4 Rotace, kmenová funkce gradientu

4.1 Rotace vektorového pole v rovině

Vypočtěte rotaci funkce $\vec{F} = xy^2\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2xy & 0 \end{vmatrix} &= \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right)\right) \\ &= \vec{k}(2y - 2xy) \\ &= 2y(1 - x)\vec{k}\end{aligned}$$

4.2 Rotace vektorového pole v prostoru

Vypočtěte rotaci funkce $\vec{F} = xyz\vec{\imath} + 5x^2y\vec{\jmath} - 3x^2z\vec{k}$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 5x^2y & -3x^2z \end{vmatrix} \\
&= \vec{\imath}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-3x^2z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(5x^2y\right)\right] \\
&\quad + \vec{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(xyz\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-3x^2z\right)\right] \\
&\quad + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(5x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xyz\right)\right) \\
&= (xy + 6xz)\vec{\jmath} + (10xy - xz)\vec{k} \\
&= x(y + 6z)\vec{\jmath} + x(10y - z)\vec{k}
\end{aligned}
$$

4.3 Divergence a rotace 2D funkce s parametrem

Vypočtěte divergenci a rotaci funkce $\vec{F} = ax^2y^3\vec{\imath} + (x^2 + y)\vec{\jmath}$.

Řešení:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2y^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y\right) = 2axy^3 + 1$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ax^2y^3 & x^2 + y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(2x - 3ax^2y^2)$$

4.4 Nalezení kmenové funkce 1/3

Pro vektorové pole

$$\frac{4}{5}xy^3\vec{\imath}+\frac{6}{5}x^2y^2\vec{\jmath}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

Řešení:

Platí $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{4}{5}xy^3$ a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{6}{5}x^2y^2$.

Odsud

$$\varphi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{4}{5}xy^3\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\frac{x^2}{2}y^3=\frac{2}{5}x^2y^3+C_1(y)$$

a

$$\varphi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\int\frac{6}{5}x^2y^2\,\mathrm{d}y=\frac{6}{5}x^2\frac{y^3}{3}=\frac{2}{5}x^2y^3+C_2(x).$$

Porovnáním musí být $C_1(y)=C_2(x)=C\in\mathbb{R}$ a

$$\varphi(x,y)=\frac{2}{5}x^2y^3+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

4.5 Nalezení kmenové funkce 2/3

Pro vektorové pole

$$\left(x^2+\frac{4}{5}xy^3\right)\vec{\imath}+\left(\frac{6}{5}x^2y^2+y\right)\vec{\jmath}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

Řešení:

Platí $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=x^2+\dfrac{4}{5}xy^3$ a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{6}{5}x^2y^2+y$.

Odsud

$$\varphi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x=\int x^2+\frac{4}{5}xy^3\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{5}\frac{x^2}{2}y^3=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}x^2y^3+C_1(y)$$

a

$$\varphi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\int\frac{6}{5}x^2y^2+y\,\mathrm{d}y=\frac{6}{5}x^2\frac{y^3}{3}+\frac{1}{2}y^2=\frac{2}{5}x^2y^3+\frac{1}{2}y^2+C_2(x).$$

Porovnáním musí být $C_1(y)=\dfrac{1}{2}y^2+C$ a $C_2(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$, $C\in\mathbb{R}$ a

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^2y^3+\frac{1}{2}y^2+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

4.6 Nalezení kmenové funkce 3/3

Pro vektorové pole

$$\left(y+\frac{4}{5}xy^3\right)\vec{\imath}+\left(\frac{6}{5}x^2y^2+x^2\right)\vec{\jmath}$$

najděte funkci φ tak, že zadané vektorové pole je rovno gradientu $\nabla\varphi$.

Řešení:

Platí $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=y+\dfrac{4}{5}xy^3$ a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{6}{5}x^2y^2+x^2$.

Odsud

$$\varphi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x=\int y+\frac{4}{5}xy^3\,\mathrm{d}x=xy+\frac{4}{5}\frac{x^2}{2}y^3=xy+\frac{2}{5}x^2y^3+C_1(y)$$

a

$$\varphi=\int\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\int\frac{6}{5}x^2y^2+x^2\,\mathrm{d}y=\frac{2}{5}x^2\frac{y^3}{3}+x^2y=\frac{2}{5}x^2y^3+x^2y+C_2(x).$$

Porovnáním musí být

$$xy+C_1(y)=x^2y+C_2(x),$$

což není možné splnit.

Ověříme, že parciální derivace $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y+\dfrac{4}{5}xy^3\right)$ a $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{6}{5}x^2y^2+x^2\right)$ jsou různé. Platí

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y+\frac{4}{5}xy^3\right)=1+\frac{12}{5}xy^2$$

a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6}{5}x^2y^2+x^2\right)=\frac{12}{5}xy^2+2x$$

a protože obě parciální derivace jsou různé, kmenová funkce neexistuje.