1 Parciální derivace

1.1 Výpočet pomocí vzorců

Vypočtěte následující parciální derivace

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right)$

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right)$

c) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x(3 - x - 2y)\right)$

d) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x(3 - x - 2y)\right)$

e) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$

f) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$

g) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$

h) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$

Řešení:

a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right) = 2x \cdot y + 2y^3 + 1 + 0 = 2xy + 2y^3 + 1$

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + 2xy^3 + x + 1\right) = x^2 + 2x \cdot 3y^2 + 0 + 0 = x^2 + 6xy$

c) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x(3-x-2y)\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(9x-3x^2-6xy\right)=9-3\cdot 2x-6\cdot 1\cdot y=9-6x-6y$

d) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x(3-x-2y)\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(9x-3x^2-6xy\right)=0-0-6x=-6x$

e) $\cdots=\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(0-2x-0)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

f) $\cdots=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ (z předchozího výpočtu a symetrie)

g) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{1(x^2+y^2)-x(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}=\cdots$ (derivace podílu)

h) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x(x^2+y^2)^{-1}\right)=x(-1)(x^2+y^2)^{-2}(0+2y)=\cdots$ (derivace konstantního násobku mocninné funkce s vnitřní složkou)

1.2 Parciální derivace, pocitová teplota analyticky

Zdroj: pixabay.com

Kanadský empirický vzorec pro pocitovou teplotu v zimě (wind chill factor) je

$$W(T,v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16},$$

kde T je teplota (ve stupních Celsia) a v je rychlost větru (v km/hod). Teplota je $-11.0\,^\circ\mathrm{C}$ a rychlost větru $26\,\mathrm{km/hod}$. Určete parciální derivace pocitové teploty podle skutečné teploty a podle rychlosti větru (včetně jednotky) a výsledky interpretujte slovně.

Řešení:

Dosazením do vzorce dostáváme $W(-11,26) = -20.212\,^\circ\mathrm{C}$. Derivováním dostáváme

$$\frac{\partial W}{\partial T}(T,v) = 0.6215 + 0.3965v^{0.16},$$
$$\frac{\partial W}{\partial v}(T,v) = -11.37 \times 0.16v^{-0.84} + 0.3965 \times 0.16Tv^{-0.84}$$

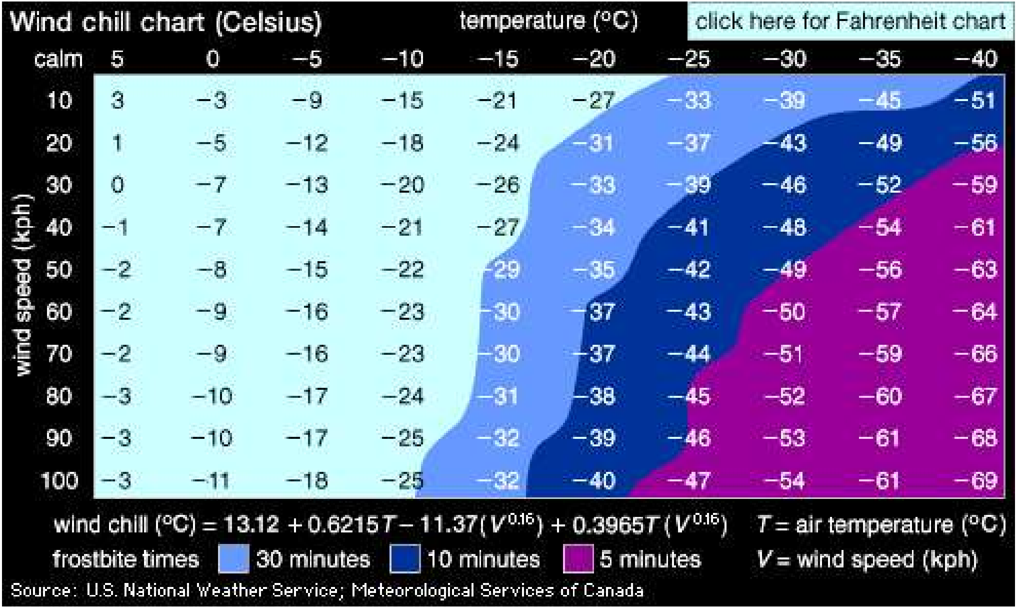
a po dosazení

$$\frac{\partial W}{\partial T}(-11,26) = 1.289,$$
$$\frac{\partial W}{\partial v}(-11,26) = -0.163\,℃\,/(\mathrm{km\,hod}^{-1}) = -0.163\,℃\,\mathrm{hod\,km}^{-1}.$$

Za dané teploty a rychlosti větru je pocitová teplota -20.2 stupňů Celsia. Nárůst teploty o jeden stupeň způsobí nárůst pocitové teploty přibližně o 1.3 stupně. Tedy změna teploty se projeví na pocitové teplotě 1.3-násobkem, tj. každkouzměnu vnímáme o třicet procent intenzivněji.

Podobně, zesílení větru o jeden kilometr za hodinu způsobí snížení pocitové teploty přibližně o 0.16 stupně.

1.3 Pocitová teplota numericky



Wind chill chart (Celsius)

click here for Fahrenheit chart

wind speed (kph) \ temperature (°C)	5	0	−5	−10	−15	−20	−25	−30	−35	−40
10	3	−3	−9	−15	−21	−27	−33	−39	−45	−51
20	1	−5	−12	−18	−24	−31	−37	−43	−49	−56
30	0	−7	−13	−20	−26	−33	−39	−46	−52	−59
40	−1	−7	−14	−21	−27	−34	−41	−48	−54	−61
50	−2	−8	−15	−22	−29	−35	−42	−49	−56	−63
60	−2	−9	−16	−23	−30	−37	−43	−50	−57	−64
70	−2	−9	−16	−23	−30	−37	−44	−51	−59	−66
80	−3	−10	−17	−24	−31	−38	−45	−52	−60	−67
90	−3	−10	−17	−25	−32	−39	−46	−53	−61	−68
100	−3	−11	−18	−25	−32	−40	−47	−54	−61	−69

calm

wind chill (°C) $= 13.12 + 0.6215T - 11.37(V^{0.16}) + 0.3965T(V^{0.16})$ T = air temperature (°C)

frostbite times: 30 minutes, 10 minutes, 5 minutes V = wind speed (kph)

Source: U.S. National Weather Service; Meteorological Services of Canada

a) Vypočtěte pomocí centrální diference parciální derivaci $\dfrac{\partial W}{\partial v}$ pro teplotu $-15°$C a rychlost větru $40\,\mathrm{km\,hod}^{-1}$ a intepretujte výsledek slovně.

b) Pocitová teplota W je lineární v proměnné T. Proto derivace $\dfrac{\partial W}{\partial T}$ nezávisí na T. Jak se tato skutečnost odrazí v tabulce?

c) Odhadněte z tabulky, zda vliv větru klesá nebo roste s rychlostí větru. Potvrďte svou hypotézu analytickým výpočtem parciální derivace $\dfrac{\partial W}{\partial v}$ a vysvětlete fyzikálně.

Řešení:

a)

$$\frac{\partial W}{\partial v}(T=-15, v=40) \approx \frac{-29-(-26)}{50-30}\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{km\,hod}^{-1}} = -0.15°\mathrm{C}/(\mathrm{km\,hod}^{-1})$$

Za podmínek, kde je 15 stupňů pod nulou a vítr o rychlosti 40 kilometrů za hodinu každé další zesílení větru o kilometr za hodinu sníží pocitovou teplotu přibližně o patnáct setin stupně.

b) Neformálně: V rámci každého řádku jsou stejně velké skoky. Přesněji: V každém řádku je přibližně aritmetická posloupnost, data se mění odečtením pevné konstantny. Případné fluktuace od tohoto pravidla jsou způsobeny zaokrouhlením.

c) Pokud se díváme na data po sloupcích, s rostoucí silou větru jsou skoky menší a proto parciálni derivace podle větru s rostoucí rychlostí větru klesá. To potvrzuje i analytický výpočet, protože u rychlosti je mocnina menší než jedna a ta se po zderivání změní na zápornou mocninu a tím se změní charakter závislosti na rychlosti větru. Fyzikálně vítr odfoukává izolační mikrovrstvu vzduchu kolem tváře nebo těla a proto cítíme ve větším větru větší chlad. Pokud je vítr silný, nestačí se tato mikrovstva vytvořit ani v minimální míře a proto je jedno, jestli fouká hodně nebo ještě více.

1.4 Parciální derivace, tepelná kapacita dřeva

Vypočtěte a slovně interpretujte parciální derivaci měrné tepelné kapacity dřeva c podle teploty T a podle obsahu vody MC w v bodě o hodnotě MC 12% a teplotě 27°C.

Pro obě derivace použijte dopřednou diferenci (v tabulce nejsou ekvidistatní kroky MC).

Poznámka: Kromě dopředné diference je možné uvažovat ještě zpětou diferenci definovanou vztahem

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

což je vlastně dopředná diference na předhozím intervalu. Ukažte, že centrální diference je průměrem dopředné a zpětné diference.

Table 4–8. Heat capacity of solid wood at selected temperatures and moisture contents

Temperature		Heat capacity (kJ kg^{-1} K^{-1} (Btu lb^{-1} °F^{-1}))			
(K)	(°C (°F))	Ovendry	5% MC	12% MC	20% MC
280	7 (44)	1.2 (0.28)	1.3 (0.32)	1.5 (0.37)	1.7 (0.41)
290	17 (62)	1.2 (0.29)	1.4 (0.33)	1.6 (0.38)	1.8 (0.43)
300	27 (80)	1.3 (0.30)	1.4 (0.34)	1.7 (0.40)	1.9 (0.45)
320	47 (116)	1.3 (0.32)	1.5 (0.37)	1.8 (0.43)	2.0 (0.49)
340	67 (152)	1.4 (0.34)	1.6 (0.39)	1.9 (0.46)	2.2 (0.52)
360	87 (188)	1.5 (0.36)	1.7 (0.41)	2.0 (0.49)	2.3 (0.56)

Zdroj: Wood handbook

Řešení:

$$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{1.8 - 1.7}{47 - 27} = 0.005\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}K^{-2}} = 5\,\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-2}}$$

Tato hodnota udává, o kolik vzroste měrná tepelná kapacita dřeva dané teploty a vlhkosti při zvýšení teploty o jeden stupeň Celsia (o jeden Kelvin).

$$\frac{\partial c}{\partial w} = \frac{1.9 - 1.7}{20 - 12} = 0.025\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}K^{-1}}(\text{procento MC})^{-1} = 25\,\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}(\text{procento MC})^{-1}$$

Tato hodnota udává, o kolik vzroste měrná tepelná kapacita dřeva dané teploty a vlhkosti při zvýšení obsahu vody o jedno procento.

Průměr centrální a zpětné diference:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{2} &= \frac{\frac{f(x)-f(x-h)+f(x+h)-f(x)}{h}}{2} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\end{aligned}$$

1.5 Veličiny z rovnice vedení tepla

V případech, kdy je při tepelné výměně nutno uvažovat vedení tepla (vysoké Biotovo číslo), modelujeme změnu teploty podle rovnice vedení tepla, kterou jsme na přednášce odvodili pro jednorozměrný případ ve tvaru

$$\varrho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\Big).$$

Typickým případem vedení tepla v jedné dimenzi je vedení tepla ve stěně.

Uvažujme jednorozměrnou úlohu s vedením tepla. Osa x směřuje doprava, teplota v bodě x a čase t je $T(x,t)$ ve stupních Celsia. Tok tepla v čase t a v bodě x je $q(x,t)$ v joulech za sekundu. Kladný tok je ve směru osy x. Podle Fourierova zákona je

$$q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Tyč má teplotu $0\,^\circ$C, pravý konec udržujeme na této teplotě, levý konec ohříváme na $20\,^\circ$C a udržujeme na této teplotě. Ve zbytku tyče (stěny) se postupně nastolí rovnováha vlivem vedení tepla.

Vyjádřete následující veličiny a určete jejich znaménko.

a) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času.
b) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle roste teplota směrem doprava.
c) Rychlost, jak rychle se klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava.
d) Rychlost, se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.
e) Rychlost, se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy.

Řešení:

a) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce času je $\frac{\partial T}{\partial t}$ a tato derivace je v každém bodě kladná, protože tyč se ohřívá. Po čase se asi ustálí rovnováha a derivace bude nulová, teplota se přestane měnit. Měříme ve stupních celsia za sekundu. $\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = {}^\circ\mathrm{C}\,\mathrm{s}^{-1}$

b) Rychlost, s jakou v daném místě a čase roste teplota jako funkce polohy, tj. jak rychle se roste teplota směrem doprava, je $\frac{\partial T}{\partial x}$ a tato derivace je záporná, protože vlevo je horký konec a teplota směrem doprava klesá. Měříme ve stupních celsia na metr. $\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = {}^\circ\mathrm{C}\,\mathrm{m}^{-1}$

c) Rychlost, jak rychle se klesá teplota jako funkce polohy, tj. směrem doprava, je $-\frac{\partial T}{\partial x}$ a tato veličina je kladná, protože vlevo je horký konec a teplota směrem doprava opravdu klesá. Měříme ve stupních celsia na metr. $\left[-\frac{\partial T}{\partial x}\right] = {}^\circ\mathrm{C}\,\mathrm{m}^{-1}$

d) Rychlost, se kterou roste (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy je $\frac{\partial q}{\partial x}$.

Teplo teče doprava a přitom se spotřebovává, protože se ohřívá tyč. Proto tok klesá a parciální derivace je záporná. Měříme v joulech za sekundu na metr. $\left[\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}}$

e) Rychlost, se kterou klesá (směrem doprava) tok tepla jako funkce polohy je $-\frac{\partial q}{\partial x}$ a tato veličina je kladná, což plyne z předchozího bodu a z toho, že jsme změnili znaménko. Měříme v joulech za sekundu na metr. $\left[-\frac{\partial q}{\partial x}\right] = \mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}}$ Tato veličina udává, kolik tepla se za jednotku času ubude v toku na metrovém úseku tyče. Ze zákona zachování energie se toto teplo nemůže "ztratit", ale použije se na zvýšení teploty, což je vyjádřeno právě v rovnici vedení tepla.

1.6 Okrajové podmínky pro rovnici vedení tepla

K modelu stěny pomocí rovnice vedení tepla je ještě nutné přidat podmínky související s počátečním stavem (počáteční podmínky) a s chováním na okrajích (okrajové podmínky).

Nechť stěna je na intervalu $x \in [0, L]$, $x = 0$ je vnitřní okraj a $x = L$ je vnější okraj. Výraz $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}$ udává tok tepla ve směru osy x. Tok ve směru osy x má kladné znaménko. Naformulujte okrajové podmínky v následujících scénářích.

a) Z venku dokonale izolovaná stěna. Na hranici $x = L$ nedochází k toku tepla.

b) Vnitřní část stěny je udržovaná na konstantní teplotě $T = 23^\circ$C.

c) Stěna je zvenku osvětlená a zahřívaná Sluncem. Na vnější hranici je konstantní tok tepla směrem do stěny.

d) Stěna je zvenku ochlazována prouděním vzduchu. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.

e) Stěna je zevnitř ohřívána prouděním vzduchu od radiátorů. Tok tepla mezi stěnou a okolím je úměrný rozdílu teplot stěny a okolí.

Zpracováno podle Cengel: Mass and heat transfer.

Řešení:

a) $\dfrac{\partial T}{\partial x}(L) = 0$

b) $T(0) = 23$

c) $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}(L) = -Q$, kde Q je teplo za jednotku času dodané ze Slunce. Jedná se výkon Slunce dopadající na stěnu vynásobený koeficientem absorbce, protože část tepelného výkonu se odráží. Záporné znaménko je proto, že teplo teče do stěny, tj. proti směru osy x.

d) $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}(L) = h(T - T_{\text{okolí}})$, kde h je koeficient přestupu tepla.

e) $-k\dfrac{\partial T}{\partial x}(0) = h(T_{\text{místnost}} - T)$, kde h je koeficient přestupu tepla. Všimněte si, že poslední dvě podmínky se liší znaménkem u veličiny T. To proto, že v jednom případě je kladný směr toku tepla do materiálu a jednou z materiálu. Pokud chceme mít popis jednotný, nebo nezávislý na zvolené souřadné soustavě, formulujeme podmínky pro tok tepla ven z materiálu. Tento tok získáme tak, že tok tepla vynásobíme skalárně s jednotkovým vektorem směřujícím ven z materiálu kolmo na jeho povrch. V tomto případě by pro tok ze stěny do místnosti bylo $k\dfrac{\partial T}{\partial x}(0) = h(T - T_{\text{místnost}})$. Tento tok by byl záporný, protože ve skutečnosti teplo uniká z místnosti stěnou ven.