Kapitola 1

Lineární algebra

1.1 Vektory a počítání s nimi

Definice 1.1. *Vektorem* rozumíme libovolnou uspořádánou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Značíme

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Jednotlivým prvkům $x_1, x_2, \ldots, x_n$ říkáme složky vektoru, číslo n se nazývá dimenze vektoru $\vec{v}$.

Dva vektory $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou si rovny, jestliže se rovnají odpovídající si složky, tj.

$$\vec{x} = \vec{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \ldots,\ x_n = y_n.$$

Vektor můžeme též zapsat jako

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definice 1.2. Množina všech vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$ společně s operacemi sčítání vektorů

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

a násobením vektoru číslem $c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n)$$

se nazývá vektorový prostor $\mathbb{R}^n$.

Vektor $\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ se nazývá nulový vektor.

Poznámka 1.3. Obecně se vektor definuje jako prvek abstraktní struktury, které se říká vektorový prostor. Roli vektorů pak mohou hrát nejen uspořádané n-tice čísel, ale třeba i funkce, matice, posloupnosti atd.

Počítání s vektory má mnoho podobných vlastností jako počítání s čísly:

Věta 1.4. *Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou libovolné vektory z $\mathbb{R}^n$ a c, $d \in \mathbb{R}$, pak*

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *(komutativní zákon)*
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ *(asociativní zákon)*
3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$

5. $c(\vec{u}+\vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$ *(distributivní zákon)*

6. $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$ *(distributivní zákon)*

7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$

8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Definice 1.5. Nechť $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom *skalární součin* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ je definován jako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \,.$$

Definice 1.6. *Velikostí* vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme nezáporné číslo

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Definice 1.7. Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme *ortogonální*, právě když

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0\,.$$

Definice 1.8. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V. Vektor $\vec{x}$, pro který platí

$$\vec{x} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_n\vec{x}_n,$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou nějaká reálná čísla, se nazývá *lineární kombinace* vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$.

Definice 1.9. Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže existují reálná čísla $t_1, t_2, \ldots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí

$$\vec{o} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_n\vec{x}_n.$$

V opačném případě říkáme, že vektory jsou *lineárně nezávislé.*

Lineárně závislé vektory můžeme chápat tak, že alespoň jeden z nich se dá vyjádřit jako lineární kombinace některých ostatních. Lineárně nezávislé pak tak, že žádný z nich se nedá napsat pomocí kombinace ostatních.

1.2 Matice

Definice 1.10. *Maticí* A rozumíme schéma

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} pro $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$ jsou reálná čísla nebo funkce. Je-li tato matice (tabulka) sestavená z m řádků a n sloupců, říkáme, že A je matice typu $m \times n$. Je-li $m = n$ nazývá se matice A *čtvercová matice*, jinak *obdélníková matice.*

Je-li A čtvercová matice, říkáme, že prvky tvaru a_{ii}, tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, tvoří *hlavní diagonálu.*

Operace s maticemi

- Nechť $k \neq 0$ je reálné číslo. Výsledkem *násobení matice A číslem k* je matice C, jejíž prvky jsou tvaru
$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$
- Nechť A, B jsou matice téhož typu $m \times n$. *Součtem* matic A, B nazýváme matici C, jejíž prvky jsou
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$
- Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $n \times p$. *Součinem* matic A a B (v tomto pořadí) nazýváme matici C (typu $m \times p$), jejíž prvky jsou
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Definice 1.11. Je-li A matice typu $m \times n$, pak *transponovaná matice* A^T je matice typu $n \times m$, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce, tj. i-tý sloupec matice A^T je i-tý řádek matice A pro všechna i.

Definice 1.12. *Diagonální matice* je čtvercová matice, která má všechny prvky mimo hlavní diagonálu rovny nule.

Definice 1.13. *Jednotková matice* je čtvercová matice, která má v hlavní diagonále všechny prvky rovny jedné a všechny prvky mimo diagonálu rovny nule. Tuto matici budeme značit I.

Příklad 1.14. Pro dané matice spočtěte $(2A + B)^T$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení.
$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2A + B)^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Příklad 1.15. Pro dané matice spočtěte $A \cdot B$
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení.
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + 0\cdot 0 & 3\cdot(-2) + 0\cdot 2 & 3\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ -1\cdot 4 + 5\cdot 0 & -1\cdot(-2) + 5\cdot 2 & -1\cdot 1 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 12 & -6 & 3 \\ -4 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

□

Všimněme si, že součin $B \cdot A$ vůbec není definován. Navíc ani v případě, že násobení je definováno pro obě pořadí, nemusí platit, že $A \cdot B = B \cdot A$.

Věta 1.16 (Základní vlastnosti počítání s maticemi)**.** *Nechť matice A, B, C mají správné rozměry tak, aby se dali provést naznačené operace a $k \in \mathbb{R}$. Pak*

1. $A + B = B + A$ *(komutativní zákon)*

2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(asociativní zákon)*

3. $A(BC) = (AB)C$ *(asociativní zákon)*

4. $A(B+C) = AB+AC$ *(levý distributivní zákon)*

5. $(A+B)C = AC+BC$ *(pravý distributivní zákon)*

6. $k(A+B) = kA+kB$

7. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Proč se to dělá zrovna takto?
Násobení matic vypadá už na první pohled nelogicky a příliš komplikovaně. Důvodem je, že první byla konkrétní aplikace matic, a až pak definice násobení. Představme si, že máme „rozumné“ pravidlo, které každému bodu v rovině přiřadí nějaký jiný bod (konkrétně se jedná o lineární zobrazení). Příkladem takového pravidla je např. osová souměrnost v rovině nebo otočení o daný úhel. Matematicky to můžeme vyjádřit takto (více o funkcích se dozvíme později):

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix}$$

Složení zobrazení f a g je pak dáno

$$f\left(g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}Ax_1+Bx_2\\Cx_1+Dx_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(aA+bC)x_1+(aB+bD)x_2\\(cA+dC)x_1+(cB+dD)x_2\end{pmatrix}$$

Přirozeně se nabízí tato zobrazení reprezentovat maticemi

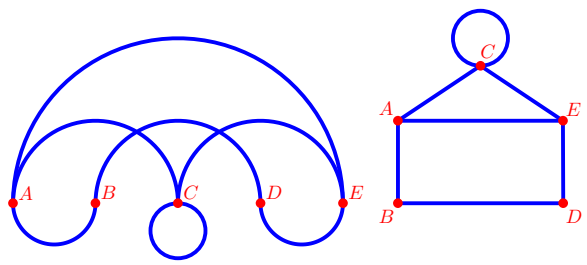
$$F = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix}aA+bC & aB+bD\\cA+dC & cB+dD\end{pmatrix}$$

a násobení matic pak definovat tak, aby odpovídalo skládání těchto zobrazení:

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}aA+bC & aB+bD\\cA+dC & cB+dD\end{pmatrix}$$

1.2.1 Některé aplikace matic

Grafem rozumíme konečnou množinu bodů (těm říkáme vrcholy) a konečnou množinu hran, kdy každá z nich spojuje dva vrcholy (ne nutně různé). Tyto grafy můžeme prezentovat obrázkem



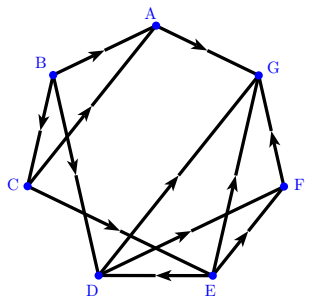
Nevýhodou je, že každý graf má nekonečně mnoho reprezentací. Proto používáme pro jeho zkoumání tzv. *matici sousednosti*. Pro graf o n vrcholech se jedná o čtvercovou matici $n \times n$ definovanou takto

$$a_{ij} = \begin{cases}1 & \text{je-li hrana mezi vrcholy } i \text{ a } j,\\0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Pro náš graf dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V mnoha aplikacích, které můžeme modelovat pomocí grafu, je mezi vrcholy zároveň nějaký vztah, který vede k tomu, že hrana by měla být orientovaná. Například vztah dravec-kořist v grafu modelujícím ekosystém nebo jednosměrná cesta v modelu dopravní sítě. Tímto dostaneme tzv. *orientovaný graf*.



I pro orientovaný graf můžeme zavést matici sousednosti, kde pro jednotlivé koeficienty platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{vede-li hrana z vrcholu } i \text{ do vrcholu } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro náš graf dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cestou v grafu rozumíme posloupnost hran, která nám umožní cestovat z jednoho vrcholu do jiného. Její délka je pak číslo určující počet hran, které obsahuje.

Uvažme matici

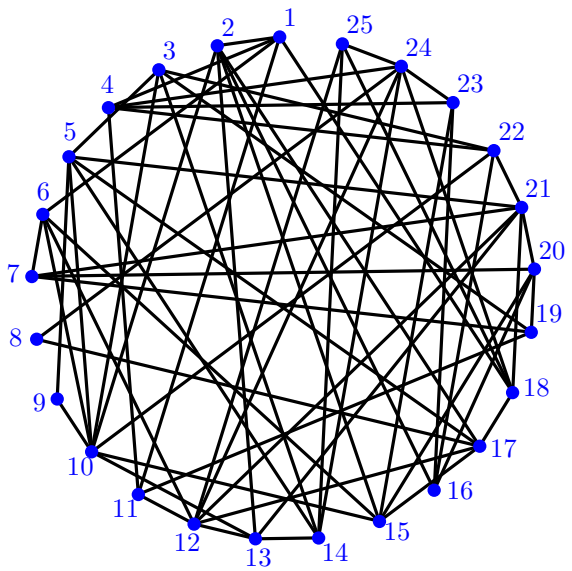
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Co reprezentují čísla v této matici? Z definice násobení matic víme, že

$$\left(A^2\right)_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53}\,.$$

Tento výraz bude nenulový, když alespoň jeden ze součinů $a_{1k}a_{k3}$ bude nenulový, což ale nastane jen tehdy, když oba členy a_{1k} i a_{k3} budou nenulové. To ale znamená, že existuje hrana mezi prvním a k-tým vrcholem a také hrana mezi k-tým a třetím vrcholem, tedy existuje cesta délky 2, která spojuje první a třetí vrchol.

Aplikace 1.17. Sociální sítě
Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?



Řešení. Místo směsice čar uvážíme matici sousednosti, která zachycuje stejnou situaci a můžeme ji studovat.

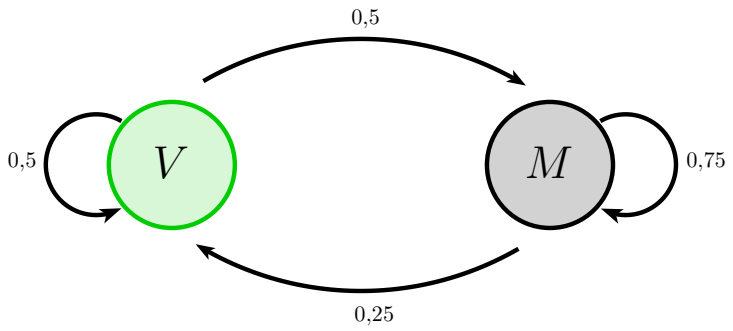
$$\begin{pmatrix}
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

Základní metrika, která udává odpověď na naši otázku, je *stupeň vrcholu*, který udává počet hran, jež z daného vrcholu vychází. Což v našem případě znamená počet kontaktů, která daná osoba má. V této metrice je mnoho osob rovnocenných (což až tak nevadí), ale nijak není rozlišena kvalita jejich kontaktů (jako kvalitnější můžeme například brát kontakty, které sami mají hodně kontaktů). Pro určení stupně vrcholu stačí spočítat všechny jedničky v daném řádku (nebo sloupci). Můžeme zjistit i stupeň každého vrcholu pomocí vhodné maticové operace (stačí matici sousednosti vynásobit maticí, která má jeden sloupec a správný počet řádků, přičemž obsahuje samé jedničky). □

Pro lepší metriku, která zohlední i kvalitu jednotlivých kontaktů, musíme ještě trochu pokročit ve studiu matic.

Aplikace 1.18. Stěhování
Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem, podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Je-li například na začátku polovina obyvatel ve městě a tento vzor migrace bude pokračovat, vyprázdní se venkov, nebo se situace stabilizuje tak, že část obyvatel bude žít ve městě a část na venkově?

Řešení. Celou situaci můžeme zachytit i graficky pomocí tzv. *grafu přechodu*:



Stav po jednom roce můžeme popsat dvěma rovnicemi

$$v_{k+1} = 0{,}5v_k + 0{,}25m_k$$
$$m_{k+1} = 0{,}5v_k + 0{,}75m_k$$

Tyto rovnice můžeme zapsat pomocí vektorů a matic

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ m_k \end{pmatrix}$$

a zjednodušeně

$$\vec{p}_{k+1} = T \cdot \vec{p}_k \,.$$

Stav po dvou letech dostaneme

$$\vec{p}_{k+2} = T \cdot \vec{p}_{k+1} = T \cdot (T \cdot \vec{p}_k) = T^2 \cdot \vec{p}_k \,.$$

Pro naše konkrétní hodnoty dostaneme

$$\vec{p}_2 = T^2 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}3125 \\ 0{,}625 & 0{,}6875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34375 \\ 0{,}65625 \end{pmatrix}$$

a analogicky bychom dostali stav po dalších letech. Pokud má existovat nějaký rovnovážný stav, tak pro něj musí platit

$$\vec{p} = T \cdot \vec{p}$$

Najít takový vektor bude naším následujícím úkolem. □

Definice 1.19. *Markovův řetězec* je náhodný proces, který popisuje posloupnost možných událostí. Pro tento proces platí, že pravděpodobnost přechodu procesu do následujícího stavu závisí pouze na současném stavu.

Definice 1.20. Matici, která obsahuje v každém sloupci (řádku) pravděpodobnosti přechodu od jednoho stavu k druhému, nazveme *maticí přechodu* daného Markovova řetězce.

Definice 1.21. Je-li T matice přechodu daného Markovova řetězce a existuje-li vektor $\vec{v}$ takový, že

$$\vec{v} = T \cdot \vec{v}$$

nazveme vektor $\vec{v}$ *stacionární distribucí (rovnovážným stavem)* Markovova řetězce.

1.3 Soustavy lineárních rovnic

Definice 1.22. *Soustavou (systémem) k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$* rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}$$

Je-li $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$, nazývá se takováto soustava *homogenní*.

Řešením soustavy je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ takových čísel t_1, t_2,..., t_n, která dané soustavě vyhovuje.

Pro každou soustavu vždy nastane právě jedna z následujících možností:

- Soustava rovnic má *právě jedno řešení.*
- Soustava rovnic má *nekonečně mnoho řešení.*
- Soustava rovnic nemá *žádné řešení.*

Definice 1.23. *Maticí soustavy* nazýváme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme matici

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Soustavu pak můžeme zapsat maticově

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}\,,$$

kde $\vec{x}$ je vektor neznámých a $\vec{b}$ je vektor pravých stran. Píšeme také

$$A \cdot X = B\,.$$

1.3.1 Hodnost matice

Definice 1.24. *Hodnost matice A* je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.

Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji *regulární* maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice *singulární.*

Definice 1.25. Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Věta 1.26. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Věta 1.27 (Frobeniova věta)**.** *Soustava lineárních rovnic má řešení, právě když je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Věta 1.28. *Soustava k lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení, jestliže je hodnost h matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy a navíc je rovna počtu neznámých n, tedy $h = n$.*

Věta 1.29. *Soustava k lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, jestliže se hodnost h matice soustavy rovná hodnosti rozšířené matice a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. $h < n$. V tomto případě lze $n - h$ neznámých volit libovolně.*

Příklad 1.30. Jednoduchý makroekonomický model hospodářské politiky
Uvažme jednoduchý model

$$Y = C + I + G + X - M,$$

- kde Y je hrubý domácí produkt,
- C je spotřeba domácností, pro kterou platí

  $$C = c(Y - T), \qquad 0 < c < 1,$$

  kde $T = tY$, $0 < t < 1$, jsou daňové příjmy,
- I označuje investiční výdaje,
- G jsou celkové vládní výdaje, pro které platí

  $$G = T + D,$$

  kde D značí deficit státního rozpočtu,
- X je celková hodnota exportu,
- M je velikost importu, pro kterou platí

  $$M = mY, \qquad 0 < m < 1\,.$$

Podle Tinbergena má být počet cílů, které si vláda vytyčí, roven počtu nástrojů, které se mají použít. Tedy například má smysl následující otázka. Jak velký rozpočtový deficit můžeme očekávat pokud chceme dosáhnout dané úrovně hrubého národního produktu? Má Tinbergenovo tvrzení nějaké matematické zdůvodnění?

Řešení. Náš příklad je jednoduchý (i tak už jsme museli zavést spousty ekonomických proměnných). Pokud si situaci rozmyslíme, tak vidíme, že máme jen jednu lineární rovnici. Aby byla rovnice jednoznačně řešitelná, můžeme mít jen jednu neznámou. Obecně můžeme díky větě 1.28 říct, že Tinbergenovo tvrzení tedy má smysl. □

1.3.2 Gaussova eliminační metoda

- Soustavu reprezentujeme pomocí matice.
- Matici převedeme do schodovitého tvaru pomocí tzv. *elementárních řádkových úprav*:
  - záměna pořadí řádků,
  - vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem,
  - přičtení násobku libovolného řádku k libovolnému řádku,
  - vypuštění řádku, který je složen ze samých nul, je násobkem jiného řádku nebo je lineární kombinací jiných řádků.
- Zpětným dosazením vypočítáme jednotlivé neznámé.

Algoritmus (postup) převodu matice na schodovitý tvar je následující:

1. V prvním kroku převedeme matici do tvaru, kdy má na pozici $(1,1)$ (první řádek a první sloupec) nenulový prvek a_{11} a ostatní prvky v prvním sloupci jsou nulové, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \end{pmatrix},$$

kde na pozici $\star$ stojí nějaké prvky (mohou být nenulové i nulové). Je-li $a_{11} \neq 0$, dosáhneme tohoto tvaru například tak, že první řádek opíšeme, a ke druhému řádku přičteme vhodný násobek prvního řádku tak, aby na pozici $(2,1)$ vznikla nula. Podobně postupujeme s ostatními řádky.

2. V druhém kroku chceme „vytvořit“ nuly ve druhém sloupci pod prvkem $\boxed{\star}$. Usilujeme tedy o tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \boxed{\star} & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

První dva řádky opíšeme a poté postupujeme obdobně jako v prvním kroku: od třetího řádku odečteme vhodný násobek druhého řádku, totéž pro čtvrtý řádek atd.

3. Postupnými úpravami převedeme matici na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.31.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x - y + 5z &= 5 \end{aligned}$$

Řešení. Rozšířená matice systému je tvaru

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

První řádek ponecháme beze změny, k druhému přičteme první a od třetího odečteme dvojnásobek prvního. Dostaneme tak matici

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Nyní opíšeme první i druhý řádek a od třetího odečteme trojnásobek druhého. Získáme tak matici

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Poslední řádek odpovídá rovnici $-6z = 0$, a proto $z = 0$. Druhý řádek odpovídá rovnici $y + 3z = 1$ a po dosazení $z = 0$ dostaneme $y = 1$. Nakonec první řádek odpovídá rovnici $x - 2y + z = 1$ a po dosazení $y = 1$ i $z = 0$, vypočítáme $x = 3$. Systém má tedy právě jedno řešení $(x, y, z) = (3, 1, 0)$. $\square$

Příklad 1.32.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení. Napíšeme rozšířenou matici systému

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a obdobně jako v předchozím případě ji převedeme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right).$$

Vidíme, že hodnost matice systému je rovna hodnosti rozšířené matice systému, ale je menší než počet neznámých ($h = 3$, $n = 4$). Podle věty 1.29 platí, že takový systém má nekonečně mnoho řešení a je možné volit $4 - 3 = 1$ neznámou (dostaneme tzv. volnou neznámou neboli *parametr*). Z posledního řádku dostáváme $6x_4 = -3$, proto $x_4 = -\frac{1}{2}$. Druhý řádek dává rovnost $-5x_2 + x_4 = -8$ a po dosazení za $x_4 = -\frac{1}{2}$ dostáváme $x_2 = \frac{3}{2}$. Nakonec dosadíme za x_2 a x_4 do prvního řádku a dostaneme $x_1 - x_3 = 1$. Této rovnosti zřejmě vyhovuje nekonečně mnoho hodnot x_1, x_3. Zvolme např. x_3 za volnou neznámou, tj. nechť $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Zkoumaný systém rovnic má nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x_1 = 1 + t, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -\frac{1}{2},$$

kde t je libovolné reálné číslo (parametr). □

Aplikace 1.33. Leontiefův model

Ekonomika regionu se skládá ze tří odvětví: průmysl, zemědělství a služby. Každý sektor produkuje komodity a zdrojem jeho příjmů je prodej těchto komodit, přičemž každý sektor potřebuje vstupní komodity (od sebe i ostatních sektorů):

		výstupy		
		Průmysl	Zemědělství	Služby
	Průmysl	0,40	0,20	0,20
vstupy	Zemědělství	0,20	0,40	0,20
	Služby	0,20	0,10	0,40

Kromě toho existuje externí poptávka v hodnotě 30, 30 a 10 miliard na průmysl, zemědělství a služby. Jak velká musí být produkce jednotlivých odvětví?

Řešení. První řádek tabulky interpretujeme tak, že průmysl spotřebuje 40 % komodit, které sám produkuje, a dále spotřebuje 20 % produktů zemědělství a 20 % produktů služeb. Analogicky můžeme chápat i další řádky a naši ekonomiku tak popsat soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 + 30 &= x_1 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 + 30 &= x_2 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}4x_3 + 10 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & -30 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}2 & -30 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}6 & -10 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & -30 \\ 0 & -1{,}6 & 0{,}8 & -120 \\ 0 & 0 & -21{,}6 & -1560 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 61{,}11, \qquad x_2 = 111{,}11, \qquad x_3 = 72{,}22$$

□

Poznámka 1.34. V realitě je situace samozřejmě daleko komplikovanější. Detaily včetně odkazů na statistiky je možno nalézt v [4].

1.4 Determinant

Definice 1.35. *Determinant* $|A|$ čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ je číslo

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}\,.$$

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ je číslo

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}|,$$

kde A_{1j} značí matici, která vznikla z matice A odebráním prvního řádku a j-tého sloupce.

Rozepsáním předchozí definice pro čtvercové matice řádu 2 a 3 dostaneme dvě speciální pravidla.

Křížové pravidlo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}\end{aligned}$$

Pro výpočet determinantů vyšších řádů můžeme využít i následujícího vztahu:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{l+k}a_{lk}|A_{lk}|, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq l \leq n,$$

ve kterém A_{lk} je matice, která vznikne z matice A vypuštěním l-tého řádku a k-tého sloupce. Tento vztah vlastně říká, že matici je možné tzv. rozvinout podle libovolného řádku. Výpočet determinantu matice řádu n tak převedeme na výpočet n determinantů řádu $n-1$. Podobně můžeme determinant rozvinout i podle libovolného sloupce. Při praktickém výpočtu volíme k rozvoji řádek (sloupec), který obsahuje co nejvíce nul, jelikož pak nemusíme některé příslušné menší determinanty vůbec počítat. Praktický výpočet determinantu matice si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 1.36. Vypočtěte determinanty

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad\qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

Řešení. a) Použijeme Sarrusovo pravidlo

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) - 3\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 1 = \\ &= 2 + 2 + 6 + 3 - 8 + 1 = 6.\end{aligned}$$

b) Použijeme rozvoj podle prvního sloupce. Algoritmus výpočtu je vidět z postupu, exponent členu (-1) je roven součtu řádkového a sloupcového indexu, které odpovídají pozici daného čísla.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) = -12.$$

□

V „realitě“ se na to musí jinak

Pro větší determinanty je předchozí postup příliš početně náročný, a tak se postupuje trochu jinak. Všimněme si, jak vyjde determinant, který má hlavní diagonále samé nuly.

Příklad 1.37. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Řešení. Použijeme-li Sarrusovo pravidlo, dostaneme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$$

Je tedy vidět, že takovýto determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále. □

Věta 1.38. *Determinant, který má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v této diagonále.*

Potřebné nuly můžeme v determinantu získat pomocí následujících úprav.

Věta 1.39.

1. *Vynásobíme-li libovolný řádek (sloupec) matice číslem k, determinant matice bude k-násobkem determinantu matice původní.*
2. *Zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců) matice, determinant výsledné matice bude mít opačné znaménko než determinant matice původní.*
3. *Přičtením k-násobku libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) se determinant matice nezmění.*

Při úpravách není nutné vyrobit nuly všude pod hlavní diagonálou, stačí si příklad jen dostatečně zjednodušit, a pak použít rozvoj determinantu. Tento přístup si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 1.40. Vypočtěte determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení. Pomocí úprav vyrobíme další nuly v posledním sloupci. Přičteme čtyřnásobek posledního řádku k předposlednímu řádku a dvojnásobek posledního řádku k řádku prvnímu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 10 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

Nyní můžeme snadno determinant rozvinout podle posledního sloupce

$$|A| = 1 \cdot (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -50 - 21 + 8 - 70 - 2 - 60 = -195$$

□

1.5 Inverzní matice a soustavy rovnic

Definice 1.41. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n splňující vztahy

$$A^{-1}A = I = AA^{-1},$$

nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici* A.

Inverzní matici lze nalézt ke každé regulární matici.

Věta 1.42. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n taková, že k ní existuje A^{-1}. Potom systém lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$ má právě jedno řešení $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ pro libovolné $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*

Jak inverzní matici najít?

Věta 1.43. *Nechť A je čtvercová matice. Jestli sekvence elementárních řádkových úprav převede matici A na jednotkovou, pak stejná sekvence elementárních řádkových úprav převede jednotkovou matici na A^{-1}.*

Příklad 1.44.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -24 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & -15 & 10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 36 & -20 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

□

Věta 1.45. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *Řádky matice A jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
2. *Sloupce matice A jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
3. *K matici A existuje invezní matice A^{-1}.*
4. $|A| \neq 0$
5. *Soustava lineárních rovnic $AX = B$ má pro libovolnou pravou stranu B jediné řešení.*
6. *Homogenní soustava rovnic $AX = 0$ má pouze nulové řešení.*
7. *Každý vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A a to jednoznačně (až na pořadí).*

1.6 Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice 1.46. Nechť A je čtvercová matice, λ je komplexní číslo a $\vec{x}$ je nenulový vektor, který je řešením rovnice

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{1.1}$$

Pak se komplexní číslo λ nazývá *vlastní číslo* matice A a vektor $\vec{x}$ se nazývá *vlastní vektor* matice A (příslušný vlastnímu číslu λ).

Úpravou maticové rovnice (1.1) dostaneme

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{o}. \tag{1.2}$$

Aby tato soustava měla nenulové řešení, musí být matice soustava singulární, tj. její determinant musí být nula. Máme tak:

Věta 1.47. *Vlastní čísla matice A jsou řešením tzv. charakteristické rovnice s neznámou λ*

$$|A - \lambda I| = 0\,.$$

Příklad 1.48. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 7 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a vypočteme determinant, čímž dostaneme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - 4\lambda - 45 = 0\,.$$

Jejím řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 9$ a $\lambda_2 = -5$.

Vlastní vektor $\vec{v}_1$ příslušný číslu $\lambda_1 = 9$ pak získáme jako jedno (libovolné) řešení soustavy rovnic, kterou získáme dosazením vlastního čísla do (1.2)

$$\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostaneme $\vec{v}_1 = (1, 1)$. Podobně vlastní vektor $\vec{v}_2$ příslušný číslu $\lambda_2 = -5$ je řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Máme tak $\vec{v}_2 = (1, -1)$. □

Poznámka 1.49. Vlastní vektory jsou na sebe kolmé. Máme-li tedy jeden, není již obtížné určit druhý (v dimenzi dva).

Příklad 1.50. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a vypočteme determinant. Tím dostaneme rovnici

$$(4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

jejímž řešením je trojice čísel $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$ a $\lambda_3 = 1$.

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 4$ pak dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jejím řešením je například vektor $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$. Analogicky bychom našli i vektory příslušné dalším vlastním číslům. □

Věta 1.51 (Perron)**.** *Je-li P čtvercová matice taková, že všechny její koeficienty jsou kladná čísla, pak matice P má kladné reálné vlastní číslo λ_1 a jemu odpovídající vlastní vektor má všechny složky kladné. Navíc je-li λ jiné vlastní číslo, pak $|\lambda| \leq \lambda_1$.*

Aplikace 1.52. Stěhování Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem, podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Jestli tento vzor migrace bude pokračovat, vyprázdní se venkov, nebo se situace stabilizuje tak, že část obyvatel bude žít ve městě a část na venkově?

Řešení. Z předchozího setkání s tímto příkladem již víme, že hledáme stacionární distribuci matice přechodu (viz definice 1.21).

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ m_k \end{pmatrix}$$

Pokud existuje, tak je to vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1. V první řadě tedy ověříme, že 1 je vlastním číslem naší matice:

$$\begin{vmatrix} 0{,}5-\lambda & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 1{,}25\lambda + 0{,}25 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0{,}25$$

Nyní nalezneme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v = \frac{1}{3}, m = \frac{2}{3}$$

Vidíme tedy, že nakonec se situace stabilizuje tak, že třetina obyvatel bude žít na venkově a dvě třetiny ve městě. □

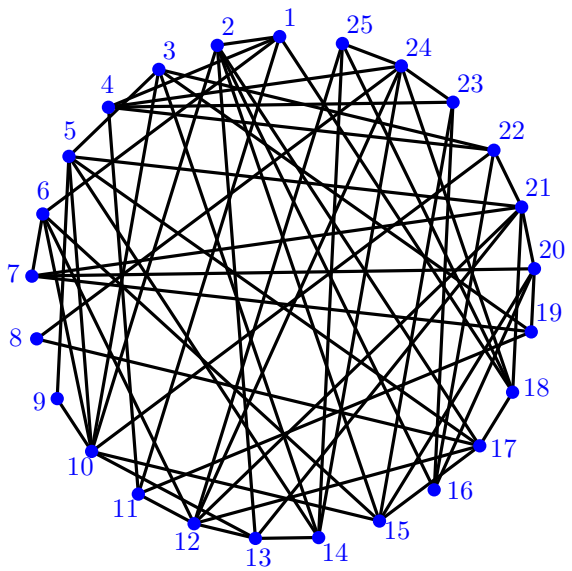
Poznámka 1.53. Zajímavou aplikaci vlastních čísel můžeme najít v [3], kde je použita pro nalezení optimální strategie při mnohostranném vyjednávání při řešení problémů týkajících se veřejných statků.

Ještě jednou se vrátíme k příkladu se sociální sítí. Metrika, která měří i kvalitu kontaktů v tom smyslu, že lepší jsou kontakty, které mají hodně kontaktů, se nazývá *centralita měřená koeficientem vlastního vektoru* (eigenvector centrality). Máme-li graf s n vrcholy, definujeme hodnotu pro vrchol x_v jako

$$x_v = \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^{n} a_{vt} x_t,$$

kde a_{vt} je příslušný koeficient z matice sousednosti. Přepisem definice do vektorů a matic dostaneme definici vlastního vektoru. Vlastních čísel a tím pádem i vlastních vektorů je více, ale jediný vlastní vektor, pro který je zaručeno, že všechny složky jsou kladné, je podle věty 1.51 vlastní vektor příslušný největší vlastní hodnotě.

Aplikace 1.54. Sociální sítě Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?



Řešení. Uvážíme matici sousednosti pro naší vztahovou síť

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

Pomocí počítače najdeme charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned}\lambda^{25} - 60\lambda^{23} - 33\lambda^{22} + 1418\lambda^{21} + 1201\lambda^{20} - 17690\lambda^{19} \\ - 17820\lambda^{18} + 130270\lambda^{17} + 140616\lambda^{16} - 596765\lambda^{15} \\ - 645895\lambda^{14} + 1744968\lambda^{13} + 1781922\lambda^{12} - 3289284\lambda^{11} \\ - 2952158\lambda^{10} + 3956100\lambda^{9} + 2846182\lambda^{8} - 2892728\lambda^{7} \\ - 1481747\lambda^{6} + 1131223\lambda^{5} + 364297\lambda^{4} - \\ 172595\lambda^{3} - 37618\lambda^{2} + 5588\lambda + 1064 = 0,\end{aligned}$$

největší vlastní číslo

$$\lambda_{max} = 5{,}391148524748294$$

i příslušný vlastní vektor

$$\begin{aligned}(1, 1{,}396, 1{,}084, 0{,}920, 1{,}306, 1{,}181, 0{,}742, 0{,}479, 0{,}562, \\ 1{,}724, 0{,}829, 1{,}493, 1{,}291, 1{,}084, 1{,}409, 0{,}774, 1{,}326, \\ 1{,}067, 0{,}659, 0{,}899, 1{,}261, 1{,}069, 0{,}808, 1{,}254, 0{,}908)\,.\end{aligned}$$

Největší hodnotu nalezneme na desátém místě, tedy nejvýznamnější je desátý vrchol. □

Poznámka 1.55. Další poznatky týkající se sítí viz [2].

Příklad 1.56. Leslieho model populace
Uvažujme například populaci hmyzu rozdělenou na tři životní etapy: mláďata, mladistvé a dospělé jedince, přičemž každá životní etapa trvá jeden rok. Pravděpodobnost přežití mláďat je 50 % a nerozmnožují se. Mladiství mají pravděpodobnost přežití 25 % a každý z nich má průměrně čtyři mláďata. Dospělí jedinci mají pravděpodobnost přežití 0 % a každý z nich má průměrně tři mláďata. Předpokládejme, že máme 100 samiček, přičemž 40 jsou mláďata, 40 jsou mladiství a 20 dospělí. Jak se bude taková populace samiček vyvíjet v čase?

Řešení. Po jednom roce bude počet mláďat

$$40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220.$$

Počet mladistvých bude počet mláďat, která přežijí, tj.

$$40 \cdot 0{,}5 = 20$$

a podobně pro dospělé

$$40 \cdot 0{,}25 = 10.$$

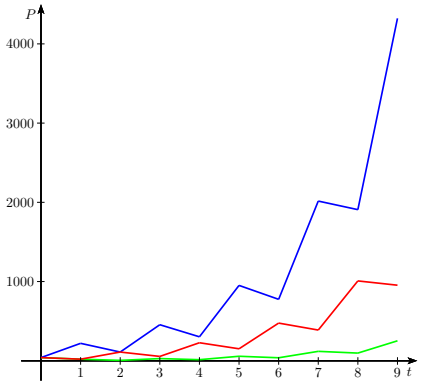
Všechny tyto výpočty můžeme snadno zapsat jednou maticovou rovnicí

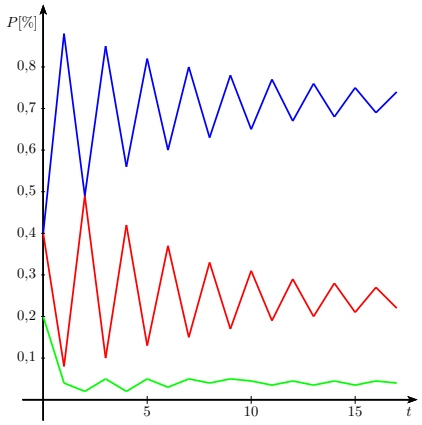
$$L \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{x}_1\,.$$

Matice L z předchozího výpočtu se nazývá *Lesliho matice* a můžeme ji snadno použít pro výpočty stavu populace v dalších letech, protože platí

$$\vec{x}_{k+1} = L \cdot \vec{x}_k\,.$$

Vyneseme-li údaje za jednotlivé roky do grafu, tak v grafu pro celkovou populaci vidíme, že populace se ve všech věkových kategoriích zvětšuje, ale nevidíme žádný vzor. V grafu, kde nejsou vyneseny absolutní počty, ale procentuální zastoupení jedinců podle věku v populaci, už ale vidíme, že populace má tendenci mířit do jakéhosi rovnovážného stavu podobného stacionární distribuci Markovova řetězce.





Tento rovnovážný vztah můžeme tedy rovnou určit pomocí vlatních čísel a vektorů. Opět nás zajímá jen takové vlastní číslo, pro které všechny složky příslušného vlatního vektoru vyjdou kladné.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ 0{,}5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda + 0{,}375 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1{,}5$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1{,}5 & 4 & 3 & 0 \\ 0{,}5 & -1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -1{,}5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow (18t, 6t, t)$$

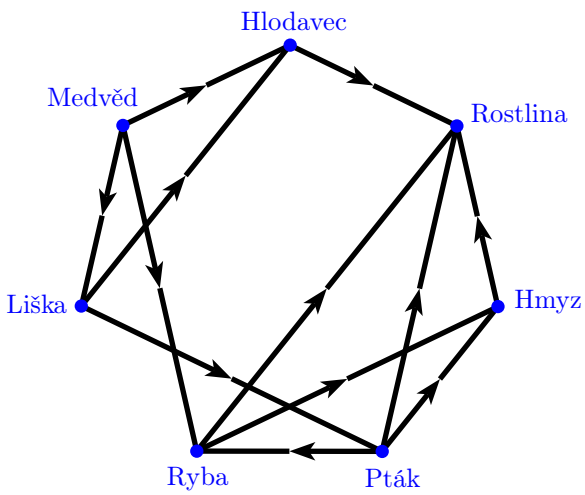
$$72\,\%, \quad 24\,\%, \quad 4\,\%$$

□

Věta 1.57. *Každá Leslieho matice má právě jedno kladné vlastní číslo. Tomuto číslu odpovídá vlastní vektor, jehož všechny složky jsou kladné.*

1.7 Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.58. Potravní řetězec Uvažme následující jednoduchý modelový potravní řetězec



Orientovaná hrana z vrcholu a do vrcholu b znamená, že a má b jako zdroj potravy. Vytvořte matici sousednosti, která popisuje vztahy v tomto řetězci, a pomocí ní odpovězte na následující otázky:

a) Který druh má nejvíce zdrojů potravy?

b) Který druh je nejčastější kořistí?

c) Jestliže b je zdrojem potravy pro a a c je zdrojem potravy pro b, pak řekneme, že c je nepřímým zdrojem potravy pro a. Který druh má nejvíce přímých a nepřímých zdrojů potravy?

d) Předpokládejme, že znečištění zabije rostliny. Jaký bude efekt tohoto znečištění na daný ekosystém?

Příklad 1.59. Leontiefův model Tři městské odbory (životní prostředí, doprava a zdraví) jsou vzájemně provázané. Na produkci každé koruny služeb, které jednotlivé odbory produkují, je nutná část služeb od ostatních odborů:

		výstupy		
		ŽP	Dop	Zdr
	ŽP	0,20	0,10	0,20
vstupy	Dop	0,10	0,10	0,20
	Zdr	0,20	0,40	0,30

Předpokládejme, že ostatní odbory potřebují služby v hodnotě 1 milion od odboru životního prostředí, 1,2 milionu od odboru dopravy a 0,8 milionu od odboru zdraví. Jak velká musí být hodnota vyprodukovaných služeb jednotlivých odborů, aby pokryla poptávku?

Příklad 1.60. Intergenerační sociální mobilita Uvažujme, že společnost je definována jako seskupení lidí tří sociálních tříd: nižší (N), střední (S) a vyšší (V). Uvažujme, že pravděpodobnost začlenění osoby do dané třídy je závislá pouze na třídě, ve které se vyskytoval její rodič. Na základě dlouhodobého pozorování byla shromážděna následující data: je-li rodič ve třídě N, pak dítě bude ve třídě N s pravděpodobností 0,7, ve třídě S s 0,2 a ve třídě V s 0,1. Je-li rodič ve třídě S, pravděpodobnosti přechodu jsou 0,3 (N), 0,5 (S) a 0,2 (V). Pokud je rodič ve třídě V, pak jsou pravděpodobnosti pro zařazení jeho dítěte do jednotlivých tříd 0,1 (N), 0,1 (S) a 0,8 (V).

a) Pro takto definovaný proces sestrojte matici a graf přechodu.

b) Víte-li, že 40 % lidí patří do třídy N, 50 % do třídy S a 10 % do třídy V, určete, jak bude vypadat rozložení společnosti po dvou generacích.

c) Určete, jak bude vypadat rozložení společnosti v dlouhodobém horizontu.

Literatura

[1] F. Aleskerov, H. Ersel, D. Piontkovski; *Linear Algebra for Economists*, Springer, New York, 2011.

[2] A. L. Barabási; *Network Science*, Cambridge University Press, 2015. Dostupné z `http://networksciencebook.com/`.

[3] M. Elliott, B. Golub; A network approach to public goods, *Journal of Political Economy*, **127** (2019), No. 2, 730–776.

[4] *Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables*, Office for Official Publications of the European Communities, Luxembourg, 2008. Dostupné z `https://ec.europa.eu/eurostat/documents/3859598/5902113/KS-RA-07-013-EN.PDF/b0b3d71e-3930-4442-94be-70b36cea9b39`.

[5] J. Hendl, M. Moldan, J. Siegl; *Základy matematiky, logiky a stastistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*, Praha: Nakladatelství Karolinum, 2019.

[6] D. Poole; *Linear Algebra, A Modern Introduction, 4 th edition*, Cengage Learning, Stamford, 2015.