5 Křivkové integrály

5.1 Křivkový integrál druhého druhu po třech různých křivkách

Vypočtěte

$$\int_{C_i} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

pro vektorové pole

$$\vec{F} = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

po třech různých křivkách C_1, C_2 a C_3.

$$C_1 \colon \vec{r} = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$C_2 \colon \vec{r} = (1-t)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}, \quad t \in [0,1]$$
$$C_3 \colon \vec{r} = (1-t^2)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}, \quad t \in [0,1]$$

Tj. počítáme

$$\int_{C_i} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

po třech zadaných křivkách C_1, C_2 a C_3.

Řešení:

Vektory budeme pro stručnost zapisovat jako uspořádané dvojice.

Křivka C_1. Derivací křivky $\vec{r} = (\cos(t), \sin(t))$ podle t dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\sin t, \cos t).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Odsud formálně

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 1\mathrm{d}t$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$

kde poslední Riemannův integrál není nutné počítat, protože integrál z jedničky je délka intervalu, přes který se integruje.

Křivka C_2. Derivací křivky $\vec{r} = (1-t, t)$ podle t dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-1, 1).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-t, 1-t).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-t, 1-t) \cdot (-1, 1) = (-t)(-1) + (1-t) \cdot 1 = 1.$$

Odsud formálně

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 1\mathrm{d}t$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1,$$

kde ani v tomto případě poslední Riemannův integrál není nutné počítat, protože integrál z jedničky je délka intervalu, přes který se integruje.

Křivka C_3. Derivací křivky $\vec{r} = (1 - t^2, t)$ podle t dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-2t, 1).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (-t, 1 - t^2).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-t, 1 - t^2) \cdot (-2t, 1) = (-t)(-2t) + (1 - t^2) \cdot 1 = t^2 + 1.$$

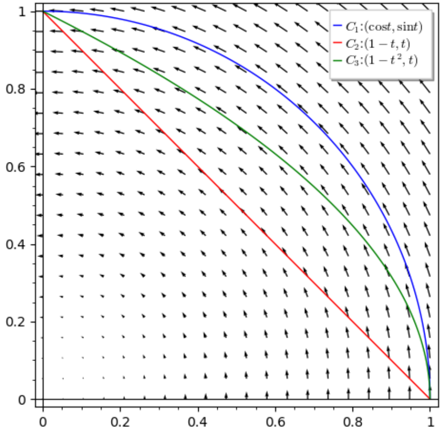
Odsud formálně

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = (t^2 + 1)\mathrm{d}t$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (t^2 + 1)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}.$$

Interpretace jako práce, srovnání.



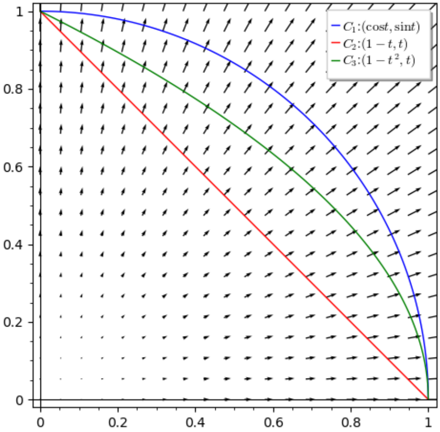
Zdroj: vlastní

Všechny křivky jsou z bodu $[1, 0]$ do bodu $[0, 1]$. Nejblíže k počátku je úsečka C_2, nejdále je čvrtkružnice C_1, křivka C_2 je mezi nimi.

Integrál fyzikálně znamená práci vektorového pole $(-y, x)$ po zadané křivce. Toto vektorové pole míří po kružnicích okolo počátku proti směru hodinových ručiček. Délka vektoru je rovna vzdálenosti od počátku.

Křivka C_1 je nejdále od počátku a vektorové pole je na ní nejsilnější. Navíc v každém bodě je síla ve směru křivky a proto se projeví ve výsledném příspěvku bez redukování. Díky tomu můžeme integrál po kružnici počítat stejně jako práci na přímce, tj. součinem délky křivky $\dfrac{\pi}{2}$ a velikosti síly $|\vec{F}| = 1$. Po dalších křivkách je síla menší (křivky jdou blíže ke středu) a navíc se neuplatní celá velikost síly, protože síla svírá s křivkou nenulový úhel a při práci se projeví pouze tečná komponenta.

Interpretace jako tok, srovnání.



Zdroj: vlastní

Všechny křivky jsou z bodu $[1,0]$ do bodu $[0,1]$. Nejblíže k počátku je úsečka C_2, nejdále je čvrtkružnice C_1, část paraboly C_2 je mezi nimi.

Integrál fyzikálně znamená tok vektorového pole (x,y) křivkou. Toto vektorové pole míří směrem z počátku a zesiluje směrem od počátku, protože délka vektoru je rovna vzdálenosti od počátku.

Proto je hodnota po křivce nejblíže počátku nejmenší atd. Na křivce C_1 (kružnice) je tok v každém bodě kolmý ke křivce a stejně velký a proto je celkový tok snadné určit jako součin velikosti vektorového pole na křivce ($|\vec{F}|= 1$) a délky křivky $\dfrac{\pi}{2}$.

5.2 Křivkový integrál druhého druhu po parabole

Vypočtěte

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$$

pro vektorové pole

$$\vec{F} = x^2\vec{\imath} + (x+y)\vec{\jmath}$$

po části paraboly

$$C\colon \vec{r} = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath}, \quad t \in [0,1]$$

tj. počítáme

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

po zadané křivce C.

Řešení:

Vektory budeme pro stručnost zapisovat jako uspořádané dvojice.

Derivací křivky $\vec{r} = (t, t^2)$ podle t dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (1, 2t).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (t^2, t + t^2).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (1, 2t) \cdot (t^2, t + t^2) = 1 \cdot t^2 + 2t \cdot (t + t^2) = 3t^2 + 2t^3.$$

Odsud formálně

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = (3t^2 + 2t^3)\mathrm{d}t$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (3t^2 + 2t^3)\,\mathrm{d}t = \left[t^3 + \frac{1}{2}t^4\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

5.3 Křivkový integrál druhého druhu po kubické parabole

Vypočtěte

$$\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

pro vektorové pole

$$\vec{F} = 2y\vec{\imath} + x^2 y\vec{\jmath}$$

po části kubické paraboly

$$C\colon \vec{r} = t\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath}, \quad t \in [0,1],$$

tj. počítáme

$$\int_C 2y\,\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y$$

po zadané křivce C.

Řešení:

Vektory budeme pro stručnost zapisovat jako uspořádané dvojice.

Derivací křivky $\vec{r} = (t, t^3)$ podle t dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (1, 3t^2).$$

Rovnice vektorového pole podél křivky má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (2t^3, t^2t^3) = (2t^3, t^5).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (1, 3t^2) \cdot (2t^3, t^5) = 1 \cdot 2t^3 + 3t^2 \cdot t^5 = 2t^3 + 3t^7.$$

Odsud formálně

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = (2t^3 + 3t^7)\mathrm{d}t$$

a integrál má tvar

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (2t^3 + 3t^7)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - 0 = \frac{7}{8}.$$

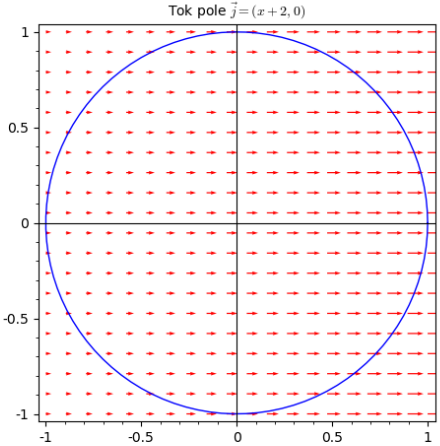
5.4 Tok vektorového pole uzavřenou křivkou

Vypočtěte tok vektorového pole

$$\vec{\Phi}_1 = (x+2)\vec{\imath}$$

jednotkovou kružnicí se středem v počátku orientovanou proti směru hodinových ručiček, tj.

$$C\colon \vec{r} = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Zdroj: vlastní

Návod:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \pi$$

a tento integrál je možno najít například grafickou cestou.

Řešení: Vektorové pole teče směrem doprava a směrem doprava i zesiluje. Dá se čekat, že tok ven pravou polovinou kružnice bude větší než tok dovnitř levou polovinou kružnice a celkový tok bude nenulový.

Vektorové pole je
$$\vec{\Phi}_1 = (x + 2, 0)$$
a pro výpočet toku musíme integrovat křivkovým integrálem druhého druhu vektorové pole
$$\vec{F} = (0, x + 2).$$
Vskutku, tok vektorového pole zadaného v komponentách $\Phi_1 = (P, Q)$ je vyjádřen integrálem druhého druhu vektorového pole $\vec{F} = (-Q, P)$ a v našem případě je $P = x + 2$ a $Q = 0$. Derivací rovnice křivky obdržíme
$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin(t), \cos(t)).$$
Rovnice vektorového pole $\vec{F}$ podél křivky C má tvar
$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (0, 2 + \cos t).$$
Skalárním součinem dostáváme
$$\vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t, \cos t) \cdot (0, 2 + \cos(t)) = 2\cos t + \cos^2 t.$$
Odsud formálně
$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = (2\cos t + \cos^2 t)\mathrm{d}t$$

a integrál má tvar

$$\oint_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \pi,$$

kde poslední Riemannův integrál není nutné počítat, protože integrál z první části je nulový díky geometrické interpretaci integrálu a periodicitě funkce $\cos t$ a integrál z druhého sčítance byl součástí zadání.

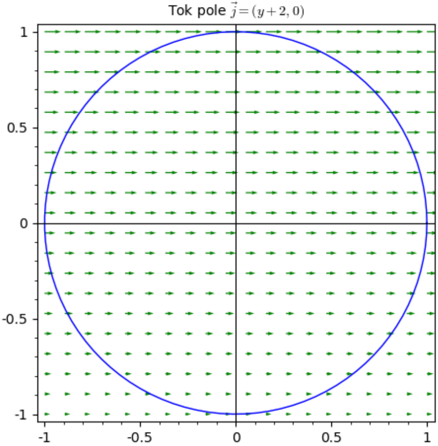
5.5 Tok vektorového pole uzavřenou křivkou

Vypočtěte tok vektorového pole

$$\vec{\Phi}_2 = (y+2)\vec{\imath}$$

jednotkovou kružnicí se středem v počátku orientovanou proti směru hodinových ručiček, tj.

$$C\colon \vec{r} = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Zdroj: vlastní

Návod:

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = 0$$

Řešení: Vektorové pole teče směrem doprava. Kromě toho zesiluje směrem nahoru. Dá se čekat, že tok ven pravou polovinou kružnice bude v každý výšce stejný jako tok dovnitř levou polovinou kružnice a celkový tok bude nulový.

Vektorové pole je

$$\vec{\Phi}_2 = (y+2, 0)$$

a pro výpočet toku musíme integrovat křivkovým integrálem druhého druhu vektorové pole

$$\vec{F} = (0, y + 2).$$

Vskutku, tok vektorového pole zadaného v komponentách $\Phi_2 = (P, Q)$ je vyjádřen integrálem druhého druhu vektorového pole $\vec{F} = (-Q, P)$ a v našem případě je $P = y + 2$ a $Q = 0$. Derivací rovnice křivky obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Rovnice vektorového pole $\vec{F}$ podél křivky C má tvar

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (0, 2 + \sin t).$$

Skalárním součinem dostáváme

$$\vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t, \cos t) \cdot (0, 2 + \sin(t)) = 2\cos t + \cos t \sin t.$$

Odsud formálně

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = (2\cos t + \cos t \sin t)\mathrm{d}t$$

a integrál má tvar

$$\oint_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos t \sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Integrál z prvního sčítance můžeme vypočítat pomocí primitivní funkce

$$\int_0^{2\pi} 2\cos x \,\mathrm{d}x = [2\sin x]_0^{2\pi} = 2\sin(2\pi) - 2\sin 0 = 0$$

a integrál z druhého sčítance je nulový, proto je nulový i celý integrál.

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0$$