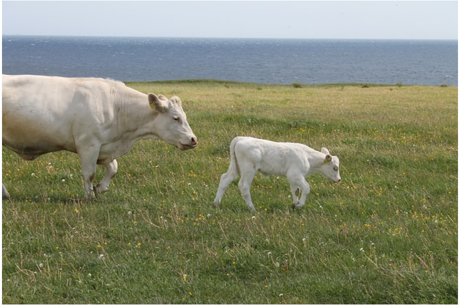
8 Diferenciální rovnice I

8.1 Model růstu úměrného velikosti chybějícího množství

Mnoho živočichů roste tak, že mohou dorůstat jisté maximální délky a rychlost jejich růstu je úměrná délce, která jim do této maximální délky chybí (tj. kolik ještě musí do této maximální délky dorůst). Sestavte matematický model popisující takovýto růst (von Bertalanffy growth model).



Zdroj: pixabay.com

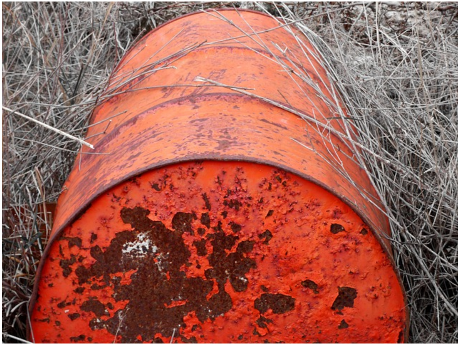
Jakmile vidíme, že v zadání figuruje rychlost změny veličiny, která nás zajímá, je jasné, že kvantitativní model bude obsahovat derivaci. Zatím se učíme model zapsat, později ho budeme umět i vyřešit.

Řešení: Je-li L délka a $L_{\max}$ maximální délka, potom do maximální délky chybí $L_{\max}-L$ a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k\,(L_{\max} - L).$$

8.2 Kontaminace a čištění

Znečišťující látky se v kontaminované oblasti rozkládají tak, že za den se samovolně rozloží 8% aktuálního znečištění. Kromě toho pracovníci odstraňují látky rychlostí 30 galonů denně. Vyjádřete tento proces kvantitativně pomocí vhodného modelu.



Zdroj: pixabay.com

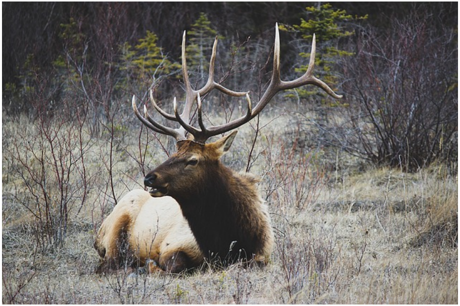
Tento příklad opět zmiňuje rychlost změny, tj. derivaci. Tentokrát se na změně podílejí dva procesy a jejich účinek se sčítá. Příklad navíc připomíná, jak se pracuje se změnou vyjádřenou procenty. Toto je používané například při úročení spojitým úrokem. Pokud pokles změníme na růst, tj. pokud změníme znaménka u derivace, máme okamžitě model růstu financí na účtu, na kterém se pravidelně připisuje úrok a k tomu se přidává fixní úložka.

Řešení: Je-li y znečištění v galonech a t čas ve dnech, má model tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.08y - 30.$$

8.3 Populace jelenů

Populace jelenů v národním parku přibývá rychlostí 10% za rok. Správa parku každý rok odebere 50 jedinců. Napište matematický model pro velikost populace jelenů v tomto parku.



Zdroj: pixabay.com, autor Free-Photos

Řešení: Je-li x velikost populace jelenů, platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.10x - 50,$$

kde t je čas v letech.

8.4 Hrubý model chřipkové epidemie

Rychlost s jakou roste počet nemocných chřipkou je úměrný současně počtu nemocných a počtu zdravých jedinců. Sestavte model takového šíření chřipky.

Toto je současně model popisující šíření informace v populaci, stačí si místo chřipky představit nějakou informaci předávanou mezi lidmi (sociální difuze).

Řešení: Je-li M velikost populace a y počet nemocných, je v populaci $M - y$ zdravých a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky(M - y).$$

8.5 Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že její poloměr jako funkce času roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

Zdroj: pixabay.com

Řešení: Je-li r poloměr, je r^2 druhá mocnina a protože se jedná o nepřímou úměrnost, platí

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{r^2}.$$

8.6 Model učení

Rychlost učení (tj. časová změna objemu osvojené látky nebo procento z maximální manuální zručnosti) je úměrná objemu dosud nenaučené látky. Vyjádřete proces kvantitativně pomocí derivací.

Porovnejte s příkladem 8.1.

Řešení: Je-li L objem naučené látky a $L_{\max}$ maximální objem látky kterou je možné se naučit, je objem dosud nenaučené látky $L_{\max} - L$ a model má tvar

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k\ (L_{\max} - L).$$

8.7 Řešení ODE a IVP

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = te^y$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = kr^3, \quad r(0) = r_0 > 0$

(6) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = 0$

(7) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = -2$

Umění najít řešení diferenciální rovnice je sympatické, není to však nic proti umění sestavit model (naučili jsme se již ve druhém týdnu, připomeneme si v následujícím modelu), umění posoudit jednoznačnost řešení (většina modelů se řeší numericky a musíme být přesvědčeni o smysluplnosti takové činnosti) a stabilitu řešení (řešení, která nejsou stabilní, jsou sice v souladu s přírodními zákony, ale pravděpodobnost jejich spontánního výskytu je nulová). Jednoznačnost a zjednodušenou verzi stability řešení (stabilita konstantních řešení) jsme viděli na přednášce a připomeneme v dalších příkladech.

Řešení:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y^2$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice
$$y^2 = 0,$$
tj. je jediné konstantní řešení
$$y = 0.$$
- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci
$$y^{-2}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$
a integrováním
$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t \cdot e^y$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$e^{y} = 0.$$

  Protože tato rovnice nemá řešení, zadaná diferenciální rovnice nemá konstantní řešení.

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

$$e^{-y}\mathrm{d}y = t\mathrm{d}t$$

  a integrováním

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot \sqrt{y}$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$\sqrt{y} = 0,$$

  tj. jediné řešení

$$y = 0.$$

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$

a integrováním

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

- Konstantní řešení

$$y = 0$$

(viz předchozí příklad) nesplňuje počáteční podmínku a proto jej nemusíme uvažovat

- Obecné řešení

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

dává po dosazení $x = 0$ a $y = 1$ rovnici

$$2\sqrt{1} = 0 + C.$$

Odsud dostáváme $C = 2$ a řešení zadané počáteční úlohy je

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 2.$$

(5) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = k \cdot r^3, \quad r(0) = r_0 > 0$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

  $$r^3 = 0,$$

  tj. jediné konstantní řešení je

  $$r = 0$$

  a toto řešení nesplňuje počáteční podmínku.

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

  $$r^{-3}\mathrm{d}r = k\mathrm{d}t$$

  a integrováním

  $$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt + C.$$

Dosazením počáteční podmínky $t = 0$, $r = r_0$ dostáváme

$$-\frac{1}{2}r_0^{-2} = C.$$

Tím je dána konstanta C a po použití této konstanty v obecném řešení dostáváme řešení počáteční úlohy ve tvaru

$$-\frac{1}{2}r^{-2} = kt - \frac{1}{2}r_0^{-2}.$$

(6) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = 0$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$m + 2 = 0,$$

tj.

$$m = -2$$

a toto řešeín nesplňuje počáteční podmínku.

- Pro nekonstantní řešení dostaneme po separaci

$$\frac{1}{m+2}\mathrm{d}m = dt$$

a integrováním

$$\ln|m+2| = t + C.$$

Po dosazení počáteční podmínky $t = m = 0$ dostáváme

$$C = \ln 2$$

a počáteční úloha má řešení

$$\ln(m+2) = t + \ln(2).$$

(Vzhledem k počáteční podmínce je m kladné a nemusíme psát absolutní hodnotu.)

(7) $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m + 2, \quad m(0) = -2$

- Konstantní řešení jsou řešení rovnice

$$m + 2 = 0, .$$

tj.

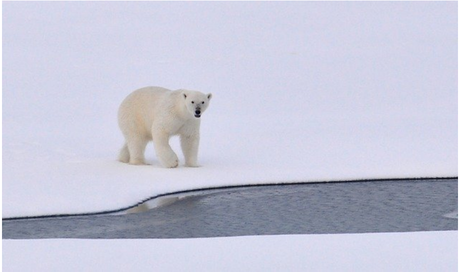
$$m = -2.$$

Toto řešení splňuje počáteční podmínku.

- Pravá strana má ohraničenou (dokonce konstantní) derivaci podle m. Proto je řešení každé počáteční úlohy určeno jednoznačně. Řešení z předchozího bodu je jediné a další nemusíme hledat.

8.8 Tloušťka ledu

Takzvaný Stefanův zákon (J. Stefan, Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere, 1891) vyjadřuje že tloušťka ledu na hladině moře roste ve stabilních podmínkách rychlostí nepřímo úměrnou této tloušťce. Zapište tento fakt pomocí vhodného matematického modelu a najděte řešení vzniklé diferenciální rovnice.

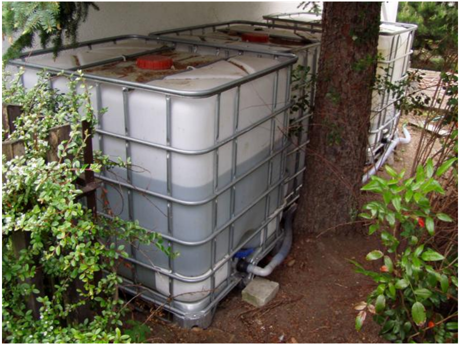


Zdroj: pixabay.com

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{h}$$
$$h\,\mathrm{d}h = k\,\mathrm{d}t$$
$$\int h\,\mathrm{d}h = \int k\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{h^2}{2} = kt + C$$

8.9 Model vypouštění nádrže



Zdroj: www.rodovystatek.cz

Z fyziky je známo, že rychlost s jakou vytéká tekutina otvorem u dna nádoby je úměrná odmocnině výšky hladiny (protože se mění potenciální energie úměrná výšce na kinetickou energii úměrnou druhé mocnině rychlosti). Proto je i rychlost s jakou se zmenšuje objem vody v nádrži úměrná odmocnině výšky hladiny.

Ukažte, že matematickým popisem procesu je diferenciální rovnice. Napište rovnici pro výšku hladiny vody v nádrži jako funkci času. Uvažujte tři případy: nádrž **cylindrického tvaru** (válec postavený na podstavu), nádrž ve tvaru **kvádru** a nádrž ve tvaru **kužele** otočeného vrcholem dolů (trychtýř).

V tomto příkladě vystupuje derivace jak rychlost, ale po přepisu zadání do modelu máme v rovnici dvě různé veličiny, které se mění: objem vody a výšku hladiny. Musíme ještě najít a použít vztah mezi rychlostmi změn těchto veličin. Fyzikální zákon je formulován pro derivaci objemu a nás zajímá derivace výšky.

Řešení: Buď V objem vody a h výška hladiny od dna. Podle zadání ve všech případech platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h}$$

a musíme derivaci $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ vyjádřit pomocí $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$.

Pro cylindr, kvádr nebo jakoukoliv nádrž se svislými stěnami je objem úměrný výšce hladiny, $V = k_2 h$, a proto $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_2\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Odsud

$$k_2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1}{k_2}\sqrt{h}$$

a pro $k = \dfrac{k_1}{k_2}$ má model tvar

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}.$$

Pro kužel platí $V = k_3 h^3$ (díky podobnosti je objem přímo úměrný třetí mocnině libovolného délkového parametru) a proto $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_3 \times 3h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Odsud

$$3k_3 h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -k_1\sqrt{h},$$

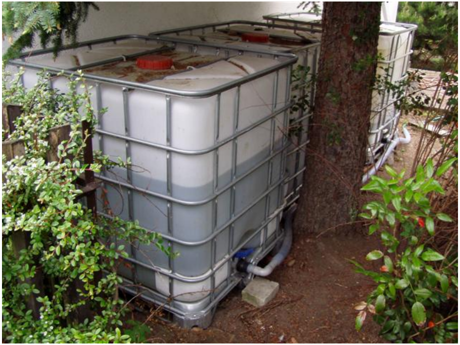
tj.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1}{3k_3} h^{-3/2}$$

a po přeznačení konstanty má model pro kuželovou nádrž tvar

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -kh^{-3/2}.$$

8.10 Problematika jednoznačnosti v modelu vypouštění nádrže



Zdroj: www.rodovystatek.cz

Ve cvičení 8.9 jsme odvodili rovnici

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{h}$$

popisující úbytek hladiny vody v nádrži tvaru kvádru, ze které vypouštíme vodu.

A) Zkontrolujte, že pro $h > 0$ má každá počáteční úloha jediné řešení. Interpretujte tento výsledek prakticky.

B) Pro $h = 0$ by řešení nemuselo být určeno jednoznačně. A opravdu není. Řešením je například $h(t) = 0$ nebo

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}k^2t^2 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Zkontrolujte dosazením (pozor: pro $t < 0$ platí $\sqrt{t^2} = |t| = -t$) a rozmyslete, jestli nejednoznačnost je jenom matematický trik, nebo jestli má fyzikální interpretaci.

Řešení:

A) Nabídneme dvě varianty, pro argumentaci je možno použít kteroukoliv z nich.

- **Podle obecné věty o jednoznačnosti:** Stačí ověřit, že pravá strana má ohraničenou parciální derivaci podle h. Protože platí

$$\frac{\partial}{\partial h}(k\sqrt{h}) = k\frac{1}{2}h^{-1/2} = \frac{k}{2\sqrt{h}}$$

  a tato derivace je definovaná a ohraničená v nějakém okolí libovolného bodu splňujícího $h > 0$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení obecné diferenciální rovnice má počáteční úloha právě jedno řešení.

- **Podle věty o jednoznačnosti pro rovnici se separovanými proměnnými:** Stačí ověřit, že část závislá na h je nenulová. Toto jistě platí, protože pro $h > 0$ je $\sqrt{h} \neq 0$.

Pokud je tedy v nádrži nějaká voda, je jednoznačně dáno, jak bude vytékat a je možné vypočítat, jaká bude v libovolném okamžiku hladina.

B) Pro $h = \dfrac{1}{4}k^2t^2$ a $t < 0$ dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}k^2 \cdot 2t = \frac{1}{2}k^2 t$$

$$-k\sqrt{h} = -k\sqrt{\frac{1}{4}k^2t^2} = -k\frac{1}{2}|k|\cdot|t| = -k\frac{1}{2}k(-t) = \frac{1}{2}k^2 t$$

a obě strany rovnice jsou stejné. Pro $h = 0$ je dosazení triviální.

Je-li $h(t_0) = 0$, může to být proto, že voda v čase t_0 právě vytekla, nebo proto, že vytekla před hodinou nebo proto, že v nádrži nikdy voda nebyla. Proto je nejednoznačnost přirozená. Například $h(t) = 0$ je řešení odpovídající tomu, že voda v nádrži nikdy nebyla. Funkce $h(t) = \dfrac{1}{4}k^2t^2$ pro $t < 0$ odpovídá tomu, že pro $t < 0$ v nádrži voda byla a vytekla v čase $t = 0$.