -k \, dt \\ \int h \, dh &= \int -k \, dt \\ \frac{h^2}{2} &= -kt + C\end{aligned}$$

8.9 Model vypouštění nádrže

Z fyziky je známo, že rychlost s jakou vytéká tekutina otvorem u dna nádoby je úměrná odmocnině výšky hladiny (protože se mění potenciální energie úměrná výšce na kinetickou energii úměrnou druhé mocnině rychlosti). Proto je i rychlost s jakou se zmenšuje objem vody v nádrži úměrná odmocnině výšky hladiny.

Ukažte, že matematickým popisem procesu je diferenciální rovnice. Napište rovnici pro výšku hladiny vody v nádrži jako funkci času. Uvažujte tři případy: nádrž **cylindrického tvaru** (válec postavený na podstavu), nádrž ve tvaru **kvádru** a nádrž ve tvaru **kule** otočeného vrcholem dolů (trychtýř).



Zdroj: www.rodovystatek.cz

V tomto příkladě vystupuje derivace jak rychlost, ale po přepisu zadání do modelu máme v rovnici dvě různé veličiny, které se mění: objem vody a výšku hladiny. Musíme ještě najít a použít vztah mezi rychlostmi změn těchto veličin. Fyzikální zákon je formulován pro derivaci objemu a nás zajímá derivace výšky.

Řešení: Buď V objem vody a h výška hladiny od dna. Podle zadání ve všech případech platí

$$\frac{dV}{dt} = -k_1\sqrt{h}$$

a musíme derivaci $\frac{dV}{dt}$ vyjádřit pomocí $\frac{dh}{dt}$.

Pro cylindr, kvádr nebo jakoukoliv nádrž se svislými stěnami je objem úměrný výšce hladiny, $V = k_2h$, a proto $\frac{dV}{dt} = k_2\frac{dh}{dt}$. Odsud

$$k_2\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} = -k_1\sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{k_1}{k_2}\sqrt{h}$$

a pro $k = \frac{k_1}{k_2}$ má model tvar

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}.$$

Pro kužel platí $V = k_3 h^3$ (díky podobnosti je objem přímo úměrný třetí mocnině libovolného délkového parametru) a proto $\frac{dV}{dt} = k_3 \times 3h^2 \frac{dh}{dt}$. Odsud

$$3k_3 h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} = -k_1 \sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{k_1}{3k_3} h^{-3/2}$$

a po přeznačení konstanty má model pro kuželovou nádrž tvar

$$\frac{dh}{dt} = -kh^{-3/2}.$$

8.10 Problematika jednoznačnosti v modelu vypouštění nádrže

Ve cvičení 8.9 jsme odvodili rovnici

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

popisující úbytek hladiny vody v nádrži tvaru kvádru, ze které vypouštíme vodu.

A) Zkontrolujte, že pro $h > 0$ má každá počáteční úloha jediné řešení. Interpretujte tento výsledek prakticky.

B) Pro $h = 0$ by řešení nemuselo být určeno jednoznačně. A opravdu není. Řešením je například $h(t) = 0$ nebo

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}k^2t^2 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Zkontrolujte dosazením (pozor: pro $t < 0$ platí $\sqrt{t^2} = |t| = -t$) a rozmyslete, jestli nejednoznačnost je jenom matematický trik, nebo jestli má fyzikální interpretaci.



Zdroj: www.rodovystatek.cz

Řešení:

A) Nabídneme dvě varianty, pro argumentaci je možno použít kteroukoliv z nich.

- **Podle obecné věty o jednoznačnosti:** Stačí ověřit, že pravá strana má ohraničenou parciální derivaci podle h . Protože platí

$$\frac{\partial}{\partial h}(k\sqrt{h}) = k\frac{1}{2}h^{-1/2} = \frac{k}{2\sqrt{h}}$$

a tato derivace je definovaná a ohraničená v nějakém okolí libovolného bodu splňujícího $h > 0$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení obecné diferenciální rovnice má počáteční úloha právě jedno řešení.

- **Podle věty o jednoznačnosti pro rovnici se separovanými proměnnými:** Stačí ověřit, že část závislá na h je nenulová. Toto jistě platí, protože pro $h > 0$ je $\sqrt{h} \neq 0$.

Pokud je tedy v nádrži nějaká voda, je jednoznačně dáno, jak bude vytékat a je možné vypočítat, jaká bude v libovolném okamžiku hladina.

B) Pro $h = \frac{1}{4}k^2t^2$ a $t < 0$ dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{4}k^2 \cdot 2t = \frac{1}{2}k^2t \\ -k\sqrt{h} &= -k\sqrt{\frac{1}{4}k^2t^2} = -k\frac{1}{2}|k| \cdot |t| = -k\frac{1}{2}k(-t) = \frac{1}{2}k^2t\end{aligned}$$

a obě strany rovnice jsou stejné. Pro $h = 0$ je dosazení triviální.

Je-li $h(t_0) = 0$, může to být proto, že voda v čase t_0 právě vytekla, nebo proto, že vytekla před hodinou nebo proto, že v nádrži nikdy voda nebyla. Proto je nejednoznačnost přirozená. Například $h(t) = 0$ je řešení odpovídající tomu, že voda v nádrži nikdy nebyla. Funkce $h(t) = \frac{1}{4}k^2t^2$ pro $t < 0$ odpovídá tomu, že pro $t < 0$ v nádrži voda byla a vytekla v čase $t = 0$.

9 Diferenciální rovnice II

10 Autonomní systémy

10.1 Stavebniny vedle čebínského nádraží: model

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. Předpokládejme, že personál stavebnin přisypává na hromadu materiál konstantní rychlostí (v jednotkách objemu za jednotku času). Tato hromada je však v poměrně otevřené krajině a vítr rozfoukává materiál po okolí. Je rozumné předpokládat, že rozfoukávání (opět v jednotkách objemu za jednotku času) se děje rychlostí úměrnou povrchu návětrné strany pláště.



Zdroj: vlastní

- Napište rovnici pro derivaci objemu hromady podle času.
- Existuje konstantní řešení? Pokud ano, je stabilní nebo nestabilní? Zdůvodněte.
- Může hromada skončit i při neustálém přisypávání celá rozfoukaná?
- Mohou pracovníci navršíť hromadu do libovolné výšky anebo pro velkou hromadu je již rozfoukávání rychlejší než přisypávání?

Řešení: Rychlost s jakou se mění objem je $\frac{dV}{dt}$, rychlost přisypávání označme R , povrch návětrné strany S . Podle zadání platí

$$\frac{dV}{dt} = R - k_0 S.$$

Protože kužel má stále stejný tvar, objem jednoznačně determinuje rozměry, povrch kužele, nebo i povrch poloviny pláště, tj. povrch návětrné strany. Z podobnosti víme, že plochy rostou s druhou mocninnou a objemy se třetí mocninou délkových rozměrů. Proto je zřejmé, že musí platit úměrnost mezi takovými mocninami těchto veličin, pro které jednotky “pasují”, Existuje tedy konstanta taková, že

$$S = k_1 V^{\frac{2}{3}}.$$

Spojením těchto dvou vztahů dostáváme

$$\frac{dV}{dt} = R - k V^{\frac{2}{3}},$$

kde r a $k = k_0 k_1$ jsou konstanty.

Označme $f(V) = R - kV^{\frac{2}{3}}$. Konstantní řešení je řešením rovnice $f(V) = 0$, tj.

$$R - kV^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Odsud

$$V_0 = \left(\frac{R}{k}\right)^{3/2}.$$

Protože f klesá v bodě V_0 , je toto řešení stabilní.

Protože $f(0) > 0$, malá hromada vždy roste a proto nemůže skončit celá rozfoukaná. Pro malý objem je přisypávání intenzivnější než rozfoukávání.

Protože f je pro velké V záporná, pro velkou hromadu objem ubývá (více se rozfouká než přisype) a hromadu není možné navršit libovolně velkou.

10.2 Časový rozestup mezi trolejbusy

Uvažujme dva trolejbusy jedoucí za sebou po stejné trati. Označme $x(t)$ jejich časový odstup. Pokud první trolejbus zastaví na určité zastávce v čase t , druhý trolejbus na tuto zastávku dorazí v čase $x(t)$. Naším úkolem je zjistit, jak se $x(t)$ mění s rostoucím t .

Předpokládejme, že **(1)** pokud žádní pasažéři nečekají na druhý vůz, druhý vůz se pohybuje rychleji než první vůz a oba vozy se “sjedou”, tj. $x(t)$ klesá konstantní rychlostí, pokud na druhý vůz nečekají žádní pasažéři **(2)** rychlost druhého vozu klesá (a rozestup roste) s rostoucím počtem pasažérů, kteří čekají na zastávce **(3)** počet pasažérů kteří čekají na zastávce roste s rostoucím intervalem mezi oběma vozy.

Navrhněte model pro rozestup trolejbusů, najděte stacionární řešení a posuďte jeho stabilitu.

Řešení:



Zdroj: vlastní

Situaci je možno modelovat diferenciální rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = \beta x - \alpha,$$

kde α a β jsou kladné reálné konstanty. Tato rovnice má konstantní řešení $x = \frac{\alpha}{\beta}$. Toto řešení je nestabilní, protože

$$\frac{d}{dx}(\beta x - \alpha) = \beta > 0.$$

Žádné jiné konstantní řešení neexistuje a proto všechna řešení klesají na nulu nebo neohraničeně rostou.

Vzhledem k nestabilitě stacionárního řešení nemůžeme nechat řidiče veřejné dopravy jezdit “jak jim to vyjde”. Situace by směřovala k tomu, že cestující budou nejprve dlouho čekat na trolejbus a nakonec přijede několik trolejbusů těsně za sebou. (Podle knihy P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall: Differential equations, Cengage Learning (2006), 828 pp.)

10.3 Propeptid kolagenu

Kolagen je klíčový protein pojivových tkání. Jeden z kroků při syntéze kolagenu spočívá v reakci tří molekul propeptidu kolagenu, zkráceně propeptidu. Tento propeptid se formuje konstantní rychlostí a kromě toho, že je surovinou pro produkci kolagenu, se ještě rozpadá rychlostí úměrnou koncentraci. Napište matematický model pro množství (koncentraci) propeptidu kolagenu.

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life

Řešení:

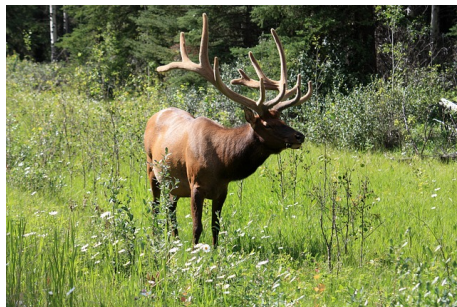
$$\frac{dP}{dt} = -k_1 P^3 + k_2 - k_3 P$$



Zdroj: pixabay.com

10.4 Jelen a los

Uvažujme populaci jelenů a losů. Tyto populace spolu soupeří o potravu. **(1)** Bez konkurence by populace jelena rostla rychlostí 3 a populace losa rychlostí 2 na jeden kus. **(2)** Vnitrodruhová konkurence se projevuje v obou populacích stejně a je rovna druhé mocnině příslušné velikosti populace. **(3)** Mezidruhová konkurence je vyjádřena členem rovným součinu velikosti populací a tato konkurence se projeví s koeficientem 0.5 v populaci losa a s koeficientem 1 v populaci jelena.



Zdroj: pixabay.com

Sestavte matematický model a otestujte jej numerickým experimentem na stabilitu stacionárních bodů. Poté zdvojnásobte parametry mezidruhové konkurence a sledujte změnu odezvy.

Řešení:

$$\frac{dx}{dt} = 3x - xy - x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 0.5xy - y^2$$

10.5 Puštík obecný

Puštík obecný se téměř výhradně živí malými hlodavci. Předpokládejme následující vztahy.

(1) Populace hlodavců má porodnost 0.1 na jedince a úmrtnost 0.025 na jedince za jednotku času. (2) Rychlost s jakou jeden puštík konzumuje hlodavce je úměrná počtu hlodavců s konstantou úměrnosti 0.01. (3) Porodnost v populaci puštíka je úměrná množství zkonsumované potravy s konstantou úměrnosti 0.05. (4) Úmrtnost v populaci puštíka je 0.1 na jedince za jednotku času.



Zdroj: wikimedia

Vyjádřete tyto vztahy matematickým modelem.

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life. Doslova přeloženo. Porodnost je ve skutečnosti společný efekt zvýšené porodnosti a snížené úmrtnosti v případě, že puštík má přístup k potravě.

Řešení:

$$\frac{dx}{dt} = 0.1x - 0.025x - 0.01xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.1y + 0.05xy$$

10.6 Kůň Převalského

Kůň Převalského je divoký kůň ze střední Asie, jediný druh koně, který nebyl domestikován. V divočině jsou tyto koně loveni vlky. Napište matematický model založený na následujících předpokladech. (1) Porodnost v populaci koní je 0.15 na jedince. (2) Úmrtnost v populaci koní je 0.01 na jedince. (3) Vlci se živí i jinou potravou, mají tedy kladnou porodnost. Ta je 0.1 na jedince. (4) Vlci mají konstantní úmrtnost 0.05 na jedince. (5) Pravděpodobnost s jakou je kůň uloven vlkem je úměrná počtu vlků s konstantou úměrnosti 0.02.



Zdroj: pixabay.com

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life

Podle Wikipedie kůň Převalského přežil jenom díky péči zoologických zahrad a z rodokmenu je zřejmé, že 70 procent jedinců tohoto druhu má původní předky ze zoologické zahrady v Praze.

Řešení:

$$\frac{dx}{dt} = 0.15x - 0.01x - 0.05xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.1y - 0.05y$$

10.7 Analýza pomocí vlastních čísel

Autonomní systém

$$\frac{dx}{dt} = 4x^2y + y^3 - 5$$

$$\frac{dy}{dt} = 3xy^2 - 3y$$

má stacionární bod $(1, 1)$. Najděte Jacobiho matici v tomto bodě, vlastní čísla této matice a určete typ stacionárního bodu.

Řešení:

Platí

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y + y^3 - 5) = 8xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^2y + y^3 - 5) = 4x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 - 3y) = 3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 - 3y) = 6xy - 3$$

a odsud

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 8xy & 4x^2 + 3y^2 \\ 3y^2 & 6xy - 3 \end{pmatrix}.$$

Ve stacionárním bodě dostáváme

$$J(1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem determinantu dostáváme

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} 8 - \lambda & 7 \\ 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (8 - \lambda)(3 - \lambda) - 21 = \lambda^2 - 11\lambda + 3.$$

Kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 12}}{2}$$

a oba jsou kladné. Ve stacionárním bodě proto je nestabilní uzel.

11 Diferenciální rovnice druhého řádu

12 Více integrálů

13 Více diferenciálních rovnic

14 Shrnutí