6 Dvojné integrály

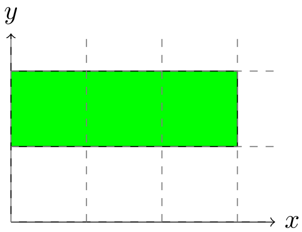
6.1 Integrál přes obdélník

Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_\Omega xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes obdélník

$$0 \le x \le 3$$
$$1 \le y \le 2.$$



Řešení:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^3 x\,\mathrm{d}x \int_1^2 y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 \times \left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^2 \\ &= \left[\frac{9}{2} - 0\right] \times \left[\frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}\right] = \frac{9}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{21}{2}\end{aligned}$$

6.2 Kvadratický moment pro obdélník

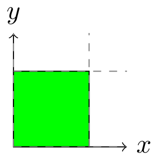
Vypočtěte integrál
$$\iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
přes obdélník se stranami podél os, se středem v počátku a délkou stran a a b, tj. přes množinu Ω danou nerovnostmi
$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2},$$
$$-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}.$$

Řešení:

$$\iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \times \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \,\mathrm{d}y = a \times \left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = a \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{b^3}{8}\right) = \frac{1}{12}ab^3$$

6.3 Integrál závislý na parametru

Vypočtěte dvojný integrál



$$I_n = \iint_\Omega y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes jednotkový čtverec

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1$$

v závislosti na parametru $n \geq 0$.

Řešení:

$$\iint_\Omega y^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 y^n \,\mathrm{d}y = 1 \times \left[\frac{1}{n+1} y^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Správnost můžeme ověřit pomocí vzorců pro obsah

$$I_0 = 1$$

a polohu težiště

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{2},$$

což porovnáme s očekávanými výsledky. Dalším využitím je působiště tlakové síly na přehradu (viz přednáška), které je při orientaci osy y od hladiny směrem dolů v místě

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

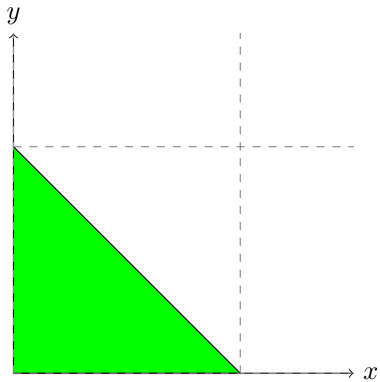
tj. ve dvou třetinách hloubky.

6.4 Integrál přes trojúhelník

Vypočtěte integrál

$$\iint_\Omega xy^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

přes trojúhelník Ω s vrcholy v bodech $(0,0)$, $(1,0)$ a $(0,1)$.



Řešení:

Rovnice přímky, ve které leží přepona trojúhelníka, je

$$y = 1 - x$$

a trojúhelník tedy je možno zapsat soustavou nerovností

$$\begin{aligned} 0 \leq & x \leq 1, \\ 0 \leq & y \leq 1 - x. \end{aligned}$$

Použitím těchto nerovností můžeme dvojný integrál transformovat na dvojnásobný a vypočítat.

$$\iint_\Omega xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}xy^3\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{3}x(1-x)^3\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x - 3x^2 + 3x^3 - x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{60}$$

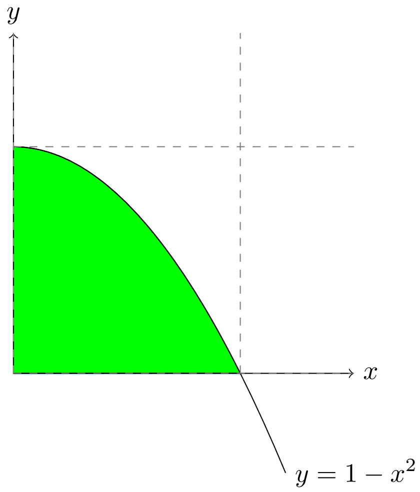
6.5 Integrál pod parabolou

Vypočtěte integrály

$$I_1 = \iint_\Omega x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_2 = \iint_\Omega y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I_3 = \iint_\Omega \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

přes množinu Ω danou nerovnostmi

$$0 \le x \le 1,$$
$$0 \le y \le 1 - x^2.$$



Určete obsah a polohu těžiště této množiny.

Řešení:

$$\iint_\Omega x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 [xy]_0^{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x^2) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x - x^3 \, \mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\iint_\Omega y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} y \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2)^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right] = \frac{4}{15}$$

$$\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Obsah je $\frac{2}{3}$ a souřadnice těžiště jsou $\left[\frac{3}{8}, \frac{4}{10}\right]$. Toto je možné porovnat s obsahem a souřadnicemi těžiště trojúhelníka, který vznikne nahrazením paraboly přímkou a tento trojúhelník má obsah $\frac{1}{2}$ a souřadnice těžiště $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

6.6 Integrál přes čtvrtkružnici

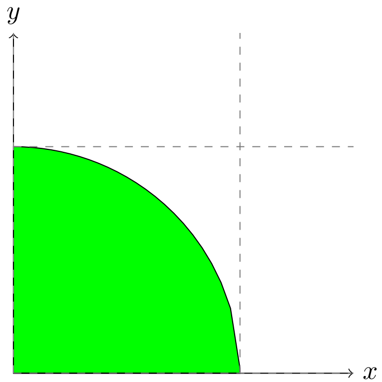
Vypočtěte integrály

$$I_1 = \iint_\Omega x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_2 = \iint_\Omega y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3 = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

přes čtvrtkružnici na obrázku (čtvrtina jednotkové kružnice v prvním kvadrantu). Určete obsah a polohu těžiště této čtvrtkružnice.



Řešení:

V polárních souřadnicích daných rovnicemi

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

má čtvrtkružnice vyjádření $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

$$\iint_\Omega x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi \times r \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 \times [\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\iint_\Omega y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi \times r \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^1 r^2 \,\mathrm{d}r \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 \times [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times r \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^1 r \,\mathrm{d}r \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 \times \pi 2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Obsah je $\dfrac{\pi}{4}$, což odpovídá čtvtině vzorce pro obsah jednotkového kruhu. Souřadnice težište jsou obě stejné, což odpovídá symetrii množiny. Tyto souřadnice leží v bodě

$$\frac{4}{3\pi} \approx 0.42,$$

což odpovídá tomu, že těžište je posunuto doprava nahoru ve srovnání těžištěm trojúhelníka, který by vznikl nahrazením oblouku úsečkou.

6.7 Kvadratický moment kruhu

Vypočtěte kvadratický moment kruhu o poloěmru R vzhledem k ose procházející středem.

Řešení:

Vypočteme kvadratický moment kruhu daného v polárních souřadnicích nerovnicemi

$$
\begin{aligned}
0 &\leq r \leq R, \\
0 &\leq \varphi \leq 2\pi.
\end{aligned}
$$

Přímým výpočtem dostáváme

$$\iint_\Omega y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\varphi \times r \,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \int_0^R r^3\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \pi = \frac{\pi}{4}R^4,$$

kde při výpočtu integrálu přes proměnnou φ využijeme nápovědu, kterou jsme měli již v sadě úloh s křivkovým integrálem.

Že je výsledkem veličina úměrná čtvrté mocnině poloměru je zřejmé i z rozměrové analýzy (resp. z Buckinghamova Π teorému), uvedeným výpočtem však vidíme i konstantu úměrnosti.

To že kvadratický moment roste se čtvrtou mocninou poloměru značí, že snížení průměru tyče na polovinu vede k redukci tuhosti na přibližně $(0.5)^4$ tj. na šest procent. Devadesát šest procent tuhosti je v materiálu, který se při tomto odstraní. Proto jsou trubky při stejné spotřebě materiálu odolnější vůči ohnutí než tyče. Proto mají listy rostlin nebo listy vrtulí větrných elektráren materiál odpovídající za tuhost na povrchu. Proto máme kosti duté.