Kapitola 2

Diferenciální počet

2.1 Funkce a její vlastnosti

Definice 2.1. Nechť jsou dány neprázdné množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme *funkcí* jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá *obor hodnot* funkce f a značí se $H(f)$.

Definice 2.2. *Grafem* funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ je množina bodů

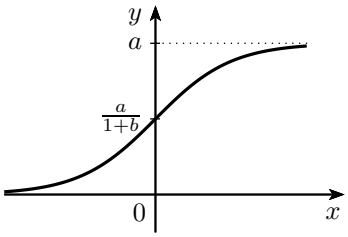
$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}.$$

Příklad 2.3 (*Typické (netypické) funkce v ekonomii a sociologii*)**.**

Logistická funkce (saturační proces)

$$y = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-cx}}$$

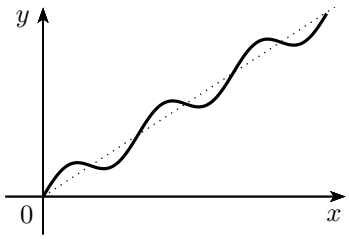
$a,\ b,\ c > 0$



Trendová funkce s periodickými fluktuacemi

$$y = a + bx + c\sin(dx)$$

$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$

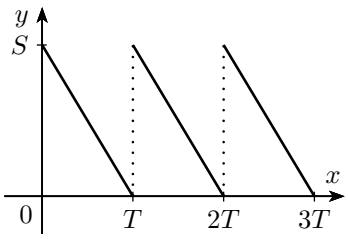


„Zásobovací“ funkce

$$y = iS - \frac{S}{T}x$$

$(i-1)T \le x \le iT$

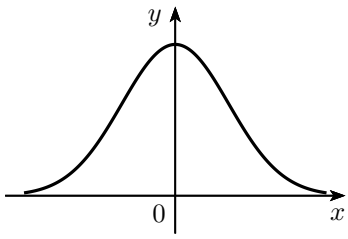
$S, T > 0,\ i = 1, 2, \ldots$



Gaussova funkce

$$y = a\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

$a,\ b,\ c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$



Definice 2.4. Funkce f se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že $|f(x)| \le K$ pro každé $x \in D(f)$.

Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný podle osy y).

Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný podle počátku).

Funkce f se nazývá *periodická* s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. Základní perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

Definice 2.5. Nechť je dána funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme *rostoucí na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkci f nazveme *klesající na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní*.

Definice 2.6. Funkce f se nazývá *prostá*, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definice 2.7. Nechť $u\colon A \to B$ a $f\colon B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F\colon A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá *složená funkce*. Funkce u se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F.

Definice 2.8. *Inverzní funkcí* k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Věta 2.9. *Inverzní funkcí k funkci f rostoucí (klesající) na množině $D(f)$ je rostoucí (klesající) funkce na množině $H(f)$.*

Definice 2.10. Buď $x \in \mathbb{R}$. Nechť P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1,0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1,0]$ k bodu P orientován v protisměru, resp. ve směru chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$, resp. $x < 0$. Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce *goniometrické*.

Některé důležité vztahy:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x &= 1, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}. \end{aligned}$$

Definice 2.11. Inverzní funkce k funkci $\sin x$ definované na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se označuje $\arcsin x$.

Inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $[0, \pi]$ se označuje $\arccos x$.

Inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se označuje $\operatorname{arctg} x$.

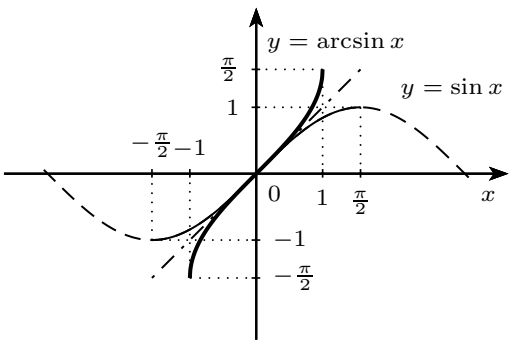
Inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0, \pi)$ se označuje $\operatorname{arccotg} x$.

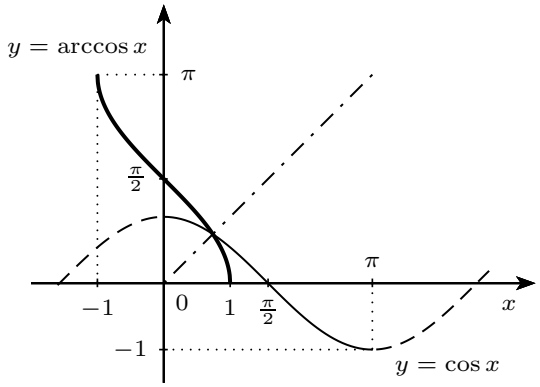
Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme *cyklometrické funkce*.

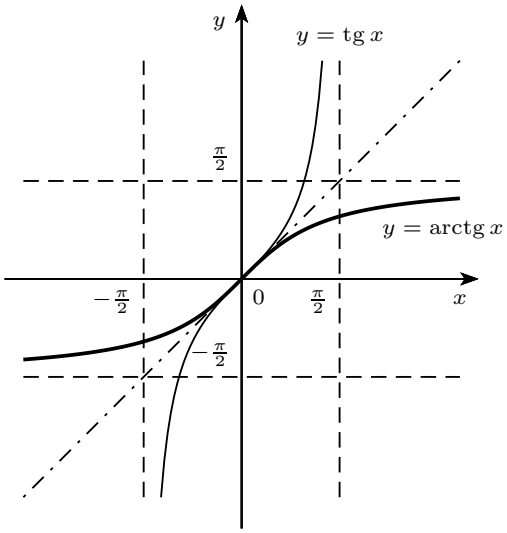
Věta 2.12. *Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti.*

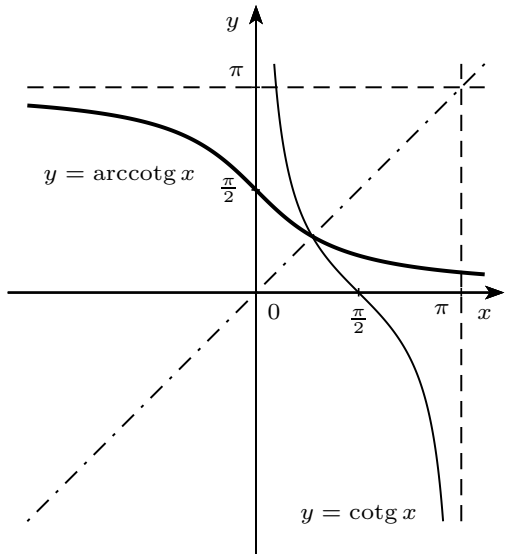
1. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou rostoucí, funkce* $\arccos x$ *a* $\operatorname{arccotg} x$ *jsou klesající.*

2. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou liché.*









Definice 2.13. Funkci $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad \text{kde} \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem*. Čísla a_i se nazývají *koeficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo $n \in \mathbb{N}$ nazveme *stupněm* polynomu.
Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P, jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha) \neq 0$. Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Věta 2.14 (Základní věta algebry)**.** *Polynom P stupně n má nad komplexním oborem $\mathbb{C}$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.*

Definice 2.15. Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P < \mathrm{st}Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P \geq \mathrm{st}Q$.

2.2 Limita a spojitost

Definice 2.16 („Naivní“ definice)**.** Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu rovnu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

a říkáme, že funkce má *ve vlastním bodě nevlastní limitu.*

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má v *nevlastním bodě vlastní limitu.*

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Říkáme, že funkce má v *nevlastním bodě nevlastní limitu.*

Analogicky můžeme popsat i limity v bodě $-\infty$ a s hodnotou $-\infty$.

Pro ty, kteří vyžadují přesnost

Definice 2.17. Nechť x_0, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme *okolím* bodu x_0.
Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$ nazveme *okolím bodu* ∞ a interval $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

Definice 2.18. Nechť x_0, $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Věta 2.19. *Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.*

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x_0 a dostatečně blízké hodnotě x_0. Analogicky definujeme i limitu zprava a nevlastní limity.

Věta 2.20.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,.$$

Věta 2.21. *Nechť existují vlastní limity* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$. *Pak platí:*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,

c) Je-li $L_2 \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,

d) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to x_0} f(x)|$.

Jak se počítá se symbolem ∞? Platí

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{+0} = +\infty, \quad \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Některé výrazy jsou nejednoznačné a určení jejich hodnoty je náročnější. Jedná se o výrazy

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Příklad 2.22. Proč se při růstu objevuje konstanta e**?**
Uložme do banky částku P_0. Při úroku 8 % dostaneme po roce částku P_1

$$P_1 = P_0 + 0{,}08P_0 = P_0(1 + 0{,}08),$$

analogicky po t letech

$$P_t = P_0(1 + 0{,}08)^t.$$

Pokud budeme úročit čtvrletně, dostaneme každého čtvrt roku 2 %, tj. po roce

$$P_1 = P_0(1 + 0{,}02)^4$$

a po t letech

$$P_t = P_0(1 + 0{,}02)^{4t}.$$

Můžeme úročit každý měsíc, týden, den, atd. a libovolnou úrokovou mírou, dostaneme tak vztah

$$P_t = P_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Uvažme nyní úrok ve výši 100 % , tj. $r = 1$, a podívejme se, co se děje s naší částkou po roce, když úročíme čím dál častěji:

m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$	částka
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	$2P_0$
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	$2{,}44141P_0$
12	$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	$2{,}61304P_0$
365	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	$2{,}71457P_0$
8760	$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	$2{,}71813P_0$
525600	$\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600}$	$2{,}71828P_0$

Vypadá to tedy, že částka neporoste do nekonečna, což nás vede k následující definici

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Vrátíme-li se k vzorci pro výpočet získané částky

$$P_t = P_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt},$$

pak zavedením substituce $m = rn$ dostaneme

$$P_0\left(1 + \frac{r}{rn}\right)^{rnt} = P_0\left[\left(1 + \frac{r}{rn}\right)^n\right]^{rt} = P_0\mathrm{e}^{rt}.$$

Definice 2.23. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá*, jestliže je limita funkce v tomto bodě rovna funkční hodnotě v tomto bodě, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Analogicky se definuje spojitost zprava/zleva.

Definice 2.24. Nechť f je funkce a $I \subseteq D(f)$ je interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li navíc levý (pravý) koncový bod do I, je v něm funkce spojitá zprava (zleva).

Věta 2.25 (Weierstrassova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty.*

Věta 2.26 (Bolzanova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

Důsledek 2.27. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $I = [a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.*

Spojité (tam, kde jsou definované) jsou všechny tzv. *elementární funkce*, tj.

- polynomy
- exponenciální a logaritmické funkce
- goniometrické a cyklometrické funkce
- mocninné funkce

a funkce, které z nich vzniknou konečným počtem sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

Příklad 2.28. Určete znaménko polynomu

$$P(x) = x(x-1)(x-2)^2 .$$

Řešení. Polynom má dva jednoduché kořeny $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ a jeden dvojnásobný kořen $x_{3,4} = 2$. Tato tři čísla nám rozdělí celou reálnou osu na čtyři intervaly a v každém z těchto intervalů bude mít polynom stále stejné znaménko. Pro určení znaménka stačí zvolit libovolné číslo, které je uvnitř intervalu, a dosadit jej do polynomu. Zvolíme-li například číslo -2 a dosadíme-li do našeho rozkladu, dostaneme součin dvou záporných a jednoho kladného čísla. Výsledek je tak kladné číslo. V intervalu $(-\infty, 0)$ je tedy polynom kladný. Podobně rozhodneme pro ostatní intervaly a výsledek můžeme shrnout do tabulky.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$R(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

Fakt, že má polynom nějaký kořen sudé násobnosti, se projeví tak, že v tomto bodě se graf polynomu dotýká osy x a v tomto bodě se nemění znaménko polynomu.

Odtud plyne, že znaménko polynomu lze určit tak, že vybereme pouze kořeny s lichou násobností, určíme znaménko v jednom z intervalů, a pak se již znaménko pro další střídá. □

2.3 Derivace funkce

Definice 2.29. Buď f funkce a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

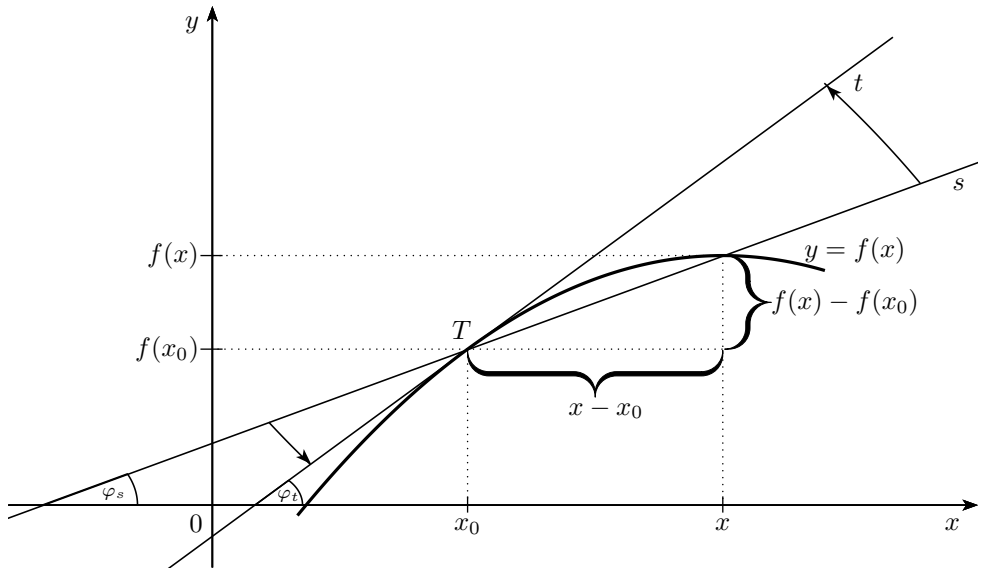
nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Položíme-li $h = x - x_0$, lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Podobně definujeme *derivace zprava* a *derivace zleva*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$



Aplikace 2.30. Cenová elasticita
V ekonomii potřebujeme často vyjádřit, jak citlivě některé veličiny reagují na změny jiné veličiny. Například, jak se mění poptávka po nějakém produktu v závislosti na jeho ceně (obvykle platí, že s rostoucí cenou klesá poptávka). Ke kvantifikaci takového jevu se zavádí tzv. elasticita. V našem konkrétním případě se jedná o tzv. *cenovou elasticitu poptávky*. Označíme-li P_1 počáteční cenu a P_2 cenu po změně a podobně Q_1 počáteční množství a Q_2 množství po změně, pak můžeme definovat tzv. koeficient cenové elasticity poptávky E vztahem

$$E = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{\frac{1}{2}(Q_2 + Q_1)}}{\frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2}(P_2 + P_1)}}\,,$$

Z definice vidíme, že se vlastně jedná o jakousi průměrnou hodnotu změny v daném intervalu. Pokud bychom chtěli přesnou hodnotu v daném bodě, pak bychom tento průměr museli počítat v malém okolí tohoto bodu. Při označení $Q_2 - Q_1 = \Delta Q$ a $P_2 - P_1 = \Delta P$ dostaneme

$$E = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}\,.$$

Podobně jako u definice derivace vidíme, že výraz $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ vyjadřuje směrnici sečny. Budeme-li počítat průměrnou hodnotu přes čím dál menší interval, můžeme uvažovat, že $Q_1 = Q_2 = Q$ a $P_1 = P_2 = P$ a sečna přejde opět v tečnu, dostaneme tak okamžitou hodnotu změny, a to je hledaná cenová elasticita poptávky

$$e = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \frac{P}{Q}\,.$$

Poznámka 2.31. Analogicky se definuje cenová elasticita nabídky a také celá řada dalších pojmů v ekonomii jako marginální zisk/náklady apod.

Věta 2.32. *Pro derivace elementárních funkcí platí:*

$$
\begin{aligned}
c' &= 0, & (x^a)' &= ax^{a-1},\\
(e^x)' &= e^x, & (\ln x)' &= \frac{1}{x},\\
(\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x,\\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x},\\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{x^2+1}, & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{x^2+1},\\
(a^x)' &= a^x \cdot \ln a, & \left(\log_a x\right)' &= \frac{1}{x \ln a},
\end{aligned}
$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.

Věta 2.33. *Nechť mají funkce f, g derivaci na množině M. Pak platí:*

a) $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$,

b) $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$,

c) $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

d) je-li $g(x) \neq 0$, *pak* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Věta 2.34. *Nechť funkce $u = g(x)$ má derivaci $g'(x)$, funkce $y = f(u)$ má derivaci $f'(u)$ a nechť platí $D(f) \supseteq H(g)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má derivaci a platí:*

$$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Příklad 2.35. Vypočtěte derivace následujících funkcí:

a) $y = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$,

b) $y = 3\sqrt[3]{x}$,

c) $y = x^2 \ln x$,

d) $y = \frac{\cos x - 1}{\sin x}$,

e) $y = \operatorname{arctg} x^2$,

f) $y = \sqrt{\mathrm{e}^x + x}$.

Řešení. Ve všech případech použijeme výše uvedená pravidla pro derivování:

a) $y' = (4x^3 - 2x^2 + 3x - 1)' = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 = 12x^2 - 4x + 3$.

b) $y' = (3\sqrt[3]{x})' = (3x^{\frac{1}{3}})' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

c) $y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$.

d) Použijeme větu o derivaci podílu:

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x - 1)' \sin x - (\cos x - 1) \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \\
&= \frac{-\sin x \cdot \sin x - (\cos x - 1) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} = -\frac{1}{1 + \cos x}.
\end{aligned}
$$

e) Použijeme větu o derivaci složené funkce:

$$y' = (\operatorname{arctg} x^2)' = \frac{1}{1+(x^2)^2}(x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}.$$

f) $y' = (\sqrt{\mathrm{e}^x + x})' = \left((\mathrm{e}^x + x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + x)^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{e}^x + x)' = \frac{\mathrm{e}^x+1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+x}}.$ □

Aplikace 2.36. Keynesianský multiplikátor
Jednoduchý makroekonomický model bez veřejných výdajů a zahraničního obchodu je dán vztahy

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= a + bY, \qquad a,\, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

kde Y je národní důchod, C je spotřeba a I jsou investice. Jak musíme zvýšit investice, abychom dostali předem dané zvýšení národního důchodu?

Řešení. Dosazením druhé rovnice do první dostaneme vztah mezi národním důchodem a investicemi

$$Y = a + bY + I \qquad \Longrightarrow \qquad Y = \frac{a+I}{1-b}\,.$$

Máme odvodit, jak se změní národní důchod, když se změní investice, tj. předpokládáme, že obě veličiny se v čase mění a jsou tak funkcemi času. Víme, že změna je vyjádřena derivacemi, tj. zderivujeme-li předchozí rovnici podle času t, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1-b}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

Číslo $K = \frac{1}{1-b}$ vyjadřuje vliv změny investic na národní důchod a říká se mu multiplikátor.

Uvažujme například, že $a = 0$, $b = 0{,}75$ a $I = 250$. Jak musíme zvýšit investice, aby se národní důchod zvýšil o 200? Pro multiplikátor K dostaneme

$$K = \frac{1}{1-0{,}75} = 4\,.$$

Dosazením do (2.1) dostaneme

$$200 = 4\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 50.$$

Multiplikátor je tedy přiléhavý název. □

Z geometrického významu derivace plyne, že funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu se směrnicí $f'(x_0)$. Rovnice této tečny je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pro rovnici normály, tj. přímky kolmé k tečně a procházející dotykovým bodem, platí

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0), && \text{je-li } f'(x_0) \neq 0, \\ x &= x_0, && \text{je-li } f'(x_0) = 0\ . \end{aligned}$$

Věta 2.37. *Nechť f má derivaci na otevřeném intervalu I.*

a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.

b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.

Věta 2.38. *Nechť funkce f, g mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$.*

Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na I, pak je f na I konstantní.

2.4 Extrémy funkce

Definice 2.39. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

a) *lokální maximum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

b) *lokální minimum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

c) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

d) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Věta 2.40 (Fermatova)**.** *Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.*

Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.

Věta 2.41. *Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, pak v něm funkce má lokální extrém.*

Definice 2.42. *Druhou derivací* funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci* (*derivaci n-tého řádu*) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Věta 2.43. *Nechť $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionární bod.*

a) Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

b) Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Příklad 2.44. Najděte lokální extrémy funkce:

a) $f(x) = x^3 - 12x - 6$, b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Řešení. a) Najděme všechny stacionární body. Platí

$$f'(x) = (x^3 - 12x - 6)' = 3x^2 - 12.$$

Položme $f'(x) = 0$, dostaneme stacionární body $x = 2$ a $x = -2$. Zjistíme znaménko f':

interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Podle věty (2.41) vidíme, že v obou bodech má funkce extrém, přičemž v bodě $x = -2$ se jedná o maximum o hodnotě 10 a v $x = 2$ o minimum o hodnotě -22.

b) Postupujeme obdobně jako v předchozím případě:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Položme $f'(x) = 0$, dostaneme stacionární body $x = 1$ a $x = -1$. Znázorníme znaménko f':

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Proto v bodě $x = -1$ má funkce lokální minimum hodnoty $-\frac{1}{2}$ a v bodě $x = 1$ lokální maximum hodnoty $\frac{1}{2}$. □

Aplikace 2.45. Optimální zdanění
Zvětšení zdanění zboží zvýší jeho cenu. To má za následek snížení poptávky (celkový efekt změny bude záviset na elasticitě poptávky). Toho, kdo daně vybírá, ovšem nejvíce zajímá, kolik daní vybere. Otázkou tedy je, zda-li snížení poptávky nepřeváží zvýšení daní, tj. sníží se celkový daňový výnos. Uvažujme, že poptávka se řídí vztahem

$$p_d = a + bq$$

a nabídka vztahem

$$p_s = c + dq,$$

kde p_d a p_s jsou jednotkové ceny v korunách, q značí množství a a, c, $d>0$ a $b<0$.

Řešení. Označíme-li t daň uvalenou na jeden kus zboží, pak nabídka se bude řídit vztahem

$$p_s = c + dq + t\,.$$

Při rovnováze na trhu platí.

$$p_d = p_s \quad \Longrightarrow \quad c + dq + t = a + bq$$

a odtud pro množství na trhu dostaneme

$$q = \frac{a - c - t}{d - b}\,.$$

Celkový daňový výnos y je určen množstvím prodaného zboží a daně, tj.

$$y = qt = \frac{a - c - t}{d - b}t.$$

Pro nalezení optimální daně na jeden výrobek tedy hledáme maximum funkce y. Derivace je

$$y' = \frac{a - c - 2t}{d - b}.$$

Máme jediný stacionární bod $t = \frac{a-c}{2}$. Vzhledem k mnoha parametrům bude nejjednodušší použít pro určení typu extrému druhou derivaci

$$y'' = \frac{-2}{d - b}.$$

Tato derivace je záporná, jelikož $d - b > 0$. Stacionární bod je tedy lokálním maximem. Optimální daň na jeden kus výrobku tedy bude $\frac{a-c}{2}$ korun. □

Aplikace 2.46. Meltzer–Richard
Jeden ze standardních modelů v politické ekonomii říká, že redistribuce bohatství by měla být větší ve společnostech, kde mediánový příjem je značně menší než průměrný příjem, jinými slovy společnosti, ve kterých je větší nerovnost, by měly mít větší přerozdělení bohatství. Proč je tomu tak?

Řešení. Ukážeme si zjednodušený model podle [1]. Zavedeme následující značení a předpoklady

- $U(\cdot)$ značí užitek získaný z veřejných statků, daná funkce je rostoucí a konkávní;
- y_i je příjem i-té osoby;
- W_i je blahobyt i-té osoby;
- c_i je spotřeba i-té osoby;
- τ značí daně uvalené vládou na příjem každého jedince (nabývá hodnot mezi 0 a 1);
- g je množství veřejných statků, které vláda poskytuje.

Předpokládejme, že blahobyt každého jedince je dán vztahem

$$W_i = c_i + U(g)\,.$$

Prostředky každé osoby pro její spotřebu jsou její příjmy po zdanění, tj.

$$c_i = (1-\tau)y_i\,.$$

Příjem se liší osobu od osoby. Označíme $E(y)$ průměrnou hodnotu příjmu ve společnosti a $\operatorname{med}(y)$ mediánový příjem ve společnosti.

Idealizující předpoklad je, že v demokracii se všechny daně promění ve veřejné statky, máme tak podmínku

$$g = \tau E(y).$$

Můžeme tedy přepsat vztah pro blahobyt i-té osoby

$$W_i = \left(1 - \frac{g}{E(y)}\right) y_i + U(g) = (E(y) - g)\,\frac{y_i}{E(y)} + U(g).$$

Kdy bude blahobyt jedince největší v závislosti na množství veřejných statků? Pro zodpovězení této otázky stačí určit maximum funkce W_i:

$$\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}g} = -\frac{y_i}{E(y)} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}g}.$$

Stacionární bod je řešením rovnice $\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}g} = 0$ a odtud $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}g} = \frac{y_i}{E(y)}$. Problémem je, že neznáme přesně funkci $U(g)$. Označíme-li $U_g = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}g}$, pak můžeme řešení $q_i^\star$ naší rovnice vyjádřit pomocí inverzní funkce jako

$$q_i^\star = U_g^{-1}\left(\frac{y_i}{E(y)}\right).$$

Jelikož U byla rostoucí a konkávní funkce, pak U_g je kladná a klesající funkce. Z vlastností inverzních funkcí pak plyne, že i U_g^{-1} je klesající. Odtud tedy víme, že bude existovat jedno řešení naší rovnice, které je závislé na hodnotě příjmu dané osoby a průměrné hodnotě příjmu. Navíc víme, že tato hodnota klesá s rostoucím příjmem. Jelikož g značí velikost veřejných statků, tak tento výsledek můžeme interpretovat tak, že bohatí lidé preferují méně přerozdělování (což je celkem v souladu s intuicí).

Tímto jsme určili množství pro danou osobu. Vláda ovšem musí nastavit jednu hodnotu g. Přidáme ještě jeden předoklad, tzv. pravidlo mediánového voliče. Toto pravidlo říká, že vítězná politika je dána mediánovou osobou populace. Jelikož jediná věc, která určuje úroveň preferované velikosti přerozdělování bohatství vládou, je hodnota $\frac{y_i}{E(y)}$, tak pro mediánového voliče dostaneme

$$q^\star = U_g^{-1}\left(\frac{\operatorname{med} y}{E(y)}\right).$$

Což bude hodnota, kterou budeme pozorovat v ekonomice. Obvyklým signálem nerovnosti je, že průměrná mzda je vyšší než mediánová mzda. V takovémto případě by podle tohoto modelu měla být míra přerozdělení vyšší než nastavená míra. □

Definice 2.47. Buď funkce f definovaná na množině M. Jestliže $x_0 \in M$ a platí

$$f(x) \le f(x_0)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M *absolutní maximum* v bodě x_0. Podobně definujeme *absolutní minimum.*

Postup pro nalezení absolutních extrémů:

1. Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace.
2. Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
3. Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
4. Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude absolutní maximum a minimum.

2.5 L'Hospitalovo pravidlo

Věta 2.48. *Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Nechť je splněna jedna z podmínek*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Využitím různých triků se na tyto dva případy dají převést i ostatní tzv. *neurčité výrazy*

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty.$$

2.6 Jak derivace ovlivňuje tvar grafu?

Definice 2.49. Leží-li graf funkce f nad každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

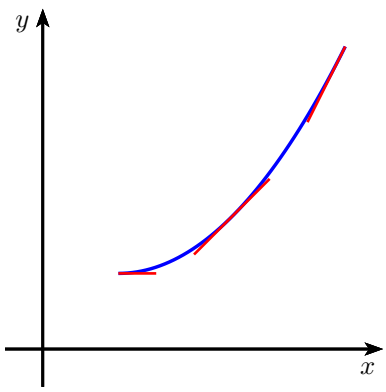
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x,\, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konvexní* na intervalu I.

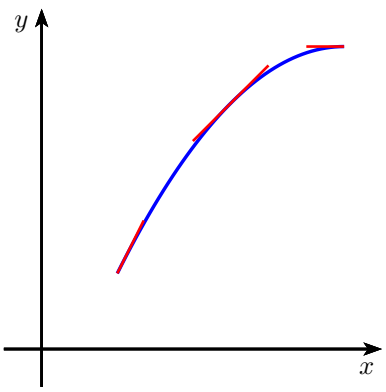
Leží-li graf funkce f pod každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x,\, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konkávní* na intervalu I.



konvexní = nad tečnou



konkávní = pod tečnou

Věta 2.50. *Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I.*

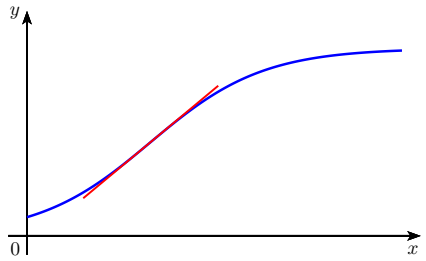
a) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I.

b) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I.

Definice 2.51. Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže je f v x_0 spojitá, a jestliže je vlevo od bodu x_0 konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, nebo naopak.

Věta 2.52. *a) Nechť x_0 je inflexní bod a nechť existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.*

b) Nechť $f''(x_0) = 0$, v levém okolí bodu x_0 platí $f''(x) < 0$ a v pravém okolí bodu x_0 platí $f''(x) > 0$, nebo naopak. Pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.



Obrázek 2.1: Inflexní bod

Příklad 2.53. Určete intervaly, ve kterých je funkce

$$f\colon y = x\mathrm{e}^x.$$

konvexní/konkávní, případně určete její inflexní body.

Řešení. Spočteme první derivaci:

$$y' = (x\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x.$$

Druhá derivace je

$$y'' = (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)' = 2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x.$$

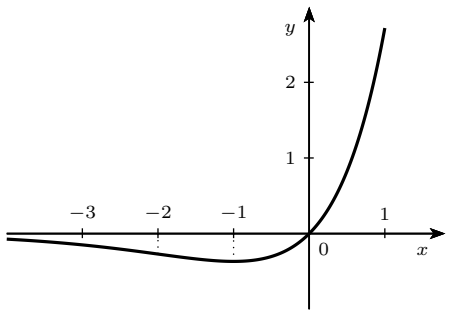
Určíme nulové body druhé derivace:

$$\mathrm{e}^x(2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Znaménko druhé derivace je:

interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

A proto funkce má v bodě $x = -2$ inflexní bod. □



Obrázek 2.2: Graf funkce $y = x\mathrm{e}^x$

2.7 Funkce více proměnných

Aplikace 2.54. Wind-chill index

Typickým příkladem funkce více proměnných, se kterou se setkal každý, je vztah mezi vnímanou a naměřenou teplotou, který je dále ovlivněn rychlostí větru (v případě funkce dvou proměnných) nebo i vlhkostí (funkce tří proměnných).

T/v	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

Definice 2.55. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Předpis f, který každému bodu množiny M přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$ se nazývá *(reálná) funkce n (reálných) proměnných.* Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f.

Definice 2.56 (Speciálně)**.** Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D \neq \emptyset$. Předpis f, který každému bodu roviny $[x, y] \in D$ přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$, nazýváme *funkcí dvou proměnných.* Tuto funkci označujeme

$$z = f(x, y).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f.

Definice 2.57. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak

$$G(f) = \{[x_1, \ldots, x_n, y]; [x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n; y = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

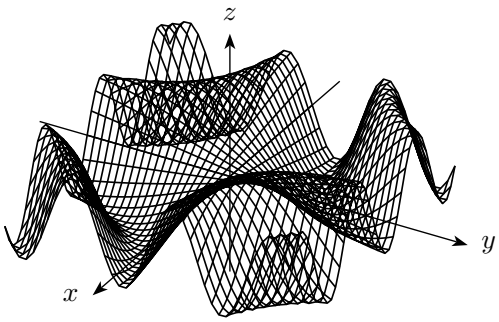
se nazývá *graf funkce* f.

Definice 2.58. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

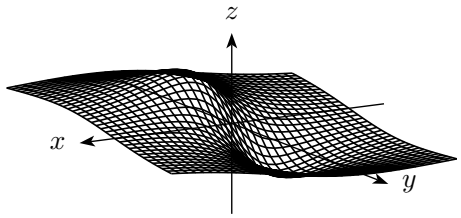
$$f_c = \{[x, y] \in M\colon f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice* funkce f na úrovni c.

$f(x, y) = \sin(xy)$



$f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$



Aplikace 2.59. Cobb-Douglasova produkční funkce
Důležitým příkladem funkce dvou proměnných je tzv. *Cobb-Douglasova produkční funkce*, která se používá k modelování výstupů firmy nebo státu. Je to například funkce tvaru

$$P(L, K) = aL^\alpha K^\beta, \qquad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1,$$

kde P značí celkovou produkci, L práci (obvykle měřenou v hodinách) a K investovaný kapitál.

2.8 Limita a spojitost funkce více proměnných

Pojem limity funkce dvou proměnných je opět založen na pojmu okolí bodu. Zásadní rozdíl je v tom, jak vypadá okolí bodu na přímce (ose x) a okolí bodu ve vyšší dimenzi. Okolím bodu $[x_0, y_0]$ ležícího v rovině (tj. v dvojrozměrném prostoru) je množina všech bodů $[x, y]$, které mají od tohoto bodu *vzdálenost* menší než nějaké číslo a. Vzdálenost neboli metriku můžeme definovat různými způsoby. Podle výběru metriky dostaneme tvar okolí. Například v euklidovské metrice je okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ vnitřek kruhu se středem $[x_0, y_0]$ a poloměrem a, tj.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < a^2.$$

Ryzím okolím bodu je pak okolí tohoto bodu bez bodu samotného.

Definice 2.60. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $A \in \mathbb{R}^2$ *limitu* L, $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(A) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Definice 2.61. Nechť bod $[x_0, y_0]$ je takový bod definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, že jeho libovolné ryzí okolí obsahuje bod množiny $\mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je-li spojitá v každém bodě této množiny.

2.9 Parciální derivace

Definice 2.62. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $[x_0, y_0]$ je bod. Existuje-li limita

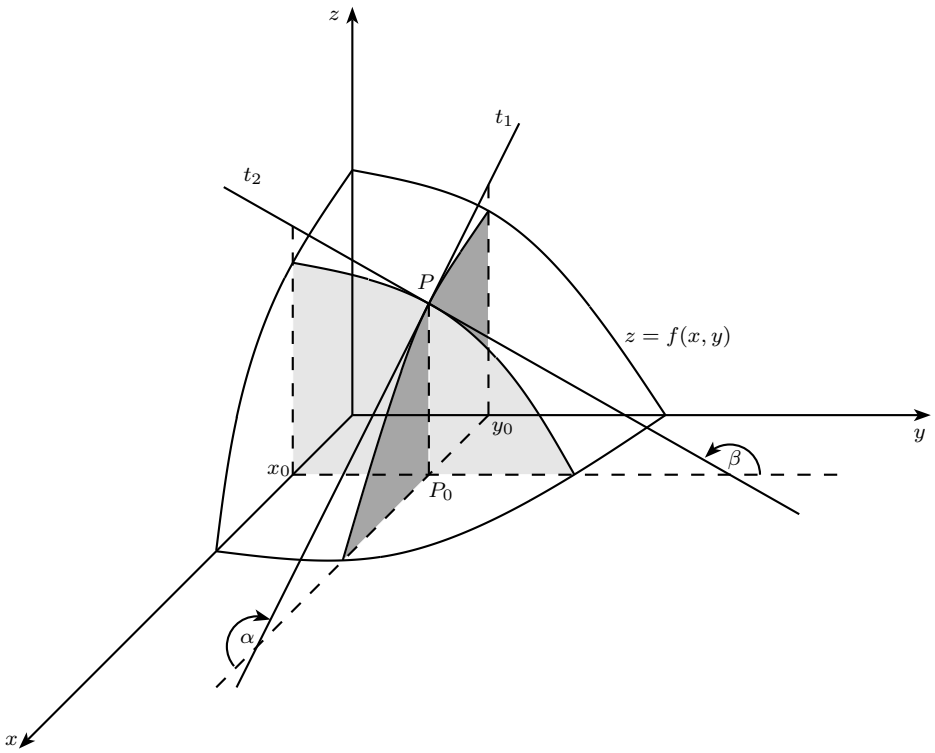
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ *parciální derivaci* podle x.

Tuto derivaci značíme

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)$$

Analogicky definujeme a značíme derivaci podle y.



Protože libovolná parciální derivace funkce je definovaná jako „obyčejná“ derivace funkce jedné proměnné, platí pro počítání parciálních derivací obvyklá pravidla pro derivování. Při výpočtu postupujeme tak, že všechny proměnné kromě té, podle které derivujeme, považujeme za konstanty.

Příklad 2.63. Vypočtete parciální derivace funkce dvou proměnných:

a) $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$,

b) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$,

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

d) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$.

Řešení. a) Použijeme pravidla pro derivaci součtu, případně rozdílu, a pravidlo o derivaci polynomu. Dostaneme tak

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3,$$
$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

b) Použijeme pravidlo pro derivaci podílu:

$$f_x(x,y) = \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = -\frac{y^2}{(x-y)^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{x(x-y) + xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

c) Použijeme pravidlo pro derivaci složené funkce:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

d) Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladě:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x+y^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{2y}{x+y^2}.$$

□

Příklad 2.64. Nalezněte a interpretujte $P_K(200,120)$ a $P_L(200,120)$ pro Cobb-Douglasovu funkci

$$P(K,L) = 20K^{0,4}L^{0,6}\,.$$

Řešení. Při počítání derivace podle K uvažujeme, že L je konstanta a použijeme obvyklá pravidla pro derivování

$$P_K(K,L) = 20 \cdot 0{,}4K^{-0,6}L^{0,6}\,.$$

Dosazením $K = 200$ a $L = 120$ dostaneme

$$P_K(200,120) = 8 \cdot 200^{-0,6} \cdot 120^{0,6} \approx 5{,}9\,.$$

Tento výsledek znamená, že produkce se zvýší o 5,9 jednotek za každou jednotku kapitálu (když $K = 200$ a $L = 120$). Toto číslo se nazývá *marginální produktivita kapitálu.*

Postupujeme podobně jako při počítání derivace podle K, tj. uvažujeme, že K je konstanta a použijeme obvyklá pravidla pro derivování

$$P_L(K,L) = 20 \cdot 0{,}6K^{0,4}L^{-0,4}.$$

Dosazením $K = 200$ a $L = 120$ dostaneme

$$P_L(200,120) = 12 \cdot 200^{0,4} \cdot 120^{-0,4} \approx 14{,}7$$

Tento výsledek znamená, že produkce se zvýší o 14,7 jednotek za každou jednotku práce (když $K = 200$ a $L = 120$). Toto číslo se nazývá *marginální produktivita práce.* □

Příklad 2.65. Uvažujme firmu, která používá několik různých zdrojů. Pro jednoduchost uvažujme dva zdroje: suroviny a práci. Podle jedné teorie je férová mzda (cena) dána oceněním práce (nebo libovolného vstupu) hodnotou jeho marginálního produktu. Tato hodnota je daná součinem ceny výsledného zboží a marginálního produktu daného vstupu (tj. změnou celkové produkce při změně tohoto vstupu o jednotku). Dále uvažujme, že se množství vyrobeného zboží řídí Cobb-Douglasovou produkční funkcí. Je za těchto předpokladů možné zaplatit férovou mzdu?

Řešení: Uvažujme, že firma prodává svůj výstup Q za cenu P_Q a $Q = aM^\alpha L^\beta$, kde M značí množství suroviny, L množství práce a a, α a β jsou kladné konstanty. Pokud má být každý zdroj placen cenou rovnou hodnotě svého marginálního produktu, potom cena těchto zdrojů bude

$$P_M = P_Q \frac{\partial Q}{\partial M}\,.$$

$$P_L = P_Q \frac{\partial Q}{\partial L}\,.$$

Celkové výdaje TC za vstupy pak budou

$$TC = MP_M + LP_L = M\left(P_Q \frac{\partial Q}{\partial M}\right) + L\left(P_Q \frac{\partial Q}{\partial L}\right) = P_Q\left(MP_Q \frac{\partial Q}{\partial M} + LP_Q \frac{\partial Q}{\partial L}\right)$$

Celkový výnos TR bude

$$TR = P_Q Q\,.$$

Celkové výdaje na vstupy se budou rovnat celkovému výnosu, když

$$P_Q\left(MP_Q \frac{\partial Q}{\partial M} + LP_Q \frac{\partial Q}{\partial L}\right) = P_Q Q$$

a odtud

$$Q = M\frac{\partial Q}{\partial M} + L\frac{\partial Q}{\partial L}$$

Vypočteme derivace

$$\frac{\partial Q}{\partial M} = \alpha a K^{\alpha-1} L^\beta \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta a K^\alpha L^{\beta-1}$$

a dosadíme

$$Q = K\left(\alpha a K^{\alpha-1} L^\beta\right) + L\left(\beta a K^\alpha L^{\beta-1}\right) = Q(\alpha+\beta).$$

Abychom tedy mohli zaplatit férovou mzdu, musí platit, že $\alpha + \beta = 1$. Tento koncept férové mzdy tedy není obecně použitelný.

Poznámka 2.66. Zároveň máme otázky k přemýšlení. Co pro produkci znamená, že $\alpha + \beta = 1$. Proč v situacích $\alpha + \beta > 1$ a $\alpha + \beta < 1$ není možné platit férovou mzdu?

Definice 2.67. Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce 2. řádu* podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Věta 2.68 (Schwarz, Clairaut)**.** *Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy}, která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Příklad 2.69. Vypočtěte všechny druhé derivace funkce $f(x, y) = x^y$, $x > 0$.

Řešení. Parciální derivaci podle x určíme jako derivaci mocninné funkce a derivaci podle y jako derivaci exponenciální funkce se základem x, tj.

$$f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \ln x.$$

Podobně obdržíme

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{yy} = x^y \ln^2 x.$$

Při výpočtu smíšených derivací musíme derivovat oba výrazy podle pravidla pro výpočet derivace součinu a dostaneme

$$f_{xy} = x^{y-1}(y \ln x + 1), \quad f_{yx} = x^{y-1}(y \ln x + 1). \qquad \square$$

2.10 Lokální extrémy

Definice 2.70. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí tohoto bodu takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $[x, y] \neq [x_0, y_0]$ ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech.

(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrně *(ostré) lokální extrémy.*

Definice 2.71. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $[x_0, y_0]$ je *stacionární bod funkce* f, jestliže v bodě $[x_0, y_0]$ existují obě parciální derivace prvního řádu funkce f a platí

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Věta 2.72 (Fermat)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém. Pak všechny parciální derivace prvního řádu funkce f, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Věta 2.73. *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť $[x_0, y_0]$ je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

pak má funkce f v $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jde o minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jde o maximum.

Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém nenastává.

Příklad 2.74. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Řešení. Funkce, jejíž extrémy hledáme, je polynomem proměnných x, y, a proto jsou její parciální derivace spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad f_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Z první rovnice plyne $y = x^2$ a dosazením do druhé rovnice dostáváme

$$x^4 - x = x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

odtud $x_1 = 0, x_2 = 1$ (kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1$ má záporný diskriminant, a je vždy kladný). Existují tedy dva stacionární body $P_1 = [0, 0]$, $P_2 = [1, 1]$. Dále platí $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = -3$, odtud

$$D(x, y) = 36xy - 9, \quad \text{tj.} \qquad D(P_1) = -9 < 0, \qquad D(P_2) = 36 - 9 = 27 > 0.$$

V bodě P_1 tedy extrém nenastává a v bodě P_2 nastává ostré lokální minimum, neboť $z_{xx}(P_2) = 6 > 0$. Hodnota tohoto extrému je $f(1, 1) = -1$. □

Aplikace 2.75. Soutěž a koluze

Představme si, že jsme producentem nějakého produktu, jehož nefixní produkční náklady jsou minimální (např. minerální voda, mobilní data atd.), a zároveň máme monopol, tj. jsme jediným producentem. Pro konkrétnost uvažujme, že cena našeho produktu je

$$p = 6 - 0{,}01x, \qquad 0 \leq x \leq 600,$$

kde x značí množství prodaného produktu. Zisk je potom popsán funkcí

$$R(x) = x(6 - 0{,}01x) = 6x - 0{,}01x^2\,.$$

Náš maximální zisk najdeme položením první derivace nule, tj.

$$R'(x) = 6 - 0{,}02x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 300\,.$$

Že se jedná o maximum, bychom mohli ověřit např. pomocí druhé derivace. Maximální zisk tak bude $R(300) = 900\,\text{Kč}$ při ceně $3\,\text{Kč}$ za jednotku.

Co se stane, když budeme mít dalšího konkurenta, tj. půjde již o duopol? Nová cenová funkce bude

$$p = 6 - 0{,}01x - 0{,}01y,$$

kde x značí množství produktu, který prodáme, a y značí množství, které prodá náš konkurent. Náš zisk pak bude

$$R_1(x, y) = px = 6x - 0{,}01x^2 - 0{,}01xy$$

a zisk našeho konkurenta bude

$$R_2(x, y) = py = 6y - 0{,}01xy - 0{,}01y^2\,.$$

Každý z nás se snaží maximalizovat svůj zisk, tj. položíme rovny nule parciální derivace

$$(R_1)_x = 6 - 0{,}02x - 0{,}01y = 0$$

$$(R_2)_y = 6 - 0{,}01x - 0{,}02y = 0$$

Řešením této soustavy rovnic je $x = 200$, $y = 200$. Tedy my i náš konkurent budeme prodávat při ceně $p(200, 200) = 2\,\text{Kč}$ a zisk každého bude $R_1 = R_2 = 400\,\text{Kč}$.

Můžeme si povšimnout, že při konkurenci na trhu duopol produkuje více než monopol, a navíc při nižší ceně, tj. tato situace je výhodnější pro zákazníka. Zároveň ovšem platí, že celkový zisk duopolistů je nižší než zisk, který měl producent při monopolu. Při této situaci v realitě tedy obvykle dojde k tomu, že duopolisté spolupracují a rozdělí si trh jako jeden monopol (tzv. koluze).

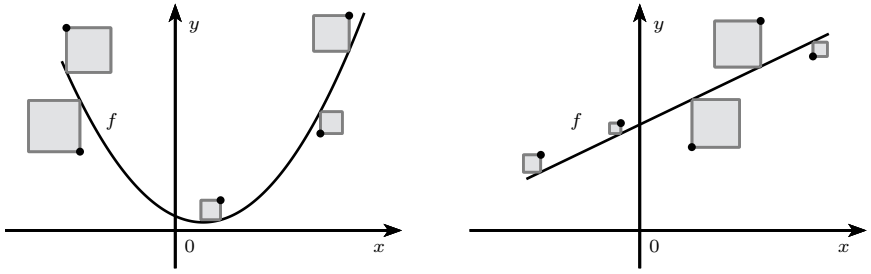
Aplikace 2.76. Metoda nejmenších čtverců

Máme-li výsledky nějakého měření, jsou tyto výsledky obyčejně zatíženy nějakou chybou. Chceme-li tedy najít funkci, která popisuje námi sledovaný děj, není podstatný požadavek, aby tato funkce procházela naměřenými hodnotami. Požadujeme ovšem, aby vyjadřovala výsledky měření co nejpřesněji, a to v následujícím smyslu.

Označme y_k naměřené hodnoty v bodech x_k, $k = 1, \ldots, n$ a f hledanou funkci, nejčastěji polynom. Standartním kritériem nejlepšího přiblížení hledané funkce a naměřených hodnot je požadavek, aby součet

$$S = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2$$

byl co nejmenší. Jedná se o součet obsahů čtverců, jejich strana má velikost rovnu rozdílu naměřené hodnoty a hodnoty nalezené funkce v daném bodě. O takto získaných křivkách říkáme, že byly nalezeny *metodou nejmenších čtverců*.



Jak vypadá rovnice přímky, která je proložena danými body touto metodou?

Řešení. Označme $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, ..., $[x_n, y_n]$ body v rovině, kterými prokládáme přímku $y = ax + b$ metodou nejmenších čtverců. Pak hledáme minimum funkce

$$S(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2.$$

Lokální extrém dané funkce může nastat jen ve stacionárním bodě. Spočteme parciální derivace

$$S'_a = 2\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)x_k = 2\left(a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right),$$

$$S'_b = 2\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k) = 2\left(a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$

Jelikož $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, dostaneme pro stacionární body soustavu

$$\begin{array}{lll} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k & = & \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + \quad bn & = & \sum_{k=1}^{n} y_k\,. \end{array}$$

Z povahy úlohy je zřejmé, že nějaká optimální přímka musí existovat. Dá se ukázat, že daná soustava má právě jedno řešení (tj. existuje jediný stacionární bod) s výjimkou případu, kdy dva body mají stejnou x-ovou souřadnici. Jelikož řešením soustavy je jen jeden stacionární bod, musí právě tento bod být hledaným řešením. □

Předchozím příkladem jsme tak odvodily následující větu.

Věta 2.77. *Nechť $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, ..., $[x_n, y_n]$ jsou body v rovině, které prokládáme přímkou $y = ax + b$ metodou nejmenších čtverců, tj. hledáme minimum funkce $S(a, b) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)^2$.*

Pak pro koeficienty a, b platí:

$$\begin{array}{lll} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k & = & \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + \quad bn & = & \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{array}$$

Poznamenejme ještě, že analogicky se dají odvodit i vztahy pro jiné křivky nalezené metodou nejmenších čtverců (parabola, exponenciála atd.).

2.11 Aplikační úlohy k řešení

Příklad 2.78. Uvažme tzv. nákladovou funkci

$$C(x) = 8\sqrt[4]{x^3} + 300,$$

která vyjadřuje náklady na produkci x výrobků v stovkách korun. Spočtěte derivaci $C'(x)$ a interpretujte tento výsledek.

Příklad 2.79. Roční zisk firmy x let od dnešního dne se předpokládá ve výši

$$P(x) = 5x - 0{,}4x^2$$

miliónů korun ($0 \le x \le 8$). Vypočtěte $P(3)$, $P'(3)$ a $P''(3)$ a interpretujte tyto výsledky.

Příklad 2.80. Farma může prodat 20 beden úrody týdně při ceně 400 Kč. Majitel odhaduje, že při snížení ceny o 10 Kč prodá o dvě bedny více. Výrobní náklady jsou 200 Kč na jednu bednu. Jaká je optimální cena bedny úrody pro maximalizaci zisku a jak velký tento zisk bude?

Literatura

[1] A. H. Meltzer, S. F. Richard; A Rational Theory of the Size of Government, *Journal of Political Economy*, **89** (1981), 914–927.