

Kapitola 4

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je rovnice, v níž roli neznámé hraje funkce a která zároveň obsahuje derivace hledané funkce.

Řešit diferenciální rovnici znamená nalézt všechny funkce, které jsou definované na nějakém intervalu I a vyhovují dané rovnici. Takovou funkci nazýváme *řešením diferenciální rovnice*.

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Například rovnice

$$y' = y$$

je tedy diferenciální rovnice prvního řádu. Jejím řešením je funkce $y = e^x$, protože $(e^x)' = e^x$. Snadno se dá ověřit, že řešením jsou všechny funkce tvaru $y = Ce^x$, kde C je libovolná konstanta.

Obecné řešení diferenciální rovnice prvního řádu je funkce závisající na jednom parametru C taková, že speciální volbou C lze získat každé řešení této rovnice. *Partikulární řešení* je jedno konkrétní řešení získané z obecného řešení volbou konstanty C .

Průběh nějakého skutečného jevu je popsán jediným řešením. Z množiny všech řešení určíme toto řešení zadáním *počáteční podmínky*. Úloha najít řešení diferenciální rovnice splňující danou počáteční podmínku se nazývá *počáteční úloha* (někdy také Cauchyova počáteční úloha). V praktických aplikacích hraje často roli nezávislé proměnné x čas. Části je proto přirozené hledat řešení diferenciálních rovnic pro $x \geq 0$.

4.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Jde o rovnici tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{4.1}$$

kde f a g jsou spojité funkce. Dosadíme $y' = \frac{dy}{dx}$ a dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Nejprve si všimněme, že konstantní funkce určené rovnicí $g(y) = 0$ jsou řešením rovnice (4.1). Za předpokladu $g(y) \neq 0$ *separujeme* proměnné (tj. na jedné straně rovnice máme výraz pouze proměnné y a na druhé výraz pouze proměnné x)

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

a tuto rovnost integrujeme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx. \tag{4.2}$$

Nezapomeňme, že primitivní funkce se liší o konstantu, čímž dostaneme množinu řešení rovnice (4.1)! Tato množina řešení a konstantní řešení z předchozího kroku pak tvoří obecné řešení rovnice (4.1). Máme-li zadanou počáteční podmínku, určíme tuto konstantu z počáteční podmínky.

Poznamenejme, že ne vždy se nám podaří z (4.2) vyjádřit explicitní tvar řešení $y = y(x)$.

Příklad 4.1. Řešte diferenciální rovnice

a) $y' = 2xy$,

b) $y' = \frac{1}{x}(4y - 1)$.

Řešení. a) Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{dy}{dx} = 2xy,$$

a odtud za předpokladu, že $y \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \, dx.$$

Všimněme si přitom, že funkce $y = 0$ je řešením původní rovnice. Integrací dostáváme

$$\ln |y| = x^2 + K.$$

Po odlogaritmování máme

$$|y| = e^{x^2+K} = e^{x^2} e^K$$

a odtud

$$y = \pm e^{x^2} e^K.$$

Označíme-li $C = \pm e^K$, kde C je kladné nebo záporné číslo, dostaneme obecné řešení tvaru

$$y = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že pro $C = 0$ je v tomto vztahu zahrnuto i řešení $y = 0$.

b) Nejprve vyšetřeme případ $4y - 1 = 0$. Vidíme, že funkce $y = \frac{1}{4}$ je řešením naší rovnice. Za předpokladu $y \neq \frac{1}{4}$ dostáváme

$$\int \frac{dy}{4y - 1} = \int \frac{dx}{x}$$

a po integraci

$$\frac{1}{4} \ln |4y - 1| = \ln |x| + \ln K,$$

kde K je kladná konstanta. Užitím pravidel pro počítání s logaritmy pak dostaneme

$$\ln |4y - 1| = \ln K^4 x^4.$$

Nahradíme-li po odlogaritmování kladnou konstantu K^4 libovolnou konstantou C , můžeme odstranit absolutní hodnoty a dostaneme

$$4y - 1 = Cx^4,$$

a odtud

$$y = \frac{1}{4}Cx^4 + \frac{1}{4}.$$

Tento vztah zahrnuje i řešení $y = \frac{1}{4}$. □

Příklad 4.2. Řešte počáteční úlohu

$$(x + 1) dy - xy \, dx = 0, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Separujeme proměnné a za předpokladu $y \neq 0$ máme

$$\frac{dy}{y} = \frac{x \, dx}{x + 1}.$$

Funkce na pravé straně je neryze lomená funkce. Dělením ji převedeme na polynom a ryze lomenou racionální funkci a integrujeme

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx.$$

Dostáváme tak

$$\ln |y| = x - \ln |x + 1| + C.$$

Označme $C = \ln K$. Vzhledem k tomu, že platí $x = \ln e^x$, dostaneme

$$\ln |y| = \ln e^x - \ln |x + 1| + \ln K, \quad K > 0,$$

a užitím pravidel pro počítání s logaritmy

$$\ln |y| = \ln \frac{Ke^x}{|x + 1|}.$$

Nyní můžeme odlogaritmovat a uvážíme-li novou konstantu $K^* \in \mathbb{R}$, můžeme vynechat absolutní hodnoty. Dostaneme tak řešení dané rovnice ve tvaru

$$y = \frac{K^*e^x}{x + 1}.$$

Toto řešení obsahuje i řešení $y = 0$. Aby byla splněna počáteční podmínka, musí platit

$$1 = \frac{K^*e^0}{0 + 1} \Rightarrow K^* = 1.$$

Řešením počáteční úlohy je funkce $y = \frac{e^x}{x+1}$. □

Aplikace 4.3. Jednoduchý model osobních úspor

Zdrojem osobního majetku jsou typicky dva zdroje. Plat a výnosy z investic. Z těchto příjmů můžeme rozlišit tři základní typy výdajů. Nutné výdaje, zbytné výdaje a investice. Pro jednoduchost můžeme uvažovat, že po zaplacení nutných výdajů, utratíme fixní část zbylých příjmů za zbytné výdaje a zbylou část investujeme. Dále uvažujeme, že investice generují příjem s fixním úrokem a na začátku máme nulové úspory. Popište matematicky tento model a nalezněte funkci, která popisuje velikost úspor v čase.

Řešení. Nejprve si označme všechny veličiny v našem modelu:

- s plat
- $W(t)$ úspory v čase t
- r velikost úročení investic
- n nezbytné výdaje
- p velikost části příjmů, které utratíme za zbytné výdaje

Změna velikost našich úspor je součet všech našich příjmů mínus všechny naše výdaje, tj.

$$\frac{dW}{dt} = s + rW - (n + p(s + rW - n)),$$

což můžeme upravit do tvaru

$$\frac{dW}{dt} = (1 - p)(s - n + rW).$$

Podmínka nulových úspor na začátku znamená $W(0) = 0$. Vidíme, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Odseparujeme proměnné

$$\frac{dW}{s - n + rW} = (1 - p)dt$$

a po malé úpravě budeme moci integrovat pomocí základních vzorců

$$\frac{1}{r} \int \frac{r dW}{s - n + rW} = \int (1 - p)dt$$

$$\ln(s - n + rW) = (1 - p)rt + c.$$

Algebraickými úpravami dostaneme obecné řešení

$$W = \frac{1}{r}(Ke^{(1-p)rt} + n - s).$$

Dosazením počáteční podmínky dostaneme rovnici

$$0 = K + n - s$$

a odtud $K = s - n$. Náš model tak je

$$W = \frac{s - n}{r}(e^{(1-p)rt} - 1)$$

Můžeme nyní třeba odpovědět na otázku, jak se změní naše úspory, když se podíl nezbytných výdajů sníží z 80 % na 70 % apod. $\square$

Aplikace 4.4. Tři jednoduché modely růstu

V mnoha případech je růst veličiny přímo úměrný jeho současnému množství. Tímto způsobem se chová populace zvířat nebo růst buněk při malém množství, ale také například úročení na bankovním účtu. Označíme-li pozorovanou veličinu y , můžeme tento model popsat diferenciální rovnicí

$$y' = ay, \quad a > 0.$$

Pro úplnost je nutné doplnit i počáteční podmínku (velikost pozorované veličiny na začátku)

$$y(0) = k, \quad k > 0.$$

Rovnici můžeme vyřešit separací proměnných

$$\frac{dy}{dt} = ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int a \, dt$$

$$\ln y = at + C$$

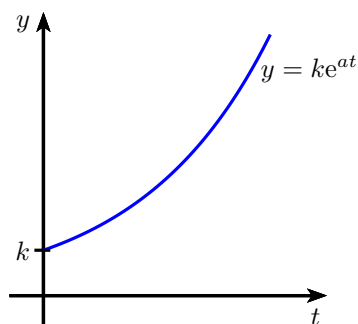
$$y = e^{at+C} = e^{at}e^C = ce^{at}$$

Dosazením počáteční podmínky dostaneme

$$y(0) = ce^0 = k \implies c = k.$$

Řešením počáteční úlohy tedy je funkce

$$y = ke^{at}.$$



Žádná reálná populace ovšem nakonec neroste donekonečna. Omezení místa nebo zásob jídla nakonec růst zpomalí. Jestliže veličina nemůže růst nad nějakou určitou mez M , potom je rozumné například uvažovat, že rychlost růstu je přímo úměrná tomu, jak moc je daná veličina daleko od svého limitu. Tento model je vhodný například i pro popis šíření informací produkováných médii nebo pro popis prodeje výrobku, který je podpořen reklamou.

Matematicky můžeme tento model popsat rovnicí

$$y' = a(M - y).$$

Opět doplníme počáteční podmínku $y(0) = k$ a rovnici vyřešíme. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými a řešíme ji podobně jako v předchozím případě:

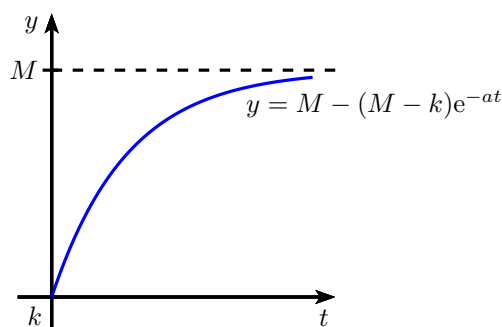
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= a(M - y) \\ \int \frac{dy}{M - y} &= \int a \, dt \\ \ln(M - y) &= -at - C \\ M - y &= e^{-at-C} = ce^{-at} \\ y &= M - ce^{-at}\end{aligned}$$

Po dosazení počáteční podmínky dostaneme

$$y(0) = M - ce^0 = M - c = k \quad \implies \quad c = M - k$$

a počáteční problém je tedy vyřešen funkcí

$$y = M - (M - k)e^{-at}.$$

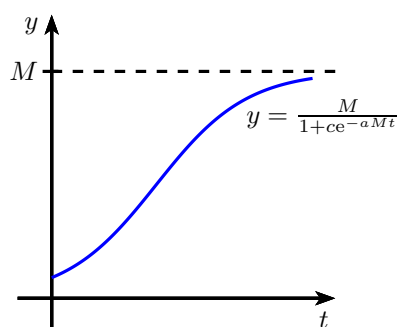


Pokud bychom chtěli komplexnější model populace, případně jednoduchý model epidemie, mohli bychom uvažovat, že rychlost růstu dané veličiny je přímo úměrná její současné velikosti a zároveň její vzdálenosti od horního limitu M . Dostaneme tak diferenciální rovnici

$$y' = ay(M - y).$$

Jedná se opět o rovnici se separovanými proměnnými (kterou je již složitější vyřešit) a jejím řešením je funkce

$$y = \frac{M}{1 + ce^{-aMt}}.$$



4.2 Lineární diferenciální rovnice

Jde o rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (4.3)$$

kde p a q jsou spojité funkce.

Předepíšeme-li počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, pak má lineární rovnice (4.3) právě jedno řešení, a to existuje na celém intervalu, kde jsou funkce p , f spojité.

Budeme hledat takovou funkci $I(x)$, že když jí vynásobíme rovnici (4.3), bude na levé straně derivace součinu $I(x)y$, tj.

$$I(x)(y' + p(x)y) = (I(x)y)' . \quad (4.4)$$

Podář-li se nám takovou funkci najít, bude rovnice (4.3) ve tvaru

$$(I(x)y)' = I(x)q(x)$$

a integrováním obou stran obdržíme

$$I(x)y = \int I(x)q(x) \, dx + c.$$

Dále již získáme hledané řešení rovnice (4.3)

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)q(x) \, dx + c \right].$$

Pokusme se tedy najít vhodnou funkci I . V rovnici (4.4) roznásobíme levou stranu a na pravé straně použijeme pravidlo pro derivaci součinu a dostáváme

$$I(x)y' + I(x)p(x)y = I'(x)y + I(x)y'$$

a odtud

$$I(x)p(x) = I'(x).$$

Dostali jsme tak rovnici se separovanými proměnnými, kterou vyřešíme:

$$\int \frac{dI}{I} = \int p(x) \, dx,$$

$$\ln |I| = \int p(x) \, dx,$$

$$I = K e^{\int p(x) \, dx}.$$

Jelikož hledáme jednu konkrétní funkci I , zvolíme $K = 1$ a dostáváme

$$I(x) = e^{\int p(x) \, dx}.$$

Takovouto funkci $I(x)$ nazýváme *integrační faktor*. Pro nalezení řešení lineární diferenciální rovnici (4.3) vynásobíme obě strany *integračním faktorem*

$$I(x) = e^{\int p(x) \, dx},$$

čímž dostaneme rovnici ve tvaru

$$\left(y e^{\int p(x) \, dx} \right)' = q(x) e^{\int p(x) \, dx}$$

a obě strany této rovnice zintegrujeme. Dostaneme tak řešení

$$y(x) = \left(\int g(x) e^{\int p(x) \, dx} \, dx + c \right) e^{-\int p(x) \, dx}.$$

Tento vzorec si samozřejmě nemusíme pamatovat, stačí jen znát tvar integračního faktoru.

Příklad 4.5. Najděte obecné řešení rovnice

$$\text{a) } y' - 2y = x, \quad \text{b) } y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Řešení. a) Určíme integrační faktor $I = e^{\int -2 dx} = e^{-2x}$ a vynásobíme jím danou rovnici, dostaneme tak

$$y'e^{-2x} - 2e^{-2x}y = xe^{-2x}.$$

Rovnici upravíme do tvaru

$$(ye^{-2x})' = xe^{-2x}$$

a integrujeme obě strany, přičemž pro pravou stranu použijeme metodu per partes:

$$ye^{-2x} = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

Odtud získáme obecné řešení ve tvaru

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Určíme integrační faktor $I = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$. Vynásobením rovnice a úpravou dostaneme

$$(ye^{x^2})' = x.$$

Integrováním obou stran dostaneme

$$ye^{x^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

a odtud obecné řešení rovnice je

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 4.6. Řešte počáteční úlohu

$$x^3y' - 2x^2y = 4, \quad y(1) = -2.$$

Řešení. Rovnici upravíme do tvaru

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{4}{x^3}.$$

Vypočteme integrační faktor

$$I = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Vynásobením rovnice a úpravou dostaneme

$$\left(y \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{4}{x^5}.$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$y \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^4}$$

a získáme obecné řešení rovnice ve tvaru $y = Cx^2 - \frac{1}{x^2}$. Dosazením počáteční podmínky dostáváme $-2 = C - 1$ a odtud $C = -1$. Řešením počáteční úlohy je funkce

$$y = -x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

□

Aplikace 4.7. Ponziho schéma

Ponziho schéma je investiční podvod, který slibuje velkou návratnost investic, ale místo skutečného investování jsou svěřené prostředky použity na vyplácení zisku investorů. Aby nedošly finanční prostředky, je nutné neustále zvyšovat příliv nových investorů, schéma tedy nakonec musí zkolabovat. Pokusíme se najít rovnici, která popisuje počet nutných investorů.

Předpokládejme, že máme na začátku 10 investorů, přičemž každý vloží do fondu 100 000 Kč a je mu slíbena 20 % návratnost investice každý měsíc. Z vloženého milionu tak vyplatíme každému investorovi 20 000 Kč a zbylých 800 000 Kč si necháme. Označme y počet investorů, které potřebujeme, abychom mohli investory nadále vyplácet a přitom si pokaždé nechat částku 800 000 Kč.

Budeme-li částky uvažovat v tisících, pak máme

$$\begin{aligned}\text{příjem} &= 100 \frac{dy}{dt} \\ \text{výdej} &= 20y + 800.\end{aligned}$$

Příjmy a výdaje musí být v rovnováze a navíc víme, že na začátku máme deset investorů. Dostaneme tak počáteční problém

$$100 \frac{dy}{dt} = 20y + 800, \quad y(0) = 10.$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici, jejíž integrační faktor je

$$I = e^{\int -0,2dt} = e^{-0,2t}$$

Po vynásobení a úpravě dostaneme

$$(ye^{-0,2t})' = 8e^{-0,2t}.$$

Integrováním a úpravou pak získáme obecné řešení

$$y = ce^{0,2t} - 40.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme konstantu c

$$10 = ce^0 - 40 \implies c = 50$$

a dostaneme řešení našeho počátečního problému

$$y = 50e^{0,2t} - 40.$$

Tedy například po jednom roce bychom potřebovali $y(12) \approx 511$ investorů.

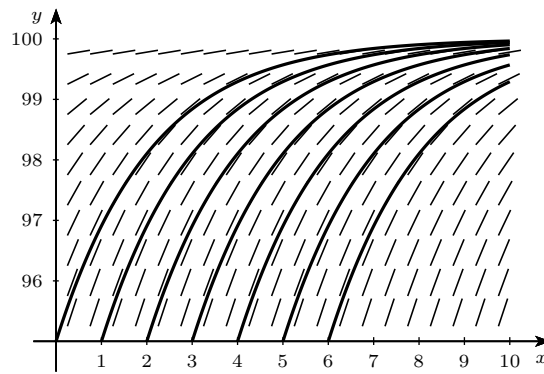
4.3 Geometrická interpretace

V mnoha případech není možné najít explicitní vyjádření hledaného řešení. V případě, kdy je daná rovnice tvaru

$$y' = f(x, y),$$

můžeme získat nějaké informace o hledaném řešení díky geometrické interpretaci dané rovnice.

Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ přiřazuje bodu $[x, y]$ v rovině právě jednu hodnotu $y'(x)$, neboli hodnotu derivace hledané funkce. Tuto hodnotu můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem $[x, y]$. Tuto přímku obvykle znázorňujeme jako krátkou úsečku se středem v daném bodě $[x, y]$ a směrnici $y'(x)$. Tato úsečka se nazývá *lineární element*. Množinu všech lineárních elementů diferenciální rovnice nazýváme *směrové pole*. Graf každého řešení $\varphi(x)$ dané diferenciální rovnice, tzv. *integrální křivka*, má zřejmě tu vlastnost, že tečna v každém jeho bodě $[x, \varphi(x)]$ obsahuje příslušný lineární element. Směrové pole nám tak pomáhá zobrazit tvar hledaných integrálních křivek tím, že ukazuje směr, v kterém křivka prochází každým bodem.



Směrové pole rovnice $y' = \frac{1}{2}y \left(1 - \frac{1}{100}y\right)$ a řešení pro různé počáteční podmínky

4.4 Numerické řešení počáteční úlohy

Kromě geometrické interpretace můžeme najít i přibližné řešení rovnice pomocí tzv. *numerických metod*. Nejjednodušší metodou numerického řešení počáteční úlohy je *Eulerova metoda*. Základní myšlenkou této metody je aproximace řešení lomenou čarou.

Uvažujme počáteční úlohu

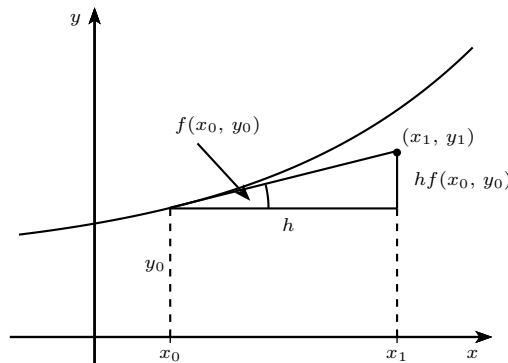
$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Budeme hledat přibližné hodnoty tohoto řešení v rovnoměrně vzdálených bodech

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h, \dots,$$

kde h se nazývá dělicí krok.

Podobně jako u směrového pole si všimneme, že nám rovnice $y' = f(x, y)$ udává hodnotu směrnice tečny v bodě $[x_0, y_0]$, která je $y' = f(x_0, y_0)$, což nám umožní odhadnout hodnotu řešení v bodě x_1 .



Pomocí obrázku můžeme odvodit, že hodnota v bodě x_1 je tak přibližně rovna

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Známe-li hodnotu v bodě x_1 , můžeme přibližně vyjádřit hodnotu v x_2 atd. Celkově můžeme Eulerovu metodu shrnout následovně:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Samozřejmě dnes již nikdo tyto výpočty neprovádí ručně.

4.5 Aplikační příklady

Příklad 4.8. Sbírka umění byla pořízena za cenu 400 000 Kč a předpokládá se, že její hodnota poroste každý rok o 5 %. Jak vypadá diferenciální rovnice, která modeluje hodnotu sbírky v čase? Jaká bude hodnota sbírky za 10 let?

Příklad 4.9. Je-li nějaká zpráva opakovaně vysílána médii, tak se v první fázi šíří rychle, ale postupně již pomaleji, jelikož většina lidí již zprávu zná. Sociologové často předpokládají, že rychlost šíření zprávy je pak přímo úměrná počtu osob, které tuto zprávu ještě neslyšely. Uvažujme, že máme město s 50 000 obyvateli, přičemž na začátku danou zprávu nezná nikdo a po dvou hodinách polovina obyvatel. Kolik obyvatel bude zprávu znát za 6 hodin? A kdy bude se zprávou seznámeno 90 % obyvatel?

Příklad 4.10. Spalování fosilních paliv je zodpovědné za zvýšení množství oxidu uhličitého, který je pravděpodobně jednou z příčin zvýšení globální teploty. V současnosti je v atmosféře přibližně 3200 miliard tun oxidu uhličitého a jeho množství roste každoročně o 50 miliard tun, přičemž pouze 1 % z akumulovaného množství se každoročně odstraní přírodními procesy. Namodelujte množství oxidu uhličitého v čase pomocí diferenciální rovnice a určete, kdy bude v atmosféře 4000 miliard tun oxidu uhličitého (jedná se o množství, při kterém by mělo dojít ke zvýšení teploty o dva stupně Celsia). Jaké bude dlouhodobé množství oxidu uhličitého v atmosféře?