2 Gradient

2.1 Linearizace pocitové teploty

Pocitová teplota W z minulého cvičení má v bodě odpovídajícím teplotě $T = -11°\mathrm{C}$ a rcyhlosti větru $v = 26\,\mathrm{km\,hod}^{-1}$ má hodnotu

$$W = -20.2°\mathrm{C}$$

a parciální derivace

$$\frac{\partial W}{\partial v} = -0.163°\mathrm{C\,hod\,km}^{-1}$$

Zdroj: pixabay.com

a

$$\frac{\partial W}{\partial T} = 1.289.$$

Najděte pomocí lineární aproximace vzorec pro pocitovou teplotu v okolí tohoto bodu.

Řešení:

Přímým použitím vzorce pro lineární aproximaci dostáváme

$$\begin{aligned} W &= -20.2 + 1.289(T - (-11)) - 0.163(v - 26) \\ &= -20.2 + 1.289(T + 11) - 0.163(v - 26), \end{aligned}$$

přičemž všechny veličiny dostazujeme v jednotkách SI (stupně Celsia a kilometry za hodinu).

2.2 Parciální derivace, gradient

Určete gradient funkcí $z = ax^2y - 2xy^2$ a $h = \dfrac{ax}{y^2} + 5x^3y^2$, kde $a \in \mathbb{R}$ je reálný parametr.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2axy - 2y^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = ax^2 - 4xy$$
$$\nabla z = (2axy - 2y^2, ax^2 - 4xy) = (2axy - 2y^2)\vec{\imath} + (ax^2 - 4xy)\vec{\jmath}$$
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a}{y^2} + 15x^2y^2$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = ax(-2)y^{-3} + 10x^3y = -\frac{2ax}{y^3} + 10x^3y$$
$$\nabla h = \left(\frac{a}{y^2} + 15x^2y^2, -\frac{2ax}{y^3} + 10x^3y\right) = \left(\frac{a}{y^2} + 15x^2y^2\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{2ax}{y^3} + 10x^3y\right)\vec{\jmath}$$

2.3 Gradient funkce s vrstevnicemi ve tvaru kružnic

Určete gradient funkce $z = x^2 + y^2$ a zkontrolujte, že je v každém bodě kolmý ke kružnici se středem v počátku. Využijte toho, že spojnice bodu na kružnici se středem kružnice je kolmá k této kružnici.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

$$\nabla z = (2x, 2y) = 2x\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath}$$

Vektor $(2x, 2y)$ v bodě (x, y) míří směrem od počátku, tj ve směru spojnice se středem a tedy je kolmý k vrstevnici.

2.4 Gradient funkce s paprskovitými vrstevnicemi

Určete gradient funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ a zkontrolujte, že je v každém bodě tečný ke kružnici se středem v počátku. Využijte toho, že tečna je kolmá na poloměr.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} y \frac{(-1)}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\nabla z = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$$

Vektor $(-y, x)$ v bodě (x, y) je kolmý k vektoru (x, y) a míří směrem od počátku, tj. k poloměru. Proto je tečný ke kružnici.

2.5 Tečná rovina atd.

Pro funkci $f(x,y) = x^2 + \dfrac{x}{y^2} - 6$ najděte

a) gradient,

b) gradient v bodě $(2,1)$,

c) lineární aproximaci v bodě $(2,1)$,

d) tečnou rovinu v bodě $(2,1)$,

e) rovnici vrstevnice bodem $(2,1)$ a rovnici tečny k vrstevnici tímto bodem,

f) explicitní vyjádření funkce dané v okolí bodu $(2,1)$ implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$,

g) lineární aproximace v okolí bodu $x = 2$ pro funkci získanou v předchozím bodu.

Řešení:

a) $\nabla f = \left(2x + \dfrac{1}{y^2}, -2\dfrac{x}{y^3}\right)$

b) $\nabla f(2,1) = (5,-4)$

c) $f(x,y) \approx 5(x-2) - 4(y-1)$

d) $z = 5(x-2) - 4(y-1)$

e) Rovnice vrstevnice je

$$x^2 + \frac{x}{y^2} - 6 = 0$$

a tečna

$$5(x-2) - 4(y-1) = 0,$$

tj.

$$5x - 4y - 6 = 0.$$

f) Postupnými úpravami a výběrem správného znaménka po vyřešení kvadratické rovnice vzhledem k y dostáváme

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{x}{y^2} - 6 &= 0 \\ \frac{x}{y^2} &= 6 - x^2 \\ y^2 &= \frac{x}{6 - x^2} \\ y &= \sqrt{\frac{x}{6 - x^2}} \end{aligned}$$

g) Z rovnice tečny k vrstevnici

$$5(x-2) - 4(y-1) = 0$$

dostáváme

$$y = 1 + \frac{5}{4}(x-2)$$

a proto

$$\sqrt{\frac{x}{6-x^2}} \approx 1 + \frac{5}{4}(x-2)$$

v okolí $x = 2$.

2.6 Linearizace vektorové funkce, Jacobiho matice

Jacobiho matice se používá k linearizaci vektorových funkcí, které mají na vstupu i na výstupu vektor. Jsou to matice, kde gradienty jednotlivých komponent vektorové funkce jsou zapsány do řádků matice.

Najděte Jacobiho matici pro funkci

$$\vec{F}(x,y) = (x^2 + xy + 6y)\vec{i} + e^{3x}\vec{j}$$

a poté hodnotu této matice v bodě $(0,0)$.

Řešení:

Platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy+6y\right) &= 2x+y\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xy+6y\right) &= x+6\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{3x}\right) &= 3e^{3x}\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{3x}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

a proto má Jacobiho matice tvar

$$
J(x,y)=\begin{pmatrix} 2x+y & x+6\\ 3e^{3x} & 0\end{pmatrix}.
$$

V bodě $(0,0)$ potom

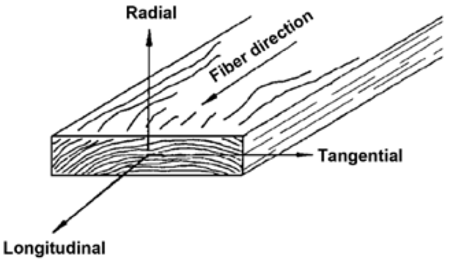
$$
J(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 6\\ 3 & 0\end{pmatrix}.
$$

2.7 Parciální derivace, gradient a násobení matic

Vypočtěte gradient funkce

$$T = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ukažte, že vrstevnice této funkce jsou kružnice se středem v počátku, nakreslete obrázek s těmito vrstevnicemi a vyznačte do tohoto obrázku gradienty v bodech $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$ a $C = (1, 1)$



Zdroj: Wood handbook

Uvažujte součinitel tepelné vodivosti

$$\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a vypočtěte tok tepla v bodech A, B, C. Porovnejte směr tohoto toku se směrem gradientu a vysvětlete svá pozorování. Snaží se matice usměrnit teplo do směru osy x nebo do směru osy y? Odpovídá situace spíše dřevu s podélným směrem v ose x nebo v ose y?

Řešení:

Platí

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a ze symetrie

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Odsud

$$\nabla T = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^T = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)^T.$$

Tok tepla je

$$\vec{q} = -\lambda\nabla T = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}2x\\ 3y\end{pmatrix}$$

Dosazením dostáváme $\vec{q}(A) = (0,3)^T$, $\vec{q}(B) = (2,0)^T$, $\vec{q}(C) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2,3)^T$. Porovnáním s gradientem $\nabla T(A) = -(0,1)^T$, $\nabla T(B) = -(1,0)^T$ a $\nabla T(C) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ vidíme, že v bodech A a B je tok proti směru gradientu, v bodě C se tok stáčí do směru osy y. Protože ve ose y má dřevo větší vodivost, jedná se o podélný směr. To je ale vlastně vidět už ze zadané matice.