# 3 Divergence, rovnice vedení tepla

## 3.1 Divergence vektorového pole

a) Vypočtěte divergenci vektorového pole

$$\vec{F} = x^2 y\vec{\imath} + (x + y^2)\vec{\jmath}.$$

b) Zakreslete do obrázku směr toku vektorového pole v bodě $(2, 1)$.

c) Vypočtěte divergenci vektorového pole v bodě $(2, 1)$ a podle toho, zda je kladná nebo záporná rozhodněte, zda tok v daném bodě sílí nebo slábne.

d) Předpokládejme, že dané vektorové pole reprezentuje stacionární tok. Je v bodě $(2, 1)$ zdroj nebo spotřebič?

**Řešení:**

a) $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x + y^2\right) = 2xy + (0 + 2y) = 2y(x + 1)$

b) $\vec{F}(2, 1) = 2^2 \cdot 1\vec{\imath} + (2 + 1^2)\vec{\jmath} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} = (4, 3)$, tj. vektorové pole teče směrem doprava nahoru směrem daným směrnicí 0.75, tj. pod úhlem menším než $45^\circ$.

c) $\nabla \cdot \vec{F}(2,1) = 2 \cdot 1 \cdot (2+1) = 6 > 0$. Divergence je kladná a proto se tok zahušťuje.

d) Zdroj (kladná divergence).

## 3.2 Divergence vektorového pole s parametrem

a) Vypočtěte divergenci vektorového pole

$$\vec{F} = ax^3y^2\vec{\imath} + 3x^2y\vec{\jmath},$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je reálný parametr.

b) Určete hodnotu parametru $a$ tak, aby pole bylo v bodě $(-1, 2)$ nezřídlové, tj. aby mělo nulovou divergenci v bodě $(-1, 2)$.

**Řešení:**

a) $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^3y^2\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y\right) = 3ax^2y^2 + 3x^2 = 3x^2\left(ay^2 + 1\right)$

b) $\nabla \cdot \vec{F}(-1, 2) = 3(-1)^2(a \cdot 2^2 + 1) = 3(4a + 1)$ a $\nabla \cdot \vec{F}(-1, 2) = 0$ pokud $3(4a + 1) = 0$, tj. $a = -\dfrac{1}{4}$.

## 3.3 Rovnice vedení tepla v dvourozměrném materiálu

Teplota ve dvourozměrné desce pro $0 \leq x \leq 10$ a $0 \leq y \leq 10$ zachycené v určitém okamžiku termokamerou je popsána rovnicí

$$T(x,y) = (2x-y)^2 + x^4.$$

Rozměry jsou v centimetrech, teplota ve stupních Celsia. (Formálně to nevychází, ale ke každému členu můžeme dodat konstantu, která jeho rozměr opraví. Pro jednoduchost tuto komplikaci vynecháme.)

Zdroj: pixabay.com

a) Vypočtěte gradient $\nabla T$ a tok tepla $-k\cdot\nabla T$. Součinitel tepelné vodivosti (v jednotkách kompatibilních se zadáním) je $k = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Určete, zda na levém okraji desky teče teplo dovnitř desky nebo z desky ven.

c) Vypočtěte divergenci toku tepla, tj. $\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T)$.

d) V desce nejsou zdroje tepla. Ochlazuje se deska uprostřed, nebo otepluje?

**Řešení:**

a) Gradient je vektor složený z parciálních derivací.

$$\nabla T = \left(4(2x-y)+4x^3, -2(2x-y)\right)^T$$

Tok je tenzor vodivosti maticově vynásobený s gradientem teploty a faktorem $(-1)$.

$$-k\cdot\nabla T = -\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4(2x-y)+4x^3\\ -2(2x-y)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}14(2x-y)+16x^3\\ -8(2x-y)+4x^3\end{pmatrix}$$

b) Do vztahu pro tok dosadíme rovnici levého okraje desky, tj. $x=0$.

$$-k\cdot\nabla T(x=0) = \begin{pmatrix}14y\\ -8y\end{pmatrix}$$

Na levém okraji desky je $y>0$ a proto $14y>0$. Tok míří doprava a teplo teče na tomto okraji do desky.

c) Vypočteme divergenci toku určeného v prvním bodě.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-14(2x-y) - 16x^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(8(2x-y) - 4x^3\right) \\ &= -48x^2 - 28 - 8 \\ &= -48x^2 - 36\end{aligned}$$

d) Do vztahu pro diveregenci dosadíme bod, který nás zajímá.

$$\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T)(x = 5, y = 5) = -1236$$

Tok tepla se zmenšuje a protože jde o stav bez zdrojů, teplo se v daném místě akumuluje a deska se proto otepluje. Z rovnice vedení tepla

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T)$$

plyne v daném bodě

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 1236$$

a můžeme dokonce odhadnout, jak rychle teplota roste.

## 3.4 Vedení tepla v různých materiálech

a) Zapište rovnici vedení tepla v trojrozměrném izotropním a v trojrozměrném ortotropním materiálu. Ve druhém případě volte osy ve směru vlastních vektorů.

b) Napište, jak je možné zjednodušit rovnice z předchozího bodu, pokud jsou materiálové konstanty nezávislé na poloze (homogenní materiál) a na teplotě (lineární materiál).

**Řešení:**

a) Izotropní: $\varrho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(k \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k \dfrac{\partial T}{\partial z}\right)$

Ortotropní: $\varrho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_x \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(k_y \dfrac{\partial T}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k_z \dfrac{\partial T}{\partial z}\right)$

b) Izotropní: $\varrho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = k \left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$

Ortotropní: $\varrho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = k_x \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$