Kapitola 5

Autonomní systémy

Definice 5.1. Nechť f a g jsou spojité funkce proměnných x, y. Soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y), \end{aligned} \tag{S}$$

kde derivace značí derivaci podle proměnné t, se nazývá dvourozměrný *autonomní systém.* Jeho řešením rozumíme vektorovou funkci $(x(t), y(t))$, která vyhovuje danému systému.

Proměnnou t nazýváme *čas.* Systém (S) se nazývá autonomní, protože jeho pravé strany nezávisí explicitně na čase t. Řešení systému (S) můžeme interpretovat jako křivku v rovině, která je zadaná tzv. parametricky s parametrem t.

Jestliže t_0, x_0 a y_0 jsou libovolná reálná čísla, pak se úloha najít řešení systému, který splňuje počáteční podmínky $(x(t_0), y(t_0) = (x_0, y_0)$, nazývá *počáteční úloha.*

Jestliže $(x(t), y(t))$ je řešením systému (S), pak přímým dosazením do (S) vidíme, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ je řešením i funkce $(x(t + c), y(t + c))$. Proto můžeme volit počáteční podmínku v čase $t_0 = 0$. Přírodní procesy probíhají nezávisle na čase, kdy je pozorujeme, proto počáteční čas může být začátkem pozorování nějakého reálného procesu.

Definice 5.2. Bod (x_0, y_0) se nazývá *stacionární bod* (také *equilibrium, rovnovážný bod, singulární bod*) systému (S), jestliže platí

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{a} \quad g(x_0, y_0) = 0.$$

Bod (x_0, y_0) je singulárním bodem právě tehdy, když má systém konstantní řešení. To znamená, že stav systému se v tomto bodě v čase nemění.

Co se stane, jestliže stav systému vychýlíme ze stacionárního bodu?

Uvažujme ekosystém, kde máme systém dravec-kořist. Je-li početní stav kořisti takový, že nově narození jedinci jsou dravci likvidováni, a počet dravců je takový, že kořist právě uživí tento počet dravců, jsou v rovnováze. Co se stane, jestliže se jejich počet z rovnovážného stavu vychýlí, např. do ekosystému pustíme větší počet zajíců a vlci budou mít více potravy? Záleží na počtu zajíců (výchylce):

- Počet vlků se mírně zvětší, pak se počet vlků ustálí na stejném počtu jako dříve – stacionární bod lze považovat za ekologicky stabilní.
- Počet vlků se zvětší, ale v dalším průběhu se tato odchylka nezvětšuje – jde o udržitelný stav.
- Buď se vlci přemnoží, nebo vlci zajíce nestačí likvidovat a přemnoží se zajíci. Pak se stav systému podstatně změní, stacionární bod je tzv. nestabilní.

Charakter stacionárního bodu (x_0, y_0) systému (S) je dán tím, zda je stabilní nebo nestabilní se změnou času.

Definice 5.3. Nechť dvojice funkcí $x(t)$, $y(t)$ je řešením systému (S), Množina T bodů v rovině xy definovaná

$$T = \{(\bar{x}, \bar{y})\colon x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad y(\bar{t}) = \bar{y} \quad \text{pro nějaké} \quad \bar{t} \in \mathbb{R}\}$$

se nazývá *trajektorie systému* (S).

Trajektorie tedy chápeme jako průmět prostorového grafu řešení systému do roviny. V podstatě existují jen tři následující typy trajektorií.

i) Stacionární body. Tyto body odpovídají konstantním řešením.

ii) Uzavřené trajektorie, tzv. *cykly*. Tyto trajektorie odpovídají periodickým řešením. Uvnitř každého cyklu leží alespoň jeden stacionární bod.

iii) Trajektorie, které samy sebe neprotínají a pro $t \to \pm\infty$ mají jednu z následujících vlastností

   a) Trajektorie mají alespoň jednu složku neohraničenou.

   b) Trajektorie konvergují (tj. „blíží se“) k některému stacionárnímu bodu.

   c) Trajektorie konvergují k některému cyklu.

   d) Trajektorie konvergují k množině tvořené konečným počtem stacionárních bodů a jinými trajektoriemi, které vedou z jednoho stacionárního bodu do druhého.

V praxi se naštěstí s trajektoriemi, které by měly vlastnost d), většinou nesetkáváme. Každá trajektorie, která je ohraničená a není stacionárním bodem nebo cyklem, tedy začíná a končí buď ve stacionárním bodě a nebo se odmotává z nějakého cyklu (zamotává na nějaký cyklus).

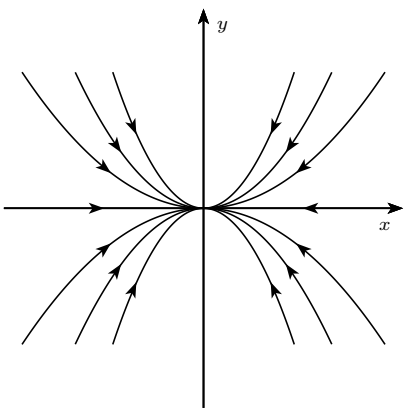
5.1 Stacionární body

Podle chování trajektorií v okolí stacionárních bodů rozdělujeme stacionární body do několika skupin. Nechť $[x^\star, y^\star]$ je stacionárním bodem systému (S).

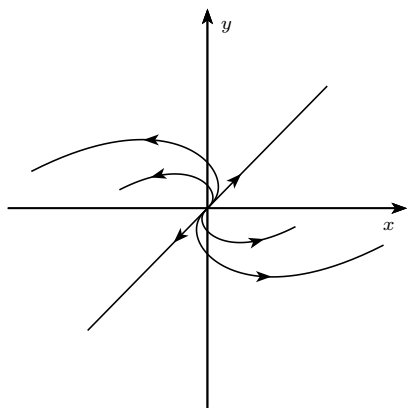
Uzel

Stacionární bod $[x^\star, y^\star]$ se nazývá *uzel*, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto bodu konvergují pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ k bodu $[x^\star, y^\star]$ tak, že kolem tohoto bodu nedochází k oscilacím.

Uzel nazýváme *stabilní*, jestliže všechny trajektorie do něj konvergují pro $t \to \infty$, tj. všechny trajektorie z nějakého okolí do tohoto bodu směřují. V opačném případě tento bod nazýváme *nestabilní*.



stabilní uzel

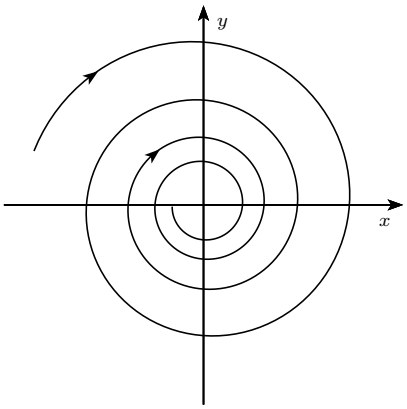


nestabilní uzel

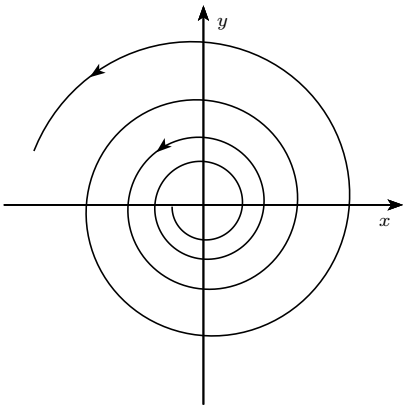
Ohnisko

Stacionární bod $[x^\star, y^\star]$ se nazývá *ohnisko*, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto bodu konvergují do tohoto bodu buď pro $t \to \infty$nebo pro $t \to \infty$ a to tak, že kolem tohoto bodu dochází k oscilacím se zmenšující se amplitudou.

Ohnisko nazýváme *stabilní*, jestliže všechny trajektorie do něj konvergují pro $t \to \infty$, tj. všechny trajektorie z nějakého okolí do tohoto bodu směřují. V opačném případě tento bod nazýváme *nestabilní*.

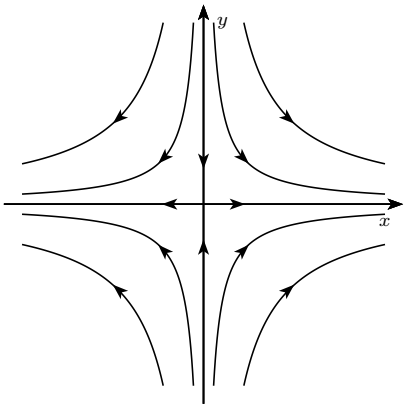


stabilní ohnisko

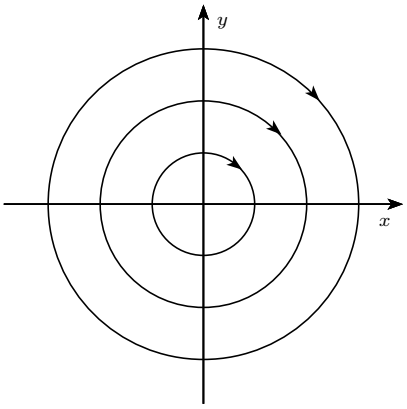


nestabilní ohnisko

Sedlo
Stacionární bod $[x^\star, y^\star]$ se nazývá *sedlo*, jestliže v každém jeho okolí existuje pouze konečný počet trajektorií, které pro $t \to \pm\infty$ konvergují k tomuto bodu



sedlo



střed

Bod rotace a střed
Stacionární bod $[x^\star, y^\star]$ se nazývá *bod rotace*, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho trajektorií, které jsou cykly. Pokud v nějakém jeho okolí existují pouze cykly, pak se tento bod nazývá *střed*.

Definice 5.4. Matice

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice* soustavy (S).

Klasifikace stacionárních bodů

Věta 5.5. *Uvažujme vlastní čísla Jacobiho matice vypočtené ve stacionárním bodě.*

- *Jsou-li obě vlastní čísla reálná kladná, je stacionární bod nestabilní uzel.*
- *Jsou-li obě vlastní čísla reálná záporná, je stacionární bod stabilní uzel.*
- *Jsou-li vlastní čísla reálná a mají-li opačná znaménka, je stacionární bod sedlo.*
- *Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená s kladnou reálnou částí, je stacionární bod nestabilní ohnisko.*

- *Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená se zápornou reálnou částí, je stacionární bod stabilní ohnisko.*
- *Jsou-li vlastní čísla komplexně sdružená s nulovou reálnou částí, je stacionární bod ohnisko nebo bod rotace.*

Příklad 5.6. Nalezněte stacionární body a určete jejich typ

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y \\ y' &= 2x + \ \ y \end{aligned}$$

Řešení. Najdeme stacionární bod řešením soustavy

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ 2x + \ \ y &= 0 \end{aligned}$$

Dostaneme tak jediný stacionární bod $S = [0, 0]$. Jacobiho matice je

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jelikož je systém lineární, tak Jacobiho matice obsahuje pouze konstanty a platí $J(x, y) = J(0, 0)$.

Určíme vlastní čísla Jacobiho matice. Sestavíme charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a vypočteme determinant, čímž dostaneme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0\,.$$

Jejím řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 5$. Stacionární bod je tedy sedlo. □

Příklad 5.7. Nalezněte stacionární body a určete jejich typ

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - 3 \\ y' &= x + y^2 - 6 \end{aligned}$$

Řešení. Najdeme stacionární body řešením soustavy

$$\begin{aligned} x - 2y - 3 &= 0 \\ x + y^2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Vyjádřením $x = 2y + 3$ z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme

$$y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Odtud $y_1 = -3$ a $y_2 = 1$ a dostaneme celkem dva stacionární body

$$S_1 = [-3, -3], \qquad S_2 = [-2, 1], \qquad S_2 = [5, 1]\,.$$

Jacobiho matice je

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}.$$

Postupně určíme vlastní čísla Jacobiho matice ve všech stacionárních bodech.

V bodě $S_1 = [-3, -3]$ dostaneme matici

$$J(-3, -3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Příslušná charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0.$$

Jejím řešením jsou vlastní čísla

$$\lambda_1 = \frac{-5+\sqrt{41}}{2} > 0 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \frac{-5-\sqrt{41}}{2} < 0$$

a stacionární bod je tedy sedlo.

V bodě $S_2 = [5, 1]$ dostaneme matici

$$J(5,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příslušná charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0.$$

Jejím řešením jsou vlastní čísla

$$\lambda_1 = \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \quad \text{a} \quad \lambda_2 = \frac{3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$$

a stacionární bod je tedy nestabilní ohnisko. □

Aplikace 5.8. Matematická teorie válečného konfliktu Pomocí autonomního systému můžeme vytvořit jednoduchý model[1], pomocí kterého se dá popsat vztah mezi dvěma zeměmi, případne aliancemi. Základní předpoklady jsou, že každá z těcho zemí by se bránila případnému útoku druhé země a tento útok shledává možným v závislosti na připravenosti druhé země.

Označme $x(t)$ válečný potenciál první země a $y(t)$ válečný potenciál druhé země. Změna $x(t)$, tj. $x'(t)$, je přirozeně svázána s válečnou připraveností druhé země $y(t)$ a závisí i na postoji první země k druhé. V nejjednodušším modelu reprezentujeme tyto závislosti pomocí členů ky a g a oba přispívají k růstu $x(t)$. Na druhou stranu cena zbrojení negativně ovlivňuje růst $x(t)$, což modelujeme pomocí členu $-\alpha x$. Podobné úvahy platí i pro $y(t)$. Dostáváme tak autonomní systém tvaru

$$\begin{aligned} x'(t) &= ky - \alpha x + g \\ y'(t) &= lx - \beta y + h, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde k, l, α, β, g a h jsou kladné konstanty. Jdou-li hodnoty x nebo y do nekonečna, dá se tento stav interpretovat jako válka. Nalezněte stacionární bod tohoto systému a určete jeho typ.

Řešení. Za předpokladu $\alpha\beta - kl \neq 0$ má systém (5.1) jeden stacionární bod o souřadnicích

$$x_0 = \frac{kh+\beta g}{\alpha\beta - kl}, \qquad y_0 = \frac{lg+\alpha h}{\alpha\beta - kl}.$$

Jacobiho matice systému (5.1) je

$$\begin{pmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice systému jsou řešením charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta - kl = 0.$$

Pomocí vzorce pro určení kořenů kvadratické rovnice dostaváme

$$\lambda_{12} = \frac{-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha\beta - kl)}}{2}, \tag{5.2}$$

[1] Tento model pochází od britského matematika F. L. Richardsona a jde o první pokus, který se snaží modelovat tuto problematiku.

což můžeme upravit do tvaru

$$\lambda_{12} = \frac{-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4kl}}{2}.$$

Odtud vidíme, že výraz pod odmocninou je kladný a vlastní čísla jsou tak obě reálná a různá. Z výrazu (5.2) plyne, že oba kořeny jsou záporné, jestliže $\alpha\beta - kl > 0$, a jeden kořen je kladný a druhý záporný, jestliže $\alpha\beta - kl < 0$.

V případě $\alpha\beta - kl > 0$ je stacionární bod stabilní uzel, tj. nenastává válečný stav. V případě $\alpha\beta - kl < 0$ je stacionární bod sedlo a válka nastávává.

Pro situaci před první světovou válkou byly vypočteny koeficienty $k = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}2$ pro alianci Německa s Rakouskem-Uherskem a $l = 0{,}9$, $\beta = 0{,}2$ pro alianci Francie s Ruskem. V tomto konkrétním případě dostáváme pro chování stacionárního bodu $\alpha\beta - kl = \alpha^2 - k^2 = 0{,}04 - 0{,}81 = -0{,}77$, tj. stacionární bod je sedlo a válka nastává, což je ve shodě s historickou zkušeností. □

5.2 Aplikační úlohy k řešení

Příklad 5.9. Nalezněte stacionární body a určete jejich typ pro tzv. Lotkův-Volterrův model dravec kořist:

$$\begin{aligned} K' &= aK - bKD \\ D' &= -cD + dKD, \end{aligned}$$