10 Autonomní systémy

10.1 Stavebniny vedle čebínského nádraží: model

Hromada sypkého materiálu má tvar kužele. Úhel u vrcholu je konstantní, daný mechanickými vlastnostmi materiálu a je nezávislý na objemu. Předpokládejme, že personál stavebnin přisypává na hromadu materiál konstantní rychlostí (v jednotkách objemu za jednotku času). Tato hromada je však v poměrně otevřené krajině a vítr rozfoukává materiál po okolí. Je rozumné předpokládat, že rozfoukávání (opět v jednotkách objemu za jednotku času) se děje rychlostí úměrnou povrchu návětrné strany pláště.

Zdroj: vlastní

- Napište rovnici pro derivaci objemu hromady podle času.
- Existuje konstantní řešení? Pokud ano, je stabilní nebo nestabilní? Zdůvodněte.
- Může hromada skončit i při neustálém přisypávání celá rozfoukaná?
- Mohou pracovníci navršit hromadu do libovolné výšky anebo pro velkou hromadu je již rozfoukávání rychlejší než přisypávání?

Řešení: Rychlost s jakou se mění objem je $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$, rychlost přisypávání označme R, povrch návětrné strany S. Podle zadání platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - k_0 S.$$

Protože kužel má stále stejný tvar, objem jednoznačně determinuje rozměry, povrch kužele, nebo i povrch poloviny pláště, tj. povrch návětrné strany. Z podobnosti víme, že plochy rostou s druhou mocninnou a objemy se třetí mocninou délkových rozměrů. Proto je zřejmé, že musí platit úměrnost mezi takovými mocninami těchto veličin, pro které jednotky "pasují", Existuje tedy konstanta taková, že

$$S = k_1 V^{\frac{2}{3}}.$$

Spojením těchto dvou vztahů dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = R - k\ V^{\frac{2}{3}},$$

kde r a $k = k_0 k_1$ jsou konstanty.

Označme $f(V) = R - kV^{\frac{2}{3}}$. Konstantní řešení je řešením rovnice $f(V) = 0$, tj.

$$R - kV^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Odsud

$$V_0 = \left(\frac{R}{k}\right)^{3/2}.$$

Protože f klesá v bodě V_0, je toto řešení stabilní.

Protože $f(0) > 0$, malá hromada vždy roste a proto nemůže skončit celá rozfoukaná. Pro malý objem je přisypávání intenzivnější než rozfoukávání.

Protože f je pro velké V záporná, pro velkou hromadu objem ubývá (více se rozfouká než přisype) a hromadu není možné navršit libovolně velkou.

10.2 Časový rozestup mezi trolejbusy

Zdroj: vlastní

Uvažujme dva trolejbusy jedoucí za sebou po stejné trati. Označme $x(t)$ jejich časový odstup. Pokud první trolejbus zastaví na určité zastávce v čase t, druhý trolejbus na tuto zastávku dorazí v čase $x(t)$. Naším úkolem je zjistit, jak se $x(t)$ mění s rostoucím t.

Předpokládejme, že **(1)** pokud žádní pasažéři nečekají na druhý vůz, druhý vůz se pohybuje rychleji než první vůz a oba vozy se "sjedou", tj. $x(t)$ klesá konstantní rychlostí, pokud na druhý vůz nečekají žádní pasažéři **(2)** rychlost druhého vozu klesá (a rozestup roste) s rostoucím počtem pasažérů, kteří čekají na zastávce **(3)** počet pasažérů kteří čekají na zastávce roste s rostoucím intervalem mezi oběma vozy.

Navrhněte model pro rozestup trolejbusů, najděte stacionární řešení a posuďte jeho stabilitu.

Řešení:

Situaci je možno modelovat diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \beta x - \alpha,$$

kde α a β jsou kladné reálné konstanty. Tato rovnice má konstantní řešení $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Toto řešení je nestabilní, protože

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\beta x - \alpha) = \beta > 0.$$

Žádné jiné konstantní řešení neexistuje a proto všechna řešení klesají na nulu nebo neohraničeně rostou.

Vzhledem k nestabilitě stacionárního řešení nemůžeme nechat řidiče veřejné dopravy jezdit "jak jim to vyjde". Situace by směřovala k tomu, že cestující budou nejprve dlouho čekat na trolejbus a nakonec přijede několik trolejbusů těsně za sebou. (Podle knihy P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall: Differential equations, Cengage Learning (2006), 828 pp.)

10.3 Propeptid kolagenu

Kolagen je klíčový protein pojivových tkání. Jeden z kroků při syntéze kolagenu spočívá v reakci tří molekul propeptidu kolagenu, zkráceně propeptidu. Tento propeptid se formuje konstantní rychlostí a kromě toho, že je surovinou pro produkci kolagenu, se ještě rozpadá rychlostí úměrnou koncentraci. Napište matematický model pro množství (koncentraci) propeptidu kolagenu.

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life

Zdroj: pixabay.com

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -k_1 P^3 + k_2 - k_3 P$$

10.4 Jelen a los

Uvažujme populaci jelenů a losů. Tyto populace spolu soupeří o potravu. **(1)** Bez konkurence by populace jelena rostla rychlostí 3 a populace losa rychlostí 2 na jeden kus. **(2)** Vnitrodruhová konkurence se projevuje v obou populacích stejně a je rovna druhé mocnině příslušné velikosti populace. **(3)** Mezidruhová konkurence je vyjádřena členem rovným součinu velikosti populací a tato konkurence se projeví s koeficientem 0.5 v populaci losa a s koeficientem 1 v populaci jelena.

Zdroj: pixabay.com

Sestavte matematický model a otestujte jej numerickým experimentem na stabilitu stacionárních bodů. Poté zdvojnásobte parametry mezidruhové konkurence a sledujte změnu odezvy.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x - xy - x^2$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2y - 0.5xy - y^2$$

10.5 Puštík obecný

Puštík obecný se téměř výhradně živí malými hlodavci. Předpokládejme následující vztahy. **(1)** Populace hlodavců má porodnost 0.1 na jedince a úmrtnost 0.025 na jedince za jednotku času. **(2)** Rychlost s jakou jeden puštík konzumuje hlodavce je úměrná počtu hlodavců s kostantou úměrnosti 0.01. **(3)** Porodnost v populaci puštíka je úměrná množství zkonzumované potravy s konstantou úměrnosti 0.05. **(4)** Úmrtnost v populaci puštíka je 0.1 na jedince za jednotku času.

Zdroj: wikimedia

Vyjádřete tyto vztahy matematickým modelem.

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life. Doslova přeloženo. Porodnost je ve skutečnosti společný efekt zvýšené porodnosti a snižené úmrtnosti v případě, že puštík má přístup k potravě.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.1x - 0.025x - 0.01xy$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.1y + 0.05xy$$

10.6 Kůň Převalského

Zdroj: pixabay.com

Kůň Převalského je divoký kůň ze střední Asie, jediný druh koně, který nebyl domestikován. V divočině jsou tyto koně loveni vlky. Napište matematický model založený na následujících předpokladech. **(1)** Porodnost v populaci koní je 0.15 na jedince. **(2)** Úmrtnost v populaci koní je 0.01 na jedince. **(3)** Vlci se živí i jinou potravou, mají tedy kladnou porodnost. Ta je 0.1 na jedince. **(4)** Vlci mají konstantní úmrtnost 0.05 na jedince. **(5)** Pravděpodobnost s jakou je kůň uloven vlkem je úměrná počtu vlků s konstantou úměrnosti 0.02.

Podle Alan Garfinkel, Jane Shevtsov, Yina Guo: Modeling Life

Podle Wikipedie kůň Převalského přežil jenom díky péči zoologických zahrad a z rodokmenu je zřejmé, že 70 procent jedinců tohoto druhu má původní předky ze zoologické zahrady v Praze.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 0.15x - 0.01x - 0.05xy \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 0.1y - 0.05y
\end{aligned}
$$

10.7 Analýza pomocí vlastních čísel

Autonomní systém

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 4x^2y + y^3 - 5\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 3xy^2 - 3y\end{aligned}$$

má stacionární bod $(1,1)$. Najděte Jacobiho matici v tomto bodě, vlastní čísla této matice a určete typ stacioárního bodu.

Řešení:

Platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y + y^3 - 5) &= 8xy\\ \frac{\partial}{\partial y}(4x^2y + y^3 - 5) &= 4x^2 + 3y^2\\ \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 - 3y) &= 3y^2\\ \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 - 3y) &= 6xy - 3\end{aligned}$$

a odsud
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 8xy & 4x^2+3y^2 \\ 3y^2 & 6xy-3 \end{pmatrix}.$$
Ve stacionárním bodě dostáváme
$$J(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$
Výpočtem determinantu dostáváme
$$|J-\lambda I| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 7 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(3-\lambda) - 21 = \lambda^2 - 11\lambda + 3.$$
Kořeny jsou
$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-12}}{2}$$
a oba jsou kladné. Ve stacionárním bodě proto je nestabilní uzel.