Mendelova univerzita

Alice Králová, Petr Liška, Miroslava Tkadlecová

Konstruktivní geometrie

Brno 2015

Tato publikace vznikla za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu (CZ.1.07/2.2.00/28.0021).

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Kapitola 1

Úvod do konstruktivní geometrie

1.1 Planimetrie

Planimetrie je část geometrie pojednávající o vzájemných vztazích rovinných geometrických útvarů a jako taková je probíraná na střední škole, zopakujeme proto jen některé základní pojmy a vlastnosti.

Základní útvary (prvky) roviny jsou *bod* a *přímka*, v prostoru k nim přibude *rovina*. Body budeme značit velkými písmeny, přímky malými písmeny a roviny malými písmeny řecké abecedy.

U základních útvarů je důležitá jejich vzájemná poloha. Máme-li útvary stejného druhu, např. přímky a, b, tak ty mohou být buď totožné (splývající), značíme $a \equiv b$, nebo různé, značíme $a \not\equiv b$. Nemáme-li útvary stejného druhu, např. bod A a přímka a, tak ty jsou buď *incidentní*, značíme $A \in a$ (říkáme, že bod A leží na přímce a nebo přímka a prochází bodem A), nebo v opačném případě nejsou incidentní, značíme $A \notin a$.

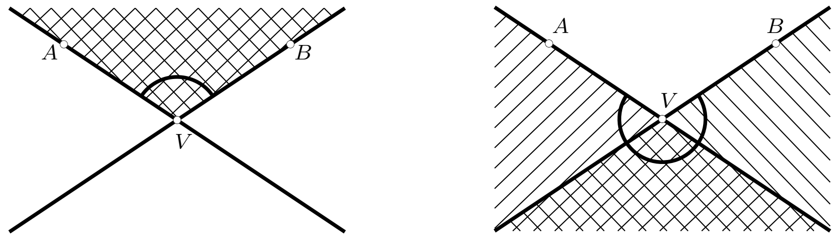
Platí, že dva různé body určují přímku, nebo-li dvěma různými body prochází právě jedna přímka. Dvě různé přímky v rovině mohou mít buď jeden společný bod, tzv. *průsečík*, v tomto případě říkáme, že jsou *různoběžné*, a nebo nemají žádný společný bod a říkáme, že jsou *rovnoběžné* (značíme $a \parallel b$). Připomeňme, že jedním bodem lze vést k dané přímce právě jednu rovnoběžku.

Libovolný bod na přímce rozděluje tuto přímku na dvě navzájem opačné *polopřímky*. Máme-li dva body A, B na přímce, takové, že $A \not\equiv B$, pak průnikem polopřímek AB a BA je *úsečka* AB.

Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné *poloroviny* a je jejich společnou hranicí. Bod neležící na přímce je vnitřním bodem jedné z polorovin. Polorovinu s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem M označujeme jako polorovinu ABM.

Dvě různé polopřímky VA a VB dělí rovinu na dva *úhly* AVB. Bod V nazýváme *vrchol* úhlu, polopřímky VA, VB *ramena*. Nejsou-li polopřímky VA, VB opačné, pak jeden úhel je průnikem polorovin VAB a VBA a nazývá se *konvexní úhel*[1] AVB (značíme $\sphericalangle AVB$). Druhý úhel vznikne sjednocením polorovin opačných k polorovinám VAB, VBA a nazývá se nekonvexní úhel AVB. Jsou-li polopřímky opačné, je každý z obou úhlů AVB *úhel přímý*. Jsou-li polopřímky VA a VB splývající určují jak *nulový úhel* (nemá žádné

[1] Obecně se geometrický útvar nazývá konvexní, právě když úsečka s krajními body v libovolných dvou bodech útvaru je celá součástí tohoto útvaru.

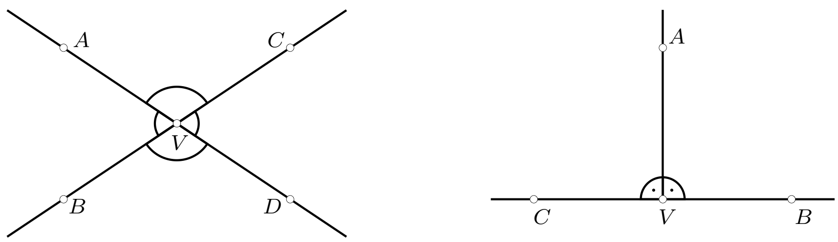


(a) (b)

Obrázek 1.1: Konvexní a nekonvexní úhel

vnitřní body), tak *úhel plný*, jehož vnitřní body jsou všechny body roviny vyjma bodů na polopřímce VA.

Dva konvexní úhly AVB, AVC, které mají společné rameno VA a ramena VB a VC jsou navzájem opačné polopřímky, se nazývají *uhly vedlejší*. Dva konvexní úhly AVB, CVD, jejichž ramena VA, VD a ramena VB, VC jsou navzájem opačné polopřímky, se nazývají *úhly vrcholové*. *Pravý úhel* je takový úhel, který ke shodný se svým vedlejším úhlem. Konvexní úhel, který je menší než pravý se nazývá *ostrý úhel*, konvexní úhel větší než pravý se nazývá *tupý úhel*.



(a) (b)

Vzdáleností dvou bodů A, B rozumíme velikost úsečky AB, značíme $|AB|$. *Odchylkou dvou různoběžných přímek* rozumíme velikost ostrého nebo pravého úhlu, který přímky svírají. Svírají-li dvě různoběžné přímky pravý úhel, říkáme že jsou *navzájem kolmé* a nazýváme je *kolmicemi*. Jejich průsečík se nazývá *pata kolmice*. Platí, že k dané přímce lze daným bodem vést právě jednu kolmici. *Vzdáleností bodu* A *od přímky* p rozumíme délku úsečky AP, kde P je pata kolmice vedené z bodu A na přímku P. *Vzdáleností dvou rovnoběžek* a, b rozumíme vzdálenost libovolného bodu $A \in a$ od přímky b.

Na závěr uveďme definici dělícího poměru.

Definice 1.1. Nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body na přímce. *Dělicím poměrem* λ_C *bodu* C *vzhledem k bodům* A, B je reálné číslo, jehož absolutní hodnoty rovnu podílu vzdáleností $|AC|$ a $|BC|$, tj.

$$|\lambda_C| = \frac{|AC|}{|BC|},$$

přičemž toto číslo je kladné, není-li bod C bodem úsečky AB, a je záporné, je-li bod C vnitřní bod úsečky AB.

Je-li tedy bod C například středem úsečky AB, pak platí $\lambda_C = -1$.

Množiny všech bodů daných vlastností Při řešení úloh v konstruktivní geometrii se často užívá *množin všech bodů dané vlastnosti*, čímž rozumíme takovou množinu, že každý její bod má jistou vlastnost a že tato množina obsahuje všechny body dané vlastnosti. Mezi nejdůležitější patří následující množiny.

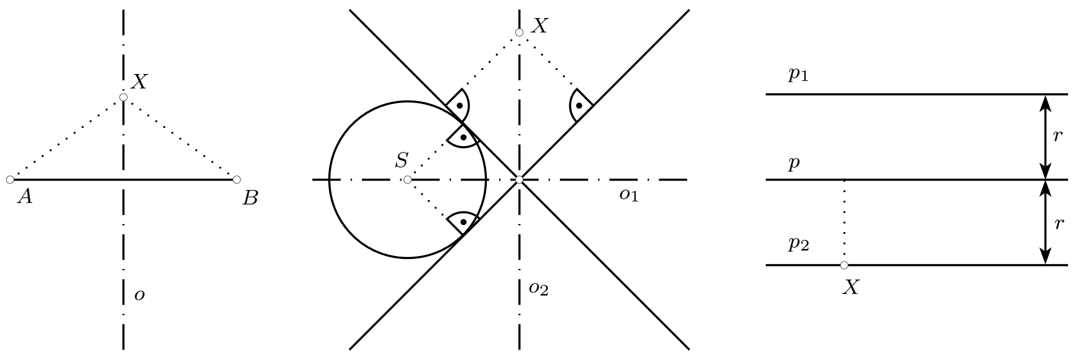
Množina všech bodů roviny, které mají od daného pevného bodu S roviny konstantní vzdálenost $r > 0$ je *kružnice* k se středem S a poloměrem r, zapisujeme $k(S, r)$.

Množina všech bodů, které mají od dvou různých bodů A, B stejné vzdálenosti, je *osa úsečky* AB.

Množina všech bodů, které mají od dvou různoběžných přímek a, b stejně velké vzdálenosti, jsou *osy* o_1*,* o_1 *úhlů*, které tyto různoběžky svírají.

Množina všech bodů, které mají od dané přímky p danou vzdálenost $r > 0$, jsou dvě různé přímky p_1, p_2 rovnoběžné s p, které mají od přímky p vzdálenost r.

Nechť je dána úsečka AB. Množina všech bodů X, pro které platí, že $\sphericalangle AXB$ je pravý (tj. $|\sphericalangle AXB| = 90°$), je tzv. *Thaletova kružnice* opsaná nad úsečkou AB jako průměrem.



Obrázek 1.2: Základní množiny všech bodů dané vlastnosti

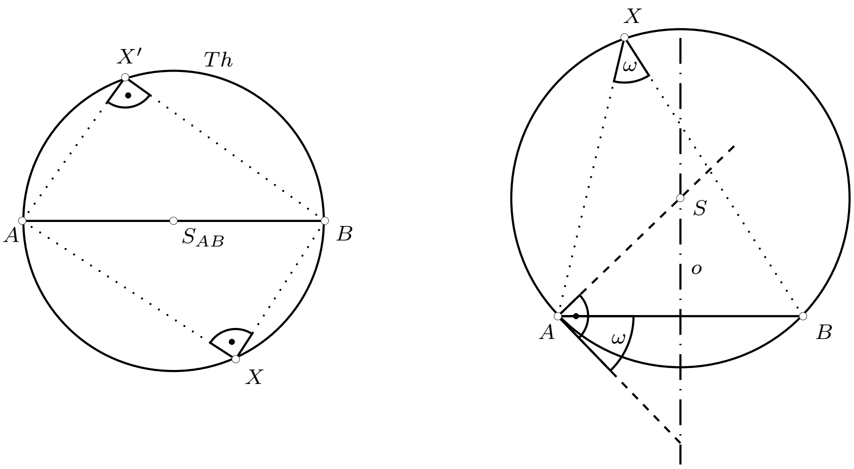
Thaletova kružnice je speciálním případem obecnější množiny:

> Nechť je dána úsečka AB. Množina všech bodů X, které leží v jedné z polorovin určených přímkou AB a pro které platí $|\sphericalangle AXB| = \omega$, kde ω je daný úhel ($0 < \omega < \pi$) je kruhový oblouk AXB o poloměru $r = \frac{|AB|}{2 \sin \omega}$ bez krajních bodů A, B. Konstrukce tohoto oblouku plyne z obrázku 1.3.

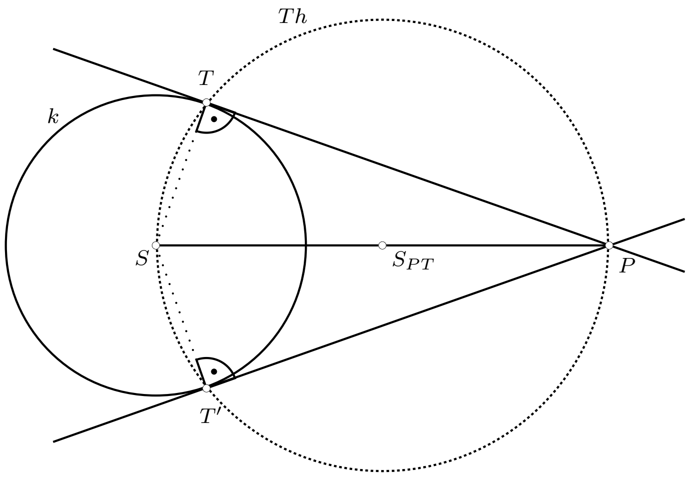
Připomeňme, že *tečnou* kružnice rozumíme přímku, která má s kružnicí jediný společný bod, tzv. *bod dotyku*. Navíc platí, že tečna kružnice je kolmá k přímce, která spojuje bod dotyku se středem kružnice.

Konstrukce 1.2. Nechť je dána kružnice $k(S, r)$ a její vnější bod P. Sestrojte tečny z bodu P ke kružnici k.

Řešení. Úhel, který svírá hledaná tečna a spojnice středu kružnice s bodem dotyku, je pravý. Stačí tedy sestrojit Thaletovu kružnici nad průměrem SP, průsečíky T, T' Thaletovy kružnice a zadané kružnice k jsou body dotyku hledaných tečen. Přímky PT a PT' jsou hledané tečny. □



Obrázek 1.3: *Thaletova kružnice* a kruhový oblouk jako množina všech bodů dané vlastnosti



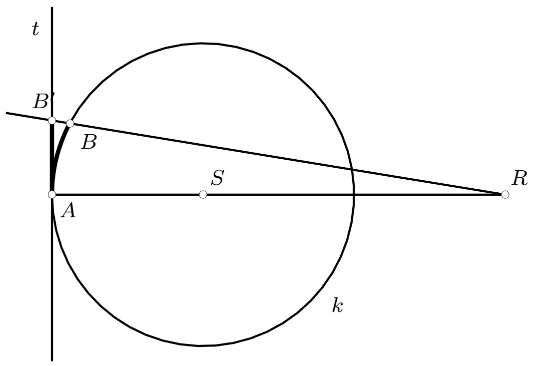
Obrázek 1.4: Tečny z bodu ke kružnici

Při některých konstrukcích potřebujeme znát délku kruhového oblouku, případné délku celé kružnice, jde úlohou nazývanou *rektifikace*.

Konstrukce 1.3 (Sobotkova rektifikace)**.** Určete délku kruhového oblouku AB na kružnici $k(S, r)$.

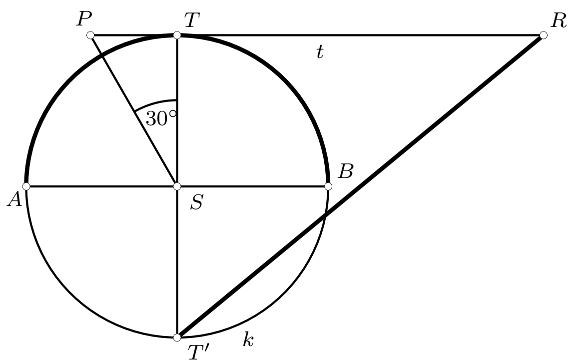
Řešení. Sestrojíme úsečku, která bude mít přibližně stejnou délku, jako daný oblouk. Od bodu A naneseme na polopřímku AS délku $3r$, získáme tak bod R. V bodě A sestrojíme tečnu t kružnice k. Průsečík přímky BR s tečnou t je bod B'. Délka úsečky AB' je hledaná délka oblouku AB.

Poznamenejme, že ta to konstrukce se většinou používá při rektifikaci oblouku, kterému odpovídá středový úhel 30°, přičemž délku oblouku zjistíme s chybou maximálně $0,0002r$. □



Obrázek 1.5: Sobotkova rektifikace

Konstrukce 1.4 (Kochaňského rektifikace)**.** Určete délku půlkružnice omezené průměrem AB kružnice $k(S, r)$.



Obrázek 1.6: Kochaňského rektifikace

Řešení. Sestrojíme úsečku, která bude mít stejnou délku jako daná půlkružnice. Sestrojíme kolmý průměr TT' k průměru AB. V bodě T sestrojíme tečnu t kružnice k. Sestrojíme přímku svírající úhel 30° s přímkou ST, tato přímka protne tečnu t v bodě P. Na polopřímku PT naneseme od bodu P vzdálenost $3r$, dostaneme tak bod R. Délka úsečky RT' je přibližně rovna délce dané půlkružnice.

Při této přibližné konstrukci zjistíme délku daného oblouku s chybou $0,00012r$. □

1.2 Křivky v rovině

Velmi často je *rovinná křivka* definována jako dráha, kterou bod proběhne při spojitém pohybu v rovině. Tato definice sebou přináší jisté obtíže, jelikož takto definovaná křivka obsahuje některé nehezké body z hlediska chování tečny této křivky. Kromě bodu, v kterém křivka protíná sama sebe, se jedná o *bod vratu* a *bod lomu*, viz obrázek 1.7.

(a) Bod vratu (b) Bod lomu

Obrázek 1.7: Body na křivce

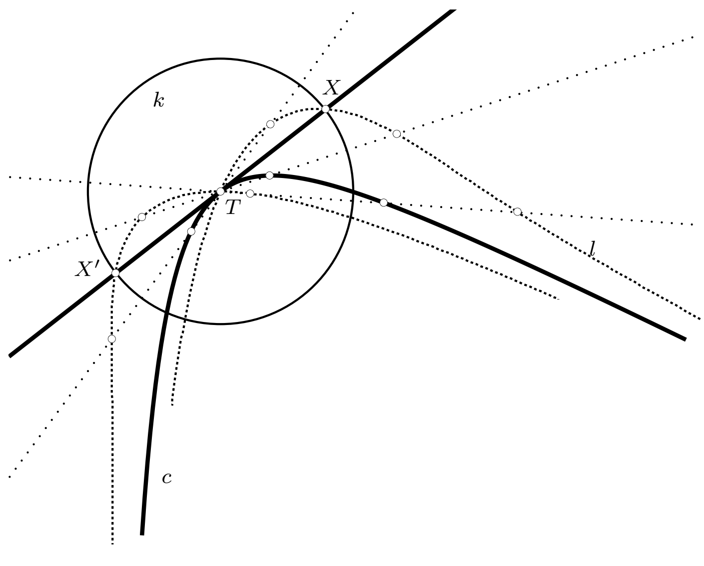
Definice 1.5. *Rovinnou křivkou* budeme rozumět dráhu, kterou proběhne bod při spojitém pohybu v rovině a která sama sebe neprotíná a neobsahuje body vratu ani body lomu.

Empirickými křivkami rozumíme takové rovinné čáry, u kterých není znám jejich výtvarný zákon (tj. jsou víceméně náhodné). Typickým příkladem empirických křivek jsou vrstevnice na mapě.

Tečnou t rovinné křivky c v bodě T budeme rozumět spojnici bodu T s bodem T', který je k bodu T soumezný, tj. nekonečně blízký.[2] Kolmice k tečně t v bodě T se nazývá *normálou* n křivky c. Ukážeme si několik konstrukcí, které nám umožní sestrojit tečnu a normálu empirické křivky.

Konstrukce 1.6. V daném bodě T empirické rovinné křivky c sestrojte její tečnu t.

Řešení. Zvolme libovolnou kružnici k, která má střed v bodě T a poloměr r. Sestrojíme pomocnou křivku l, která protne kružnici k v průsečíku X hledané tečny s kružnicí k. Tečna tak bude určena body T a X.

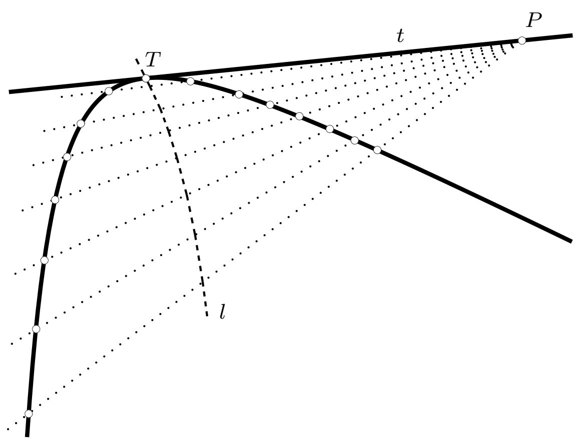


Obrázek 1.8: Tečna empirické křivky

[2]Takto pojatá tečna má blízko k definici tečny ke grafu funkce. Tečny kuželoseček, které budeme definovat později, jsou tečnami i v tomto smyslu.

V okolí bodu A zvolíme na křivce c několik libovolných bodů a spojíme je s bodem T (vznikne tak tzv. svazek přímek o středu T). Od zvolených bodů naneseme na přímky vzdálenost r (tj. poloměr zvolené kružnice). Spojnicí takto vzniklých bodů je křivka l, která protíná kružnici k v bodech X a X', které leží na hledané tečně (stačila by tedy jen jedna část křivky l). □

Konstrukce 1.7. Z daného bodu P sestrojte tečnu t k dané empirické rovinné křivce c.



Obrázek 1.9: Tečna z bodu k empirické křivce

Řešení. V bodě P sestrojíme několik přímek, které danou křivku c protínají (jsou jejími sečnami). Sestrojíme středy tětiv, které tyto přímky vytínají na křivce c. Spojnice těchto středů je křivka l, společný bod křivek l a c je bod dotyku T hledané tečny t. Přímka PT je tedy hledaná tečna. □

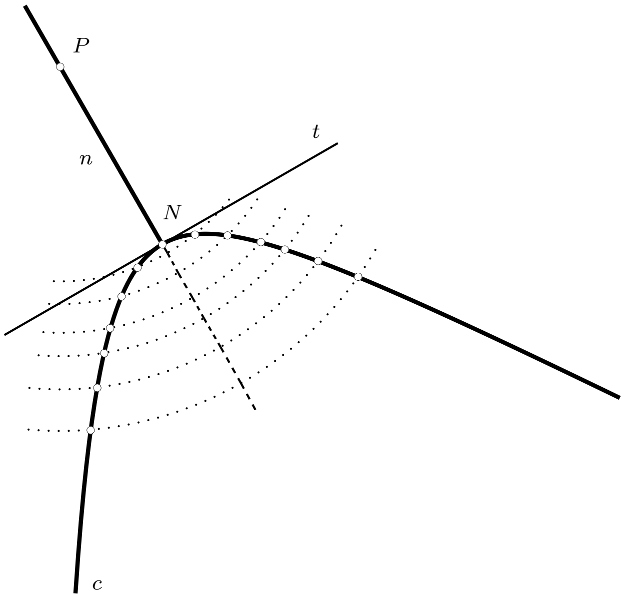
Konstrukce 1.8. K dané empirické křivce c sestrojte její normálu n procházející bodem P ($P \notin c$).

Řešení. Sestrojíme několik soustředných kružnic se středem v bodě P a poloměry volenými tak, aby kružnice protínaly křivku c poblíž hledané paty normály. Určíme středy takto vzniklých kruhových oblouků. Spojnice těchto středů je křivka l, která protíná křivku c v bodě N, který je patou hledané normály n. Normála je tak určena body PN. □

Další praktickou dovedností je práce s délkou části křivky.

Konstrukce 1.9. Určete délku křivky c mezi body A a B.

Řešení. Nejjednodušším způsobem je nahrazení dané části křivky lomenou čarou, jejíž vrcholy leží na dané křivce a strany mají co možná nejmenší délku. Délka této lomené čáry je přibližně rovna délce dané části křivky. □



Obrázek 1.10: Normála empirické křivky

1.3 Stereometrie

V této části si připomeneme některé důležité pojmy a vlastnosti týkající se základních útvarů v prostoru.

Jako již dříve platí, že dva různé body určují právě jednu přímku, zajímavější je to ovšem se vzájemnou polohou dvou přímek. Podobně jako v rovině se dvě přímky, které mají společný bod, nazývají *různoběžky*. Leží-li dvě přímky v jedné rovině a nemají žádný společný bod, nazývají se *rovnoběžky* (splývající přímky budeme též nazývat rovnoběžkami). Dvě přímky, které neleží v téže rovině (a nemají tedy ani žádný společný bod) se nazývají *mimoběžky*.

Rovina je jednoznačně určena

třemi různými body, které neleží na jedné přímce

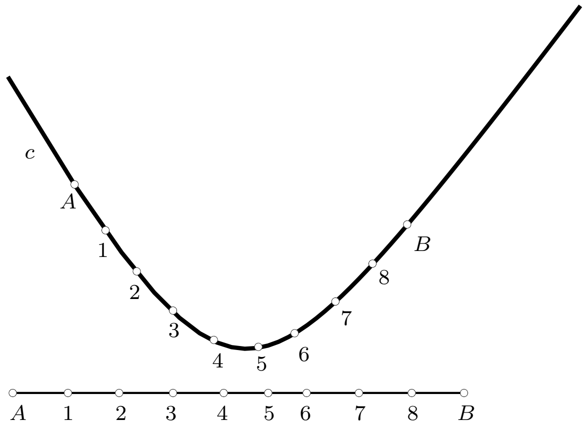
přímkou a bodem, který na ní neleží

dvěma různoběžkami

dvěma nesplývajícími rovnoběžkami

Dvě různé roviny se buď protínají v jediné přímce, tzv. *průsečnici*, a nebo jsou rovnoběžné. Vzájemnou polohu tří různých rovin ilustruje obrázek 1.12.

Platí, že ke každé přímce lze vést bodem, který na ní neleží, právě jednu přímku, která je s ní rovnoběžná. Obdobně pro rovinu platí, že ke každé rovině lze vést bodem, který v ní neleží, právě jednu rovinu rovnoběžnou, tj. jedním bodem lze vést nekonečně mnoho přímek rovnoběžných s danou rovinou. Některé další vlastnosti rovnoběžnosti jsou shrnuty v následujících větách.



Obrázek 1.11: Rektifikace empirické křivky

Věta 1.10. *Přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ (nebo též rovina ϱ je rovnoběžná s přímkou p), jestliže existuje přímka q, $q \in \varrho$ taková, že $p \parallel q$. Značíme $p \parallel \varrho$ ($\varrho \parallel p$).*

Věta 1.11. *Rovina σ je rovnoběžná s rovinou ϱ, jestliže v rovině σ existují dvě různoběžky p, q takové, že $p \parallel \varrho$ a $q \parallel \varrho$.*

Věta 1.12. *Přímka p je rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami ϱ, σ, jestliže je rovnoběžná s jejich průsečnicí r.*

V následujícím se zaměříme na metrické vztahy v prostoru, tj. úhly, kolmost a vzdálenost.

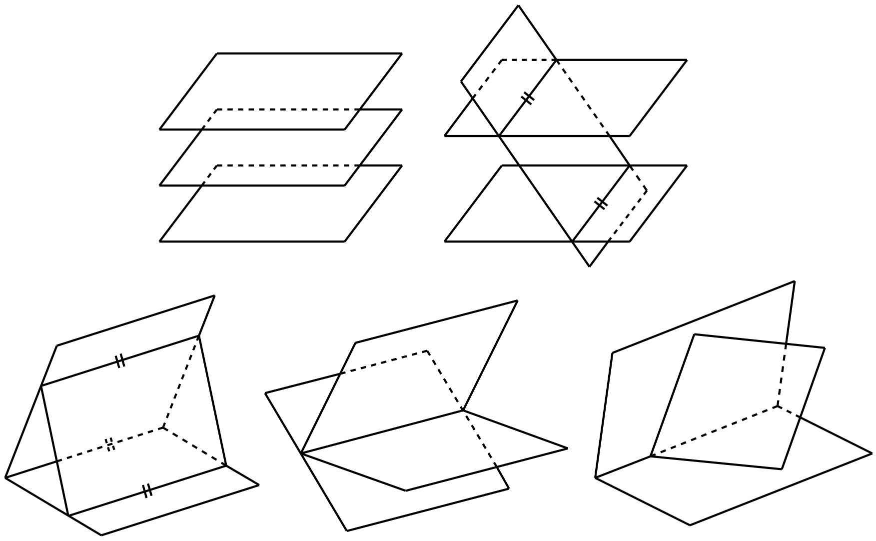
Úhlem dvou přímek v prostoru rozumíme úhel rovnoběžek s danými přímkami vedenými libovolným bodem v prostoru, podobně jako v rovině volíme jen ten úhel, který není větší než pravý. Dvě přímky nazýváme *kolmé (kolmice)*, jestliže je jejich úhel v prostoru pravý.

Úhel dvou různoběžných rovin ϱ a σ je roven úhlu přímek $p \in \varrho$ a $q \in \sigma$, které jsou kolmé k průsečnici daných rovin a procházejí libovolným bodem průsečnice. Roviny nazýváme *kolmé*, jestliže je jejich úhel pravý.

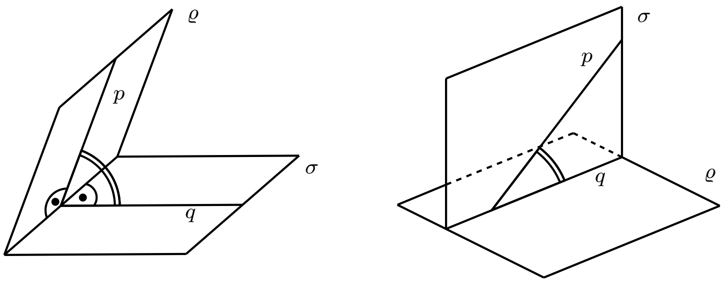
Úhel přímky p s rovinou ϱ je úhel, který svírá daná přímka p a přímka q, v níž rovina σ proložená přímkou q kolmo k rovině ϱ protíná danou rovinu ϱ. Jako obvykle řekneme, že přímka je *kolmá k rovině (kolmice k rovině)*, jestliže úhel, který svírají je pravý. *Patou kolmice* nazýváme průsečík kolmice s rovinou.

Věta 1.13. *Bodem v prostoru prochází právě jedna kolmice k dané rovině a obráceně bodem prostoru prochází právě jedna rovina kolmá k přímce. Přímkou, která je kolmá k dané rovině, prochází nekonečně mnoho rovin kolmých k této rovině, přímkou, která není kolmá, prochází právě jedna rovina kolmá k dané rovině.*

Zřejmě platí, že je-li přímka kolmá k dané rovině, je kolmá ke všem přímkám této roviny. V rozhodování o kolmosti útvarů v prostoru jsou důležitá tzv. *kritéria kolmosti.*



Obrázek 1.12: Vzájemná poloha tří rovin



Obrázek 1.13: Úhel dvou rovin a úhel přímky a roviny

Věta 1.14. *Přímka je kolmá k rovině, právě když je kolmá ke dvěma různoběžkám ležících v dané rovině.*

Věta 1.15. *Dvě roviny jsou k sobě kolmé, právě když jedna z nich obsahuje přímkou kolmou k druhé.*

Vzdálenost bodu od přímky a *vzdálenost dvou rovnoběžných přímek* definujeme stejně jako v planimetrii. Prostorové řešení úlohy určení vzdálenosti bodu A od přímky p se většinou provádí tak, že bodem A proložíme rovinu ϱ kolmou k přímce p a určíme průsečík P přímky p a roviny ϱ. Hledaná vzdálenost je tak délka úsečky AP.

Vzdálenost bodu od roviny je vzdálenost bodu od paty kolmice spuštěné z daného bodu na danou rovinu.

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé.

Kapitola 2

Kuželosečky

V této se seznámíme se základními poznatky o elipse, hyperbole a parabole, které se spolu s kružnicí souhrnně nazývají kuželosečky. Název je odvozen od toho faktu, že všechny tyto křivky můžeme sestrojit jako průsečné křivky vhodné roviny a rotační kuželové plochy.

Jako první uvedeme elipsu, které se též budeme věnovat nejvíce, jelikož obrazem kružnice v obecné poloze při rovnoběžném promítání je právě elipsa.

2.0.1 Elipsa

Definice 2.1. *Elipsa* je množina všech bodů roviny, které mají od dvou daných různých pevných bodů stejný součet vzdáleností větší než vzdálenost daných bodů.

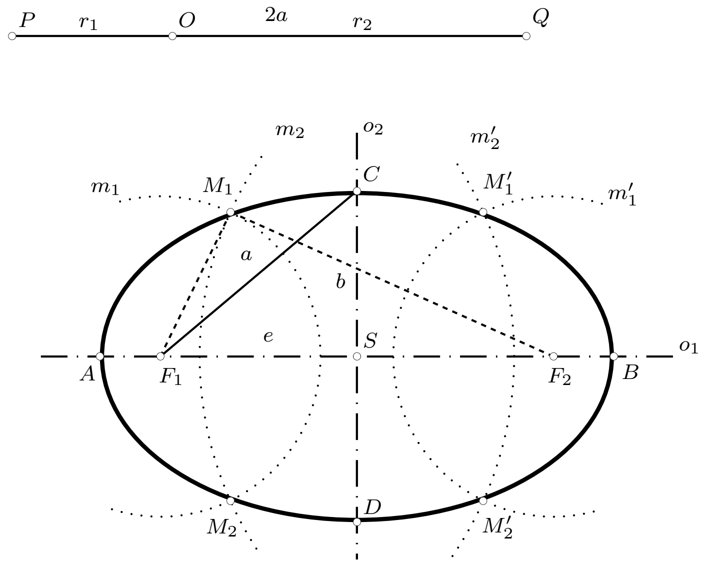
Oba pevné body z předchozí definice se nazývají *ohniska* a obvykle se značí F_1, F_2. Úsečky F_1M a F_2M se nazývají *průvodiče* bodu M. Označme součet průvodičů $2a$. Naneseme-li od středu S úsečky F_1F_2 na polopřímky SF_1 a SF_2 vzdálenost a, dostaneme body A a B, které leží na elipse[1]. Tyto body jsou body největšího zakřivení elipsy a nazývají se *hlavní vrcholy.* Průsečíky kružnic $k_1(F_1, a)$ a $k_2(F_2, a)$ jsou zřejmě další dva body C, D na elipse, v těchto bodech má elipsa nejmenší zakřivení a nazývají se *vedlejší vrcholy.* Vzdálenost $|SC|$, resp. $|SD|$, se obvykle označuje b.

Konstrukce 2.2. Sestrojte body na elipse, jsou li dána její ohniska a součet průvodičů jejích bodů.

Řešení. Označme ohniska F_1, F_2 a nechť stálý součet průvodičů se rovná velikosti úsečky MN. Zvolíme-li na úsečce PQ bod O, pak z definice elipsy plyne, že každý společný bod M kružnice m_1 opsané kolem F_1 s poloměrem $r_1 = |PO|$ a kružnice m_2 opsané kolem F_2 s poloměrem $r_2 = |OQ|$ je bodem elipsy. □

Z předchozí konstrukce plyne, že elipsa je souměrná podle dvou os. Jednou osou je přímka AB, která se nazývá *hlavní osa* elipsy, a druhou je přímka CD, která se nazývá *vedlejší osa* elipsy. Osy jsou vzájemně kolmé a jejich průsečíkem je bod S, podle kterého je tak elipsy středově souměrná. Bod S se nazývá *střed* elipsy.

[1]Platí totiž $|F_1A| + |F_2A| = |F_1A| + |F_1B| = |AB| = 2a$, tedy bod A leží na elipse, podobně pro bod B.



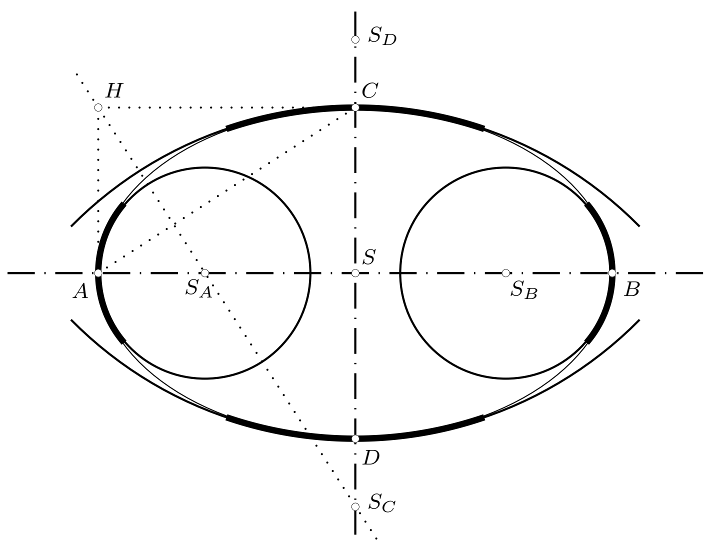
Obrázek 2.1: Elipsa

Vzdálenost $|SA| = |SB| = a$ se nazývá *délka hlavní poloosy*, vzdálenost $|SC| = |SD| = b$ se nazývá *délka vedlejší poloosy*. Vzdálenost ohnisek od středu se obvykle značí e a nazývá se excentricita. V elipse platí, díky Pythagorově větě v pravoúhlém trojúhelníku FSC, mezi těmito třemi vzdálenostmi vztah

$$a^2 = b^2 + e^2.$$

V okolí vrcholů můžeme elipsu nahradit kružnicovými oblouky, které jsou částí tzv. *hyperoskulačních kružnic*.

Konstrukce 2.3. Sestrojte hyperoskulační kružnice elipsy určené vrcholy.



Obrázek 2.2: Hyperoskulační kružnice elipsy

Řešení. Máme-li vrcholy elipsy, máme i její osy a střed. Doplňme trojúhelník ASC na obdélník $ASCH$. Pak kolmice vedená vrcholem H k přímce AC protne osy elipsy právě ve středech S_A a S_C hyperoskulačních kružnic ve vrcholech A a C. Středy S_B a S_D jsou souměrně sdružené k bodům S_A a S_C podle středu elipsy. □

Elipsy dělí rovinu na *vnitřní* a *vnější oblast*. Vnitřní oblast je ta, která obsahuje ohniska elipsy.

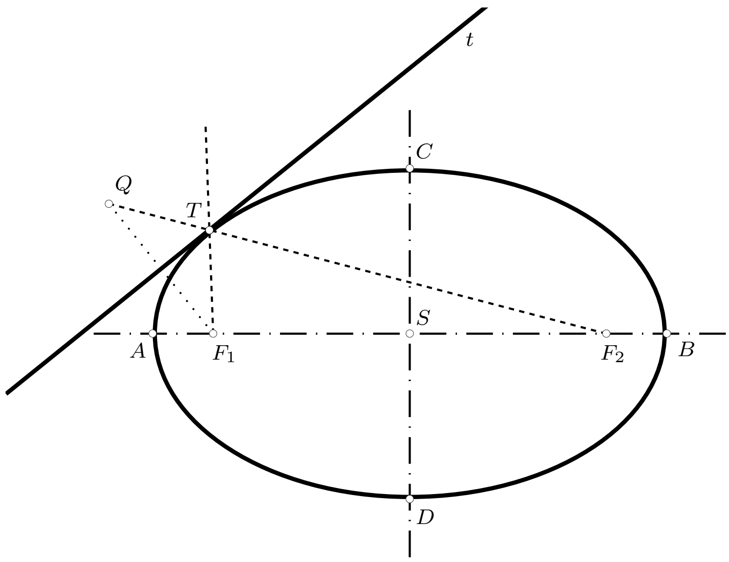
Úhel tvořený polopřímkami MF_1, MF_2, který obsahuje střed elipsy, a příslušný vrcholový úhel se nazývají *vnitřní úhly průvodičů*. Úhly vedlejší k vnitřním úhlům jsou *vnější úhly průvodičů*.

Přímka může mít s elipsou společné dva různé body, je její *sečnou*, nebo má společný jeden bod a je její *tečnou*, společný bod tečny a elipsy se nazývá *dotykový bod*. Nemá-li tečna žádný společný bod, nazývá se *vnější přímka* elipsy.

Jednoduchý návod, jak sestrojit tečnu elipsy v jejím obecném bodě, podává následující věta.

Věta 2.4. *Tečna elipsy půlí vnější úhly průvodičů dotykového bodu.*

Navíc ještě platí, že průsečíkem tečny t a přímky F_2Q, kde Q je bod symetrický s bodem F_1 podle tečny t, je bod dotyku T tečny t.



Obrázek 2.3: Tečna elipsy v jejím bodě

Další důležité a konstrukčně využitelné vlastnosti popisují dvě následující věty.

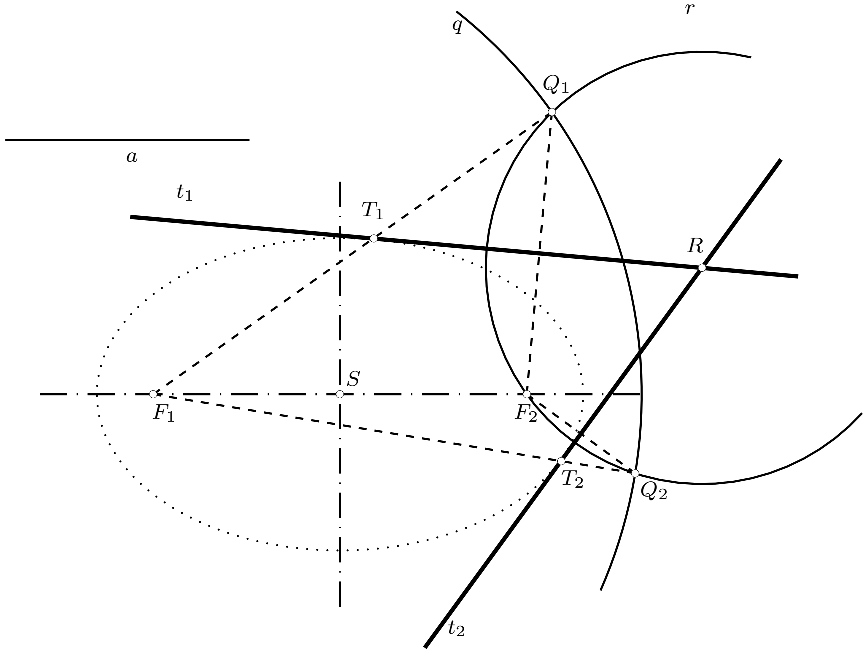
Věta 2.5. *Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je kružnice se středem v druhém ohnisku a poloměrem $2a$.*

Poznámka 2.6. Jelikož má elipsa dvě ohniska, existují dvě kružnice $q_1(F_1, 2a)$ a $q_2(F_2, 2a)$ z předchozí věty, tyto kružnice se nazývají *řídící kružnice elipsy*.

Věta 2.7. *Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice se středem ve středu elipsy a poloměrem a.*

Poznámka 2.8. Kružnice z předchozí věty tedy zřejmě prochází hlavní vrcholy elipsy a nazývá se *vrcholová kružnice elipsy.*

Konstrukce 2.9. K elipse určené ohnisky F_1, F_2 a délkou hlavní poloosy a sestrojte tečny, které procházejí vnějším bodem elipsy R.



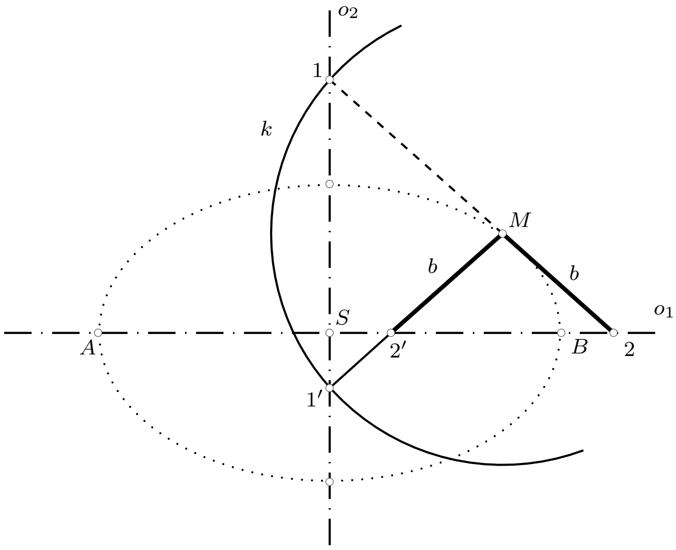
Obrázek 2.4: Tečny k elipse

Řešení. Zřejmě budou existovat dvě tečny t_1, t_2 elipsy. Body Q_1, Q_2 souměrně sdružené k ohnisku F_2 podle tečen t_1, t_2 leží na řídící kružnici $q(F_1, 2a)$. Navíc tyto body leží i na kružnici $r(R, |RF_2|)$ a můžeme tak body Q_1 a Q_2 sestrojit. Tečna t_1 je pak osou úsečky F_2Q_1 a tečna t_2 je osa úsečky F_2Q_2. Navíc můžeme určit i bod dotyku T_1 tečny t_1 jako průsečík přímky t_1 s úsečkou F_1Q_1, podobně bod dotyku T_2 tečny t_2 je průsečík přímky t_2 s úsečkou F_1Q_2. □

Při zobrazování kružnice bude hrát důležitou roli i následující konstrukce, tzv. *proužková konstrukce* elipsy.

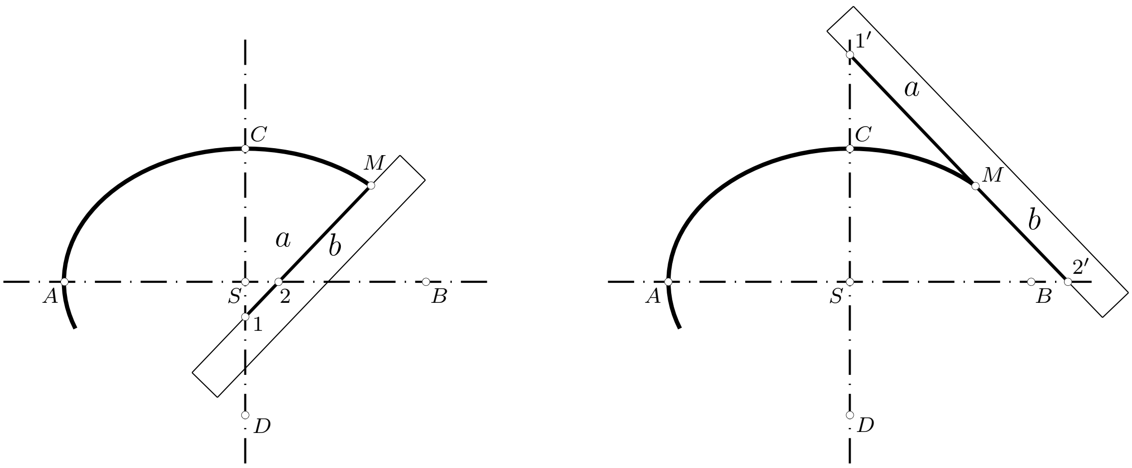
Konstrukce 2.10. Určete délku vedlejší poloosy elipsy, jsou-li dány její hlavní vrcholy A, B a bod M na elipse.

Řešení. Přímka AB je hlavní osou o_1 elipsy, vedlejší osa o_2 je tedy osa úsečky AB. Kružnice $k(M, \frac{1}{2}|AB|)$ protne osu o_2 v bodech 1, 1′. Přímka určená body M a 1, resp. M a 1′, protne hlavní osu o_1 v bodech 2, resp. 2′. Délka úsečky $M2$, resp. $M2'$, je délka vedlejší poloosy. □



Obrázek 2.5: Proužková konstrukce elipsy

Poznámka 2.11. Název předchozí konstrukce je odvozen od toho, že vezmeme-li proužek papíru a na něj vyznačíme body 1, 2, M, resp. $1'$, $2'$, M, tak, že $|1M| = a$, $|2M| = b$ a $|12| = a - b$, resp. $|1'M| = a$, $|2'M| = b$ a $|1'2'| = a + b$, pak pohybujeme-li tímto proužkem tak, že bod 1, resp. $1'$, zůstává na vedlejší ose elipsy a bod 2, resp. $2'$, zůstává na hlavní ose elipsy, pak bod M opisuje elipsu s délkami poloos a a b.



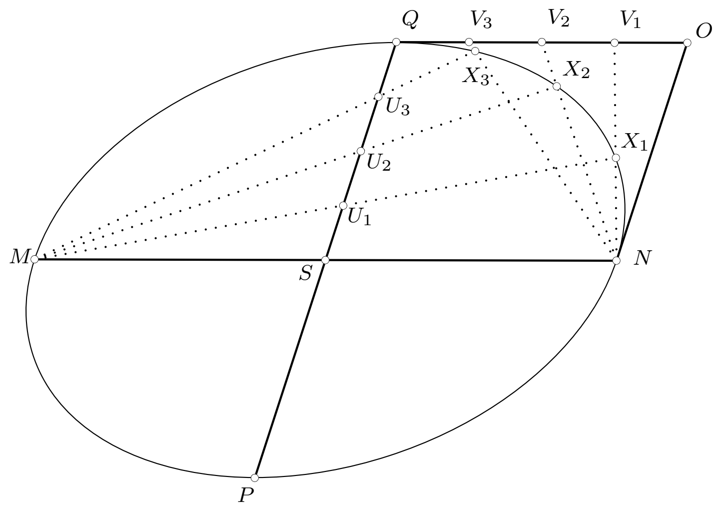
Obrázek 2.6: Proužková konstrukce elipsy

Každá úsečka, jejíž krajní body jsou na elipse, se nazývá *tětiva elipsy*, každá tětiva elipsy, která prochází středem elipsy, je její *průměr*. Dva průměry takové, že tečny v koncovém bodě jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem se nazývají *sdružené průměry.*

V následující konstrukci, tzv. *příčkové konstrukci* elipsy, si ukážeme další rychlou metodu, jak získávat body na elipse, která je dána dvojicí sdružených průměrů.

Konstrukce 2.12. Nalezněte další body elipsy dané sdruženými průměry MN a PQ.

Řešení. Průsečík S úseček MN a PQ je středem elipsy. Utvořme rovnoběžník $SNOQ$. Rozdělme úsečku SQ body $U_1, U_2, \ldots$ na stejné dílky, podobně se rozdělí body $V_1, V_2, \ldots$ úsečka OQ na stejný počet shodných dílků. Průsečíkem přímek MU_1 a NV_1 je bod X_1, který je bodem na elipse, podobně získáme i další body. Celou konstrukci můžeme zopakovat i ve zbylých částech elipsy. □



Obrázek 2.7: Příčková konstrukce elipsy

Poznámka 2.13. Osy elipsy jsou také zároveň sdružené průměry a předchozí konstrukce se tak dá použít i pro elipsu danou osami.

2.0.2 Hyperbola

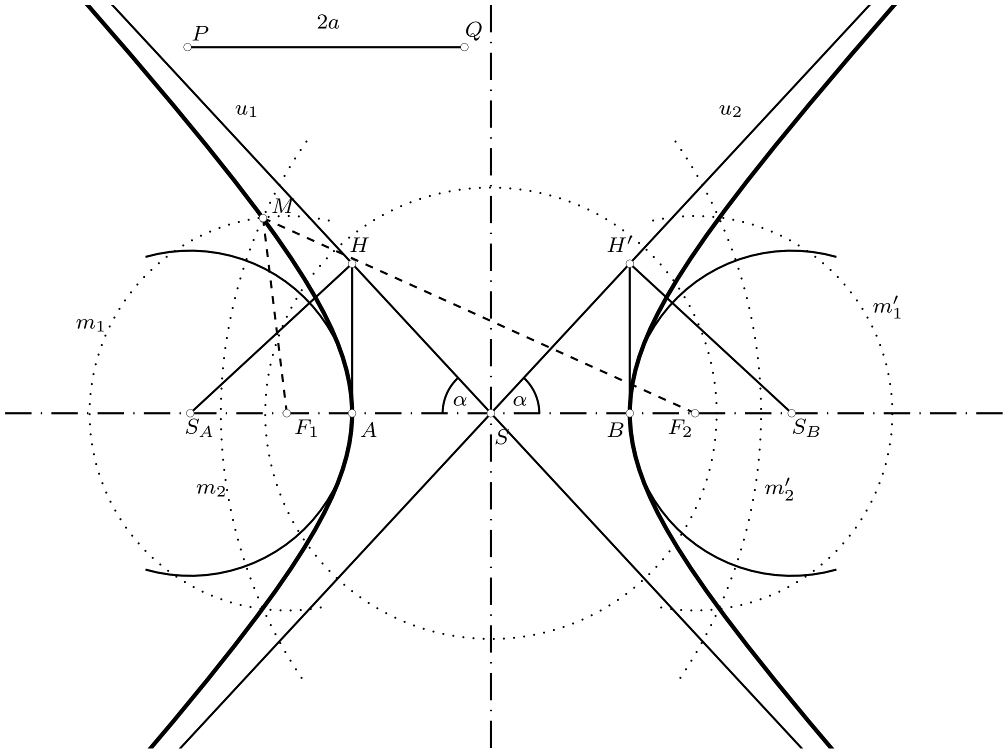
Definice 2.14. *Hyperbola* je množina všech bodů roviny, které mají od dvou daných pevných bodů stejný rozdíl vzdáleností menší než vzdálenost daných bodů.

Podobně jako u elipsy se oba pevné body nazývají *ohniska* a budeme je obvykle značit F_1, F_2. Úsečky F_1M a F_2M se nazývají *průvodiče* a jejich rozdíl značíme $2a$. *Vrcholy* A, B hyperboly dostaneme tak, že od středu S úsečky F_1F_2 naneseme na polopřímky SF_1, SF_2 vzdálenost a.[2]

Z definice hyperboly plyne konstrukce jejích bodů.

Konstrukce 2.15. Sestrojte body na hyperbole, jsou-li dána její ohniska F_1, F_2 a rozdíl průvodičů jejích bodů $2a$.

Řešení. Sestrojme vrcholy hyperboly A, B (leží na přímce F_1F_2 ve vzdálenosti a od středu S úsečky F_1F_2). Zvolme na přímce F_1F_2 pomocný bod O vně úsečky F_1F_2. Průsečíky kružnic $m_1(F_1, |AO|)$ a $m_2(F_2, |BO|)$ jsou body hyperboly. □



Obrázek 2.8: Hyperbola

Z předchozí konstrukce plyne, že hyperbola je symetrická podle dvou os, přímka AB je hlavní osa o_1 hyperboly, přímka o_2 kolmá k přímce o_1 a procházející bodem S je vedlejší osa hyperboly, bod S se nazývá střed hyperboly a hyperbola je podle něj středově souměrná.

Vzdálenost $|SA| = |SB| = a$ se nazývá délka hlavní poloosy. Vzdálenost ohnisek od středu se nazývá *výstřednost* hyperboly a značí se e. Vedlejší osa nemá žádné společné body s hyperbolou, ale přesto se uvádí délka vedlejší poloosy b, pro kterou platí

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Charakteristický trojúhelník hyperboly je pravoúhlý trojúhelník SAH, jehož odvěsny mají délku a, b a přepona má délku e.

Podle definice hyperboly platí pro její každý bod M vztah

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a.$$

To znamená, že je buď $|F_1M| - |F_2M| = 2a$ v případě, že je $|F_1M| > |F_2M|$, nebo $|F_2M| - |F_1M| = 2a$ v případě, že je $|F_2M| > |F_1M|$. Hyperbola se tedy skládá ze dvou disjunktních částí, které se nazývají *větve* hyperboly.

Větve hyperboly se neomezeně blíží ke dvěma přímkám u_1, u_2, které pocházejí středem hyperboly a od její hlavní osy mají odchylku α, pro niž platí $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Tyto přímky se nazývají *asymptoty* hyperboly, zároveň si můžeme všimnout, že jsou to přímky, na kterých leží přepona charakteristického trojúhelníku.

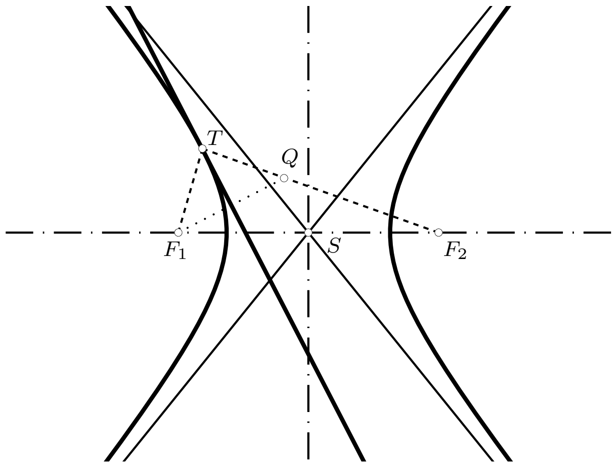
[2]Např. pro bod A platí $||F_2A| - |F_1A|| = ||F_2A| - |F_2B|| = |AB| = 2a$.

V okolí vrcholů nahrazujeme hyperbolu, které jsou součástí tzv. *hyperoskulačních kružnic*. Střed S_A hyperoskulační kružnice ve vrcholu A získáme jako průsečík hlavní osy o_1 a kolmice k asymptotě u_1 bodem H. Bod S_B je pak symetrický podle bodu S.

Hyperbola dělí rovinu na tři části. Dvě části, které obsahují ohniska hyperboly tvoří její *vnitřní oblast*, třetí část, která obsahuje střed je její *vnější oblast*. Je-li bod M bodem hyperboly, pak úhel F_1MF_2 a k němu příslušný vrcholový úhel se nazývají *vnější úhly průvodičů*. Vedlejší úhly vnějších úhlů se nazývají *vnitřní úhly průvodičů*.

Přímka může mít s hyperbolou společné dva různé body, jeden bod, nebo žádný bod. Má-li přímka společné dva různé body, nebo jeden bod a zároveň obsahuje vnitřní i vnější bod hyperboly (tj. je rovnoběžná s asymptotou), nazýváme ji *sečnou* hyperboly. Má-li přímka jeden společný bod s hyperbolou a všechny její ostatní body jsou vnější body hyperboly, nazýváme ji *tečnou*. V případě, že nemá přímka s hyperbolou žádné společné body, jedná se o *vnější přímku* hyperboly. Pro tečnu hyperboly platí následující věta.

Věta 2.16. *Tečna hyperboly půlí vnější úhly průvodičů dotykového bodu.*



Obrázek 2.9: Tečna hyperboly

Podobně jako u elipsy se dají zformulovat věty o *řídící kružnici* a *vrcholové kružnici* hyperboly.

Věta 2.17. *Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly podle jejích tečen je kružnice se středem v druhém ohnisku a poloměrem $2a$.*

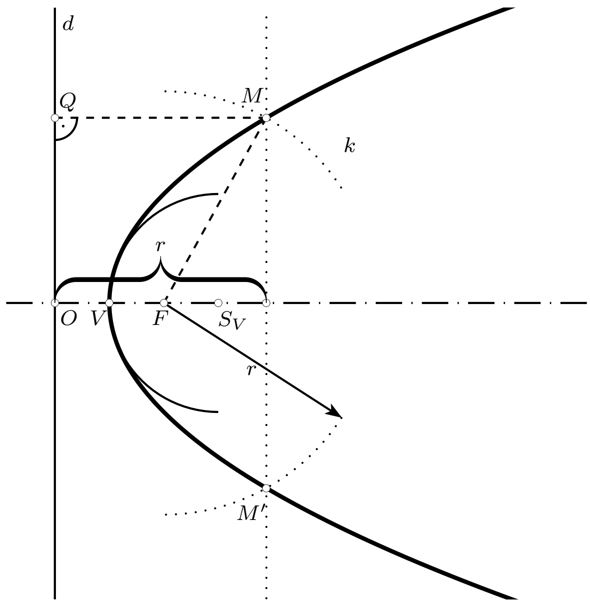
Věta 2.18. *Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny je kružnice se středem ve středu hyperboly a poloměrem a.*

2.0.3 Parabola

Definice 2.19. *Parabola* je množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F a dané přímky d, přičemž $F \notin d$.

Bod F se nazývá *ohnisko* paraboly, přímka d *řídící přímka* paraboly. Vzdálenost ohniska od řídící přímky se nazývá *parametr* paraboly a obvykle se značí p. *Průvodiče* bodu

M paraboly jsou úsečky MF, MQ, kde Q je pata kolmice vedené bodem M na přímku d. Střed V úsečky FO, kde O je pata kolmice z bodu F na přímku D je zřejmě bodem paraboly a nazývá se *vrchol*.



Obrázek 2.10: Parabola

Konstrukce 2.20. Sestrojte body na parabole, je-li dáno její ohnisko F a řídící přímka d, $v(F, d) = p$.

Řešení. Využijeme definice paraboly. Sestrojíme-li kružnici $k(F, r)$ dostaneme množinu bodů, která má od bodu F vzdálenost r. Na rovnoběžce m s řídící přímkou d v polorovině určené bodem F a ve vzdálenosti r, leží body, které mají danou vzdálenost r od řídící přímky. Podle definice tedy body společné kružnici k a přímce m jsou body paraboly. Poznamenejme, že aby kružnice a přímka měly společný alespoň jeden bod, musí platit $r \geq \frac{p}{2}$. □

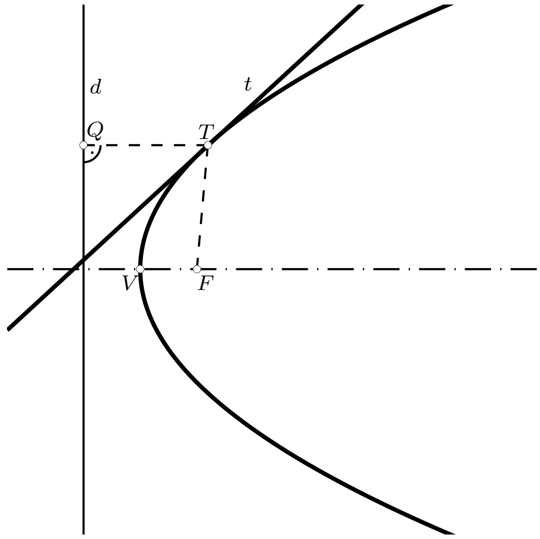
Z předchozí konstrukce plyne, že parabola je symetrická podle přímky o, která je kolmá k přímce d a prochází bodem F, tato přímka se nazývá *osa paraboly*.

V okolí vrcholu můžeme parabolu nahradit částí *hyperoskulační kružnice*. Poloměr oskulační kružnice je roven parametru p paraboly.

Parabola dělí rovinu na dvě části. Část obsahující ohnisko se nazývá *vnitřní oblast*, druhá část se nazývá *vnější oblast*. Je-li M bod paraboly a úsečky MF, MQ jeho průvodiče, pak úhel FMQ a příslušný vrcholový úhel se nazývají *vnější úhly průvodičů* bodu M. Vedlejší úhly k těmto úhlům se nazývají *vnitřní úhly průvodičů* bodu M.

Přímka je *sečnou* paraboly, obsahuje-li jak vnitřní, tak vnější body. Sečna protíná parabolu buď ve dvou bodech, nebo je rovnoběžná s osou paraboly a protíná ji v jednom bodě. *Tečna* paraboly je přímka, která má s parabolou společný jeden bod a všechny ostatní body jsou vnější body paraboly, společný bod T tečny a paraboly se nazývá *dotykový bod*. Přímka, která se nemá s parabolou žádný společný bod, se nazývá *vnější přímka* paraboly. Pro tečny paraboly platí následující věta.

Věta 2.21. *Tečna paraboly půlí vnější úhly průvodičů dotykového bodu.*



Obrázek 2.11: Tečna paraboly

Podobný význam jako řídící a vrcholová kružnice u elipsy, resp. hyperboly, mají u paraboly řídící přímka a tečna ve vrcholu paraboly.

Věta 2.22. *Množina všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle jejích tečen je řídící přímka paraboly.*

Věta 2.23. *Množina všech pat kolmic vedených z ohniska paraboly k jejím tečnám je tečna ve vrcholu paraboly.*

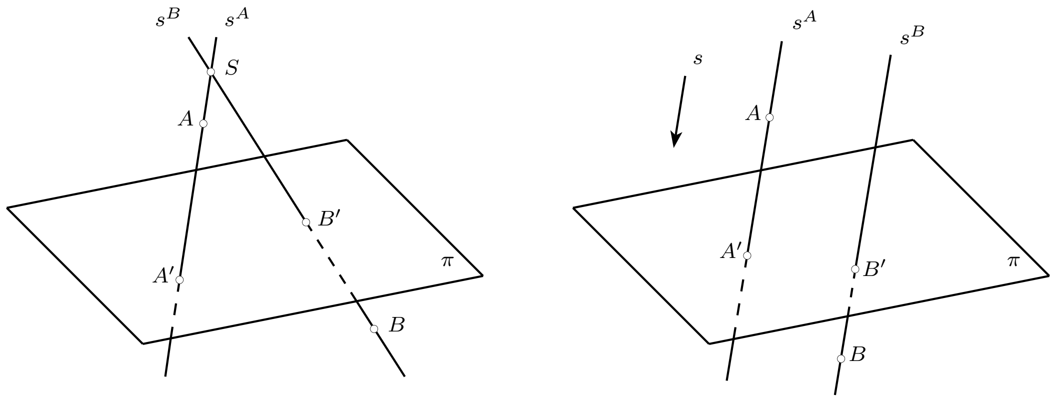
Kapitola 3

Promítání a jeho základní vlastnosti

3.1 Princip promítání

Promítání je zobrazení prostoru na nějakou plochu, nejčastěji na rovinu. Připomeňme, že *zobrazením* rozumíme předpis, který každému prvku nějaké množiny přiřazuje právě jeden prvek jiné množiny. Promítání je abstrakcí procesu vidění a je tedy možné pomocí něj dosáhnout značné názornosti. Princip promítání na rovinu je následující.

V prostoru zvolíme rovinu π, tzv. *průmětnu*, a bod S, $S \notin \pi$, tzv. *střed promítání*. K libovolnému bodu A v prostoru, $A \neq S$, sestrojíme jeho *středový* průmět A' jako průsečík přímky SA, tzv. *promítací přímky* s^A bodu A, s rovinou π. Promítání, které je určeno průmětnou a středem promítání, se nazývá *středové promítání*.



(a) Středové promítání (b) Rovnoběžné promítání

Obrázek 3.1: Princip promítání

„Posuneme-li bod S do nekonečna“, tj. místo středu promítání S budeme mít přímku s ($s \nparallel \pi$), tzv. *směr promítání*, budou všechny promítací přímky vzájemně rovnoběžné. Průsečík promítací přímky s^A bodu A s průmětnou π bude *rovnoběžný* průmět bodu A. Promítání, které je určeno průmětnou a směrem promítání, se nazývá *rovnoběžné promítání*. Je-li navíc směr promítání kolmý, nazývá se promítání *pravoúhlé*, není-li směr promítání kolmý, nazývá se promítání *kosoúhlé*.

Průmětem geometrického útvaru rozumíme množinu průmětů všech jeho bodů. Geometrickému útvaru složenému z promítacích přímek bodů nějakého útvaru říkáme promítací útvar. Tak například při rovnoběžném promítání je promítacím útvarem přímky, která není rovnoběžná se směrem promítání, rovina, tzv. *promítací rovina přímky.*

Průměty bodů zobrazujeme na nákresně, tou je například rovina tabule nebo rovina výkresu. Průmět bodu zobrazený na nákresně se nazývá *obraz bodu.* Pokud promítáme na jednu průmětnu, ztotožníme obvykle nákresnu s průmětnou, a pak nerozlišujeme průměty a obrazy bodů. V případě, že promítáme na různé průmětny, ztotožníme nákresnu s jednou z průměten. Protože všechny průměty zobrazíme na jedinou nákresnu, je nutné průmět a obraz rozlišit.

Nejdůležitější vlastnost všech promítání udává následující věta.

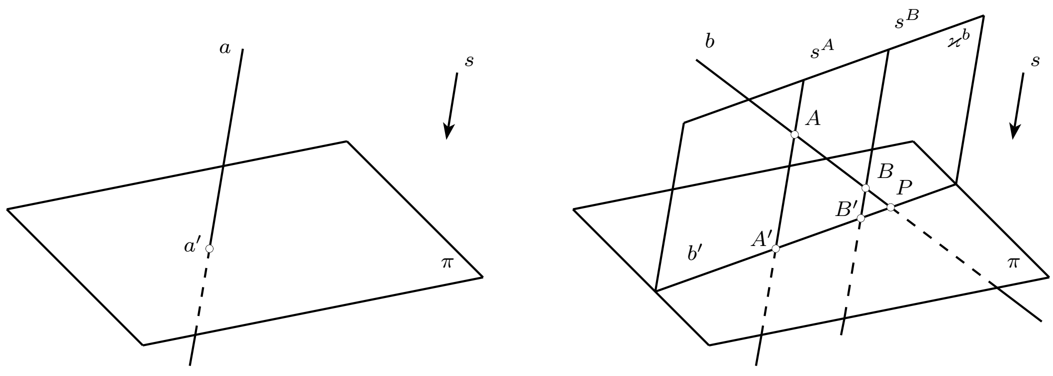
Věta 3.1. *Promítání zachovává incidenci.*

Tj. obecně platí, že je-li bod bodem geometrického útvaru, leží průmět bodu na průmětu geometrického útvaru.

3.2 Vlastnosti rovnoběžného promítání

Zřejmě každým bodem A v prostoru prochází jediná přímka rovnoběžná se směrem promítání. Protože tato přímka není rovnoběžná s průmětnou protíná ji v jednom bodě A'. Pokud leží bod v průmětně, je totožný se svým průmětem.

Při promítání přímky mohou nastat dva případy. Je-li přímka rovnoběžná se směrem promítání, pak všechny promítací přímky jejích bodů splynou s touto přímkou a průmětem takovéto přímky je její průsečík s průmětnou. Není-li přímka rovnoběžná se směrem promítání, pak promítací přímky všech jejích bodů vytvoří rovinu, která je různoběžná s průmětnou, a průmětem takovéto přímky je průsečnice této roviny s průmětnou.



(a) $a \parallel s$ (b) $a \nparallel s$

Obrázek 3.2: Promítání přímky

Při promítání roviny opět rozlišíme dva případy. Je-li rovina rovnoběžná se směrem promítání, splynou promítací roviny všech jejích přímek s touto rovinou a průmětem roviny bude její průsečnice s průmětnou. Průmětem ostatních rovin je celá průmětna.

Můžeme tedy přehledně shrnout:

Věta 3.2. *Rovnoběžným průmětem bodu je bod.*

Věta 3.3. *Rovnoběžným průmětem přímky rovnoběžné se směrem promítání je bod, rovnoběžným průmětem přímky, která nemá směr promítání, je přímka.*

Věta 3.4. *Rovnoběžným průmětem roviny, která je rovnoběžná se směrem promítání, je přímka. Rovnoběžným průmětem roviny, která nemá směr promítání, je celá průmětna.*

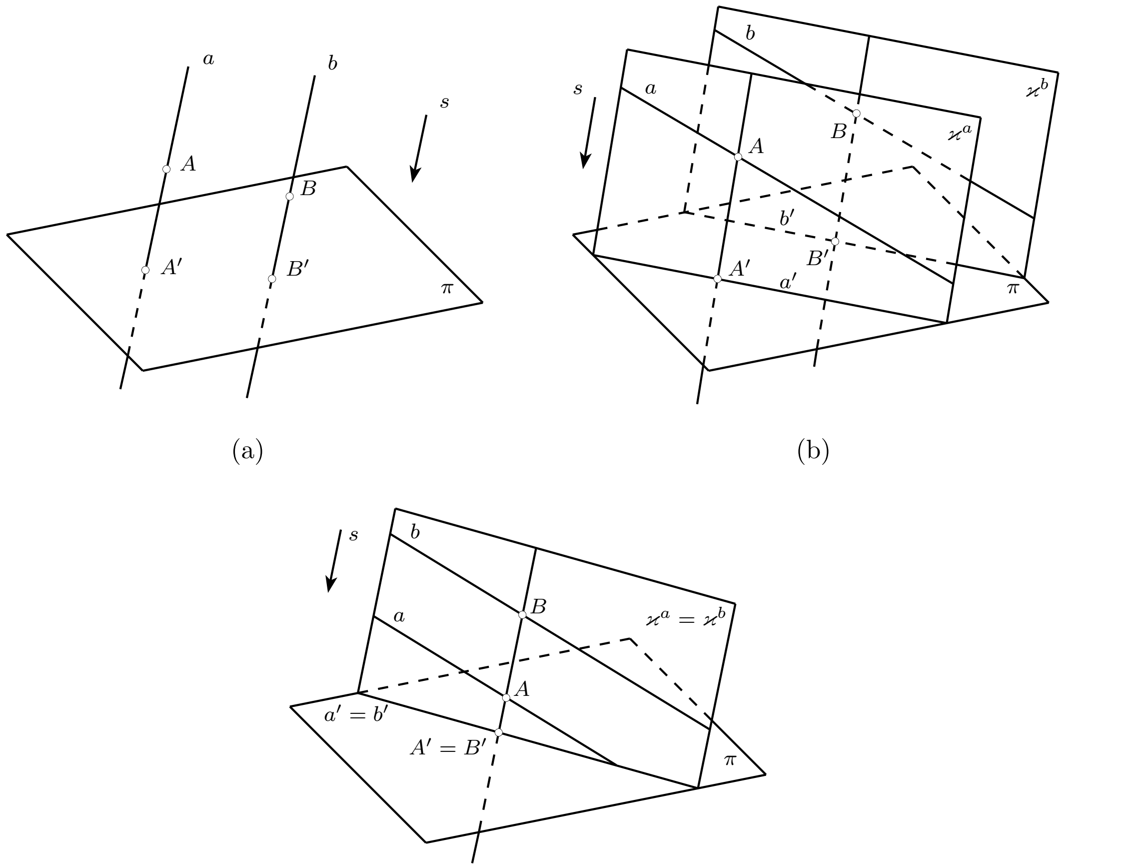
Dvě nejdůležitější vlastnosti rovnoběžného promítání jsou následující:

Věta 3.5.

1. *Rovnoběžné promítání zachovává rovnoběžnost.*
2. *Rovnoběžné promítání zachovává poměr délek úseček, které leží na téže přímce, resp. na rovnoběžných přímkách.*

Poznámka 3.6. Můžeme tedy jednoduše říct, že rovnoběžné promítání zachovává rovnoběžnost a dělící poměr.

Podíváme-li se speciálně na dvě rovnoběžné přímky, mohou nastat celkem tři situace. Mají-li přímky směr promítání, je jejich průmětem dvojice bodů. Nemají-li směr promítání, tak jejich průměty buď splynou (obě leží v jedné promítací rovině) nebo jsou to dvě různoběžné přímky.



(a) (b) (c)

Obrázek 3.3: Průmět rovnoběžek

Důležitým důsledkem druhé vlastnosti je tvrzení o středu úsečky: *Rovnoběžným průmětem středu úsečky je střed jejího průmětu.*

Při rovnoběžném promítání hrají zvláštní roli roviny, které jsou rovnoběžné s průmětnou, tzv. *hlavní roviny.* Pro průměty útvarů, ležících v hlavních rovinách platí věta:

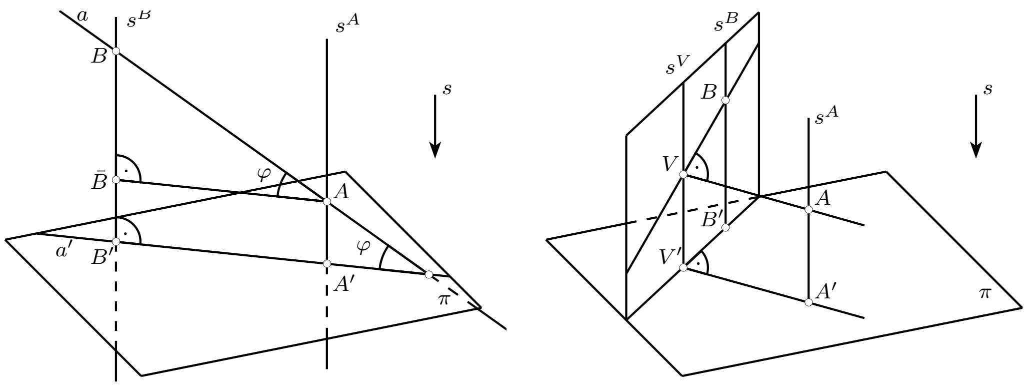
Věta 3.7. *Rovnoběžným průmětem útvaru, který leží v hlavní rovině, je útvar s ním shodný.*

3.2.1 Vlastnosti pravoúhlého promítání

Bude-li navíc platit, že je směr promítání kolmý k průmětně, budeme mít některé další vlastnosti.

Zřejmě bude průmětem úsečky, která je kolmá k průmětně, bod a průmětem úsečky, která je s průmětnou rovnoběžná, úsečka stejné délky. V ostatních případech můžeme přímo určit délku průmětu pomocí goniometrie. Z pravoúhlého trojúhelníku ABP plyne $\cos\varphi = \frac{|AP|}{|AB|}$ a tedy $|A'B'| = |AP| = |AB|\cos\varphi$, jelikož je $\varphi \in (0°,\ 90°)$, tak $0 < \cos\varphi < 1$ a odtud $|A'B'| < |AB|$. Dostáváme tak následující větu.

Věta 3.8. *Délka pravoúhlého průmětu úsečky, která není kolmá k průmětně, je menší nebo rovna délce této úsečky.*



(a) (b)

Obrázek 3.4: Vlastnosti pravoúhlého promítání

Poslední věta popisuje, kdy se dvě kolmé přímky promítnou jako opravdu kolmé.

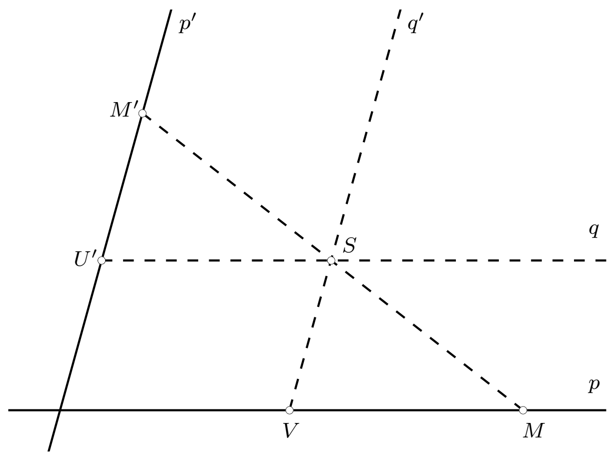
Věta 3.9. *Jestliže jedno rameno pravého úhlu je rovnoběžné s průmětnou a druhé rameno není k průmětně kolmé, je pravoúhlým průmětem tohoto úhlu pravý úhel.*

3.3 Vlastnosti středového promítání

Středové promítání je technicky složitější, zvlášť protože nemá pěkné vlastnosti jako promítání rovnoběžné, tj. nezachovává se jím rovnoběžnost ani dělící poměr. Na druhou stranu je správně zvolené středové promítání dobrým nahrazením vidění lidského oka a má tedy své uplatnění.

3.3.1 Vlastní a nevlastní útvary

Abychom mohli, podobně jako v případě rovnoběžného promítání, jednoduše popsat, jak funguje středové promítání, musíme si zavést tzv. *nevlastní útvary*. Intuitivně to můžeme provést například takto. Představme si, pro jednoduchost, že promítáme v rovině z bodu S body přímky p na přímku p', viz obrázek 3.5. Pak každý bod $M \neq V$ přímky p má za průmět bod M' přímky p'. Výjimku činí bod V, který nemá průmět, protože leží na přímce $q' \parallel p'$. Obráceně, každý bod $M' \neq U'$ je průmětem bodu M přímky p. Bod U' není průmětem žádného bodu přímky p, protože leží na přímce $q \parallel p$. Všechny takovéto výjimky by odpadly, kdybychom prohlásili, že bod V se promítá do nějakého „bodu“ přímky p' a podobně, že U' je průmětem nějakého „bodu“ přímky p.



Obrázek 3.5: Nalezení nevlastního bodu

Otázkou tedy je, jak takový „bod“ najít. Všimněme si, že jak se bod M vzdaluje od bodu V, tak se jeho průmět M' na přímce p' přibližuje k bodu U'. To nás vede k názorně představě, že přímka p má jediný „bod v nekonečnu“, tzv. úběžný bod, který značíme U_∞. Přímka $q \parallel p$ promítá úběžný bod U_∞ z S do bodu U' a podobně bod V se promítá přímkou $q' \parallel p'$ do úběžného bodu V'_∞ přímky p'.

Z předchozích úvah plyne, že takto pojatý nevlastní bod je společný všem rovnoběžným přímkám. Všechny dosavadní body, přímky a roviny jsou tedy tzv. *vlastní útvary* (a nebude-li řečeno jinak, budeme bodem vždy rozumět vlastní bod, přímkou vlastní přímku a rovinou vlastní rovinou). Pro zavedení nevlastních útvarů budeme mít následující definici.

Definice 3.10. *Nevlastní bod* je množina všech spolu rovnoběžných přímek, tj. směr.
Nevlastní přímka je množina všech spolu rovnoběžných rovin.
Nevlastní rovina je množina všech nevlastních bodů a nevlastních přímek.

3.3.2 Průměty jednotlivých prvků

Jak jsme již dříve uvedli, středové promítání je určeno středem promítání S a průmětnou. Při promítání je důležitá i tzv. *středová rovina* φ, která prochází středem promítání a je rovnoběžná s průmětnou. Pro středové průměty základních prvků platí následující.

Středový průmět bodu (vlastního i nevlastního), který neleží ve středové rovině, je vlastní bod. Středový průmět bodu, který leží ve středové rovině (a je různý od S), je nevlastní bod.

Středový průmět přímky (vlastní nebo nevlastní), která není promítací a neleží (leží) ve středové rovině, je vlastní (nevlastní) přímka. Středový průmět promítací přímky, která neleží (leží) ve středové rovině, je vlastní (nevlastní) bod.

Středový průmět promítací roviny různé od středové roviny je vlastní přímka, středový průmět středové roviny je nevlastní přímka. Středový průmět každé jiné roviny je průmětna.

3.4 Afinita a kolineace

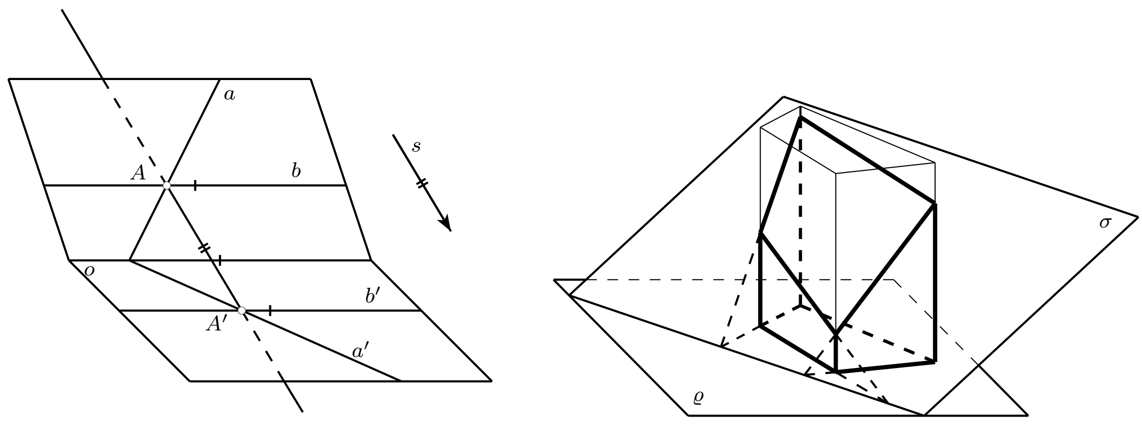
V konstruktivní geometrii kromě již známých zobrazení (různých shodností a podobností) využijeme i dvě nová zobrazení, jedná se o *osovou afinitu* (stručně afinitu) a *středovou kolineaci* (stručně kolineaci).

Definice 3.11. Mějme dvě různoběžné roviny ϱ a σ a přímku s, která není rovnoběžná ani s jednou z nich. Označme o průsečnici rovin ϱ a σ.

Afinita se *směrem afinity s* a *osou afinity o* je zobrazení, které přiřazuje

1. každému bodu A roviny ϱ bod A' roviny σ tak, že přímka AA' je rovnoběžná s přímkou s,

2. každé přímce $a \nparallel o$ roviny ϱ přímku a' roviny σ tak, že přímky a, a' se protínají na přímce o, každé přímce $b \parallel o$ roviny ϱ přímku $b' \parallel o$ roviny σ.



(a) (b)

Obrázek 3.6: Afinita v prostoru

O bodech A, A' a přímkách a, a', resp. b, b', říkáme, že jsou *afinně sdružené.* Na ose afinity leží body, které jsou sdruženy samy se sebou.

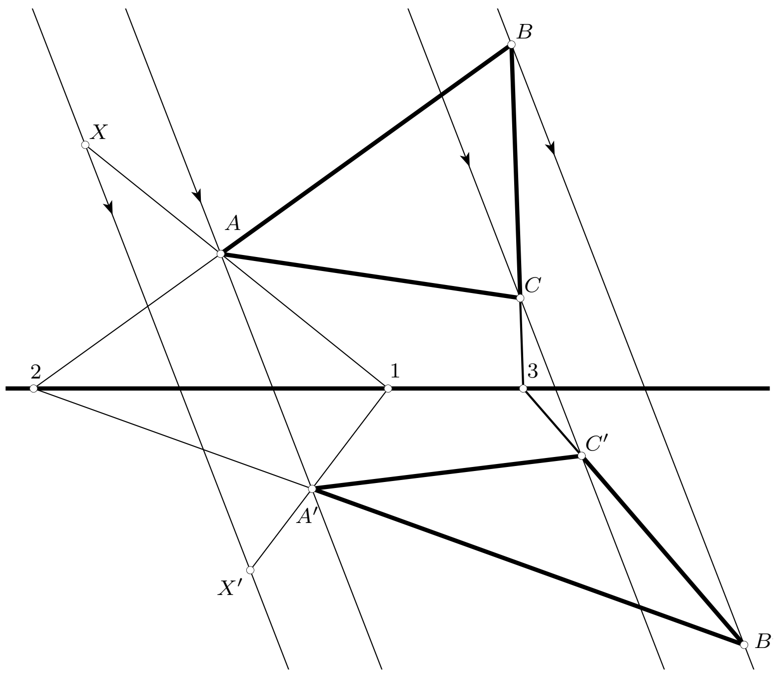
Afinním obrazem mnohoúhelníku v rovině ϱ je mnohoúhelník v rovině σ, přičemž oba tyto mnohoúhelníky leží na téže hranolové ploše, jejíž hrany mají směr afinity s. Této vlastnosti můžeme využít při konstrukci rovinného řezu hranolu. Řez hranolu rovinou

σ je sdružen s podstavou hranolu ležící v rovině ϱ, přičemž směr afinity je směr hran hranolové plochy a osa afinity je průsečnice rovin ϱ a σ.

Rovnoběžným promítnutím afinity mezi rovinami ϱ a σ do roviny π ve směru, který není rovnoběžný se směrem afinity s ani žádnou z rovin ϱ a σ, získáme *afinitu v rovině* π. Její osou je průmět přímky o a jejím směrem je průmět přímky s.

Afinita je zobrazení, které zachovává incidenci, rovnoběžnost a dělící poměr.

Příklad 3.12. Afinita v rovině je určena osou o a dvojicí sdružených bodů X, X'. Sestrojte obraz daného trojúhelníku ABC.



Obrázek 3.7: Řešení příkladu 3.12

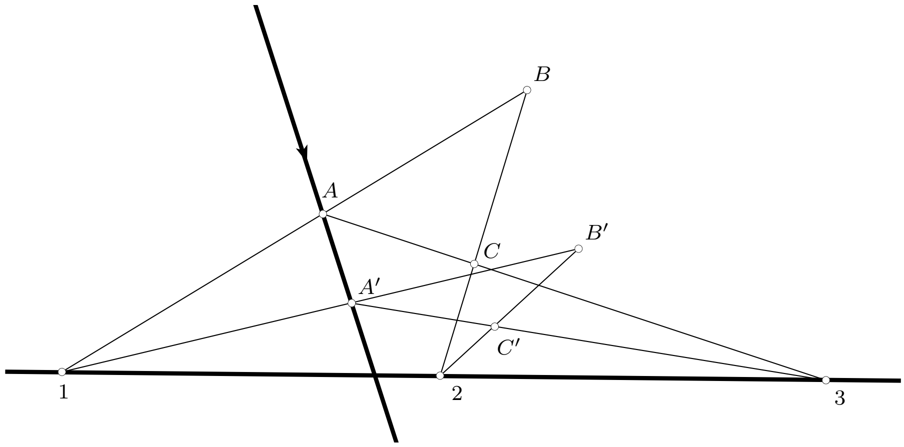
Řešení. Přímka XX' určuje směr afinity (viz obrázek 3.7). Obrazem trojúhelníku ABC bude trojúhelník $A'B'C'$. Bod A' leží na přímce rovnoběžné s přímkou XX' procházející bodem A a na přímce $1X'$, kde bod 1 je průsečíkem přímky AX s osou o. Obdobně získáme obrazy bodů B a C, přičemž pro jejich sestrojení již můžeme použít i dvojici A, A'. □

Příklad 3.13. V afinitě v rovině je dána trojice sdružených bodů A, A', B, B' a C, C'. Určete osu afinity.

Řešení. Přímky AA', BB' a CC' jsou rovnoběžné a určují směr afinity (viz obrázek 3.8). Afinně sdružené přímky se v afinitě protínají na ose afinity, proto je osa afinity určena průsečíky 1, 2, resp. 3, přímek AB a $A'B'$, BC a $B'C'$, resp. AC a $A'C'$. □

Definice 3.14. Mějme dvě různoběžné roviny ϱ a σ a bod S, který neleží v žádné z nich. Označme o průsečnici rovin ϱ a σ.

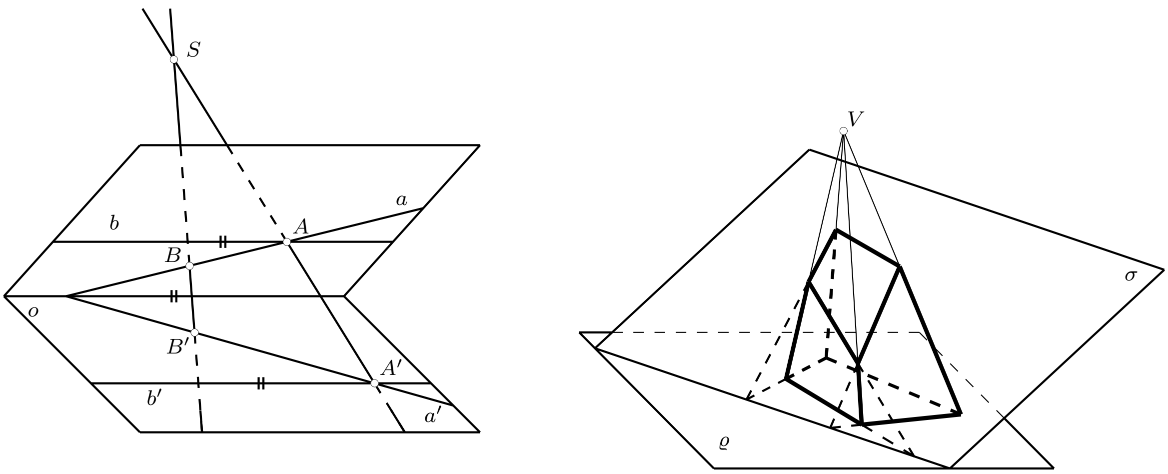
Kolineace se *středem kolineace* S a *osou kolineace* o je zobrazení, které přiřazuje:



Obrázek 3.8: Určení osy a směru afinity

1. každému bodu A roviny ϱ bod A' roviny σ tak, že přímka AA' prochází bodem S,

2. každé přímce $a \nparallel o$ roviny ϱ přímku a' roviny σ tak, že přímky a, a' se protínají na přímce o, každé přímce $b \parallel o$ roviny ϱ přímku $b' \parallel o$ roviny σ.



(a) (b)

Obrázek 3.9: Kolineace v prostoru

Rovnoběžným promítáním ve směru, který není rovnoběžný se žádnou z rovin ϱ a σ, přejde kolineace v prostoru v kolineaci v rovině. Podobně jako byla afinita užitečná při hledání řezu na hranolu, je kolineace užitečná při hledání řezu na jehlanu. Mezi rovinou podstavy jehlanu a rovinou řezu je kolineární vztah, přičemž osou kolineace je průsečnice těchto rovin a středem kolineace je vrchol jehlanu.

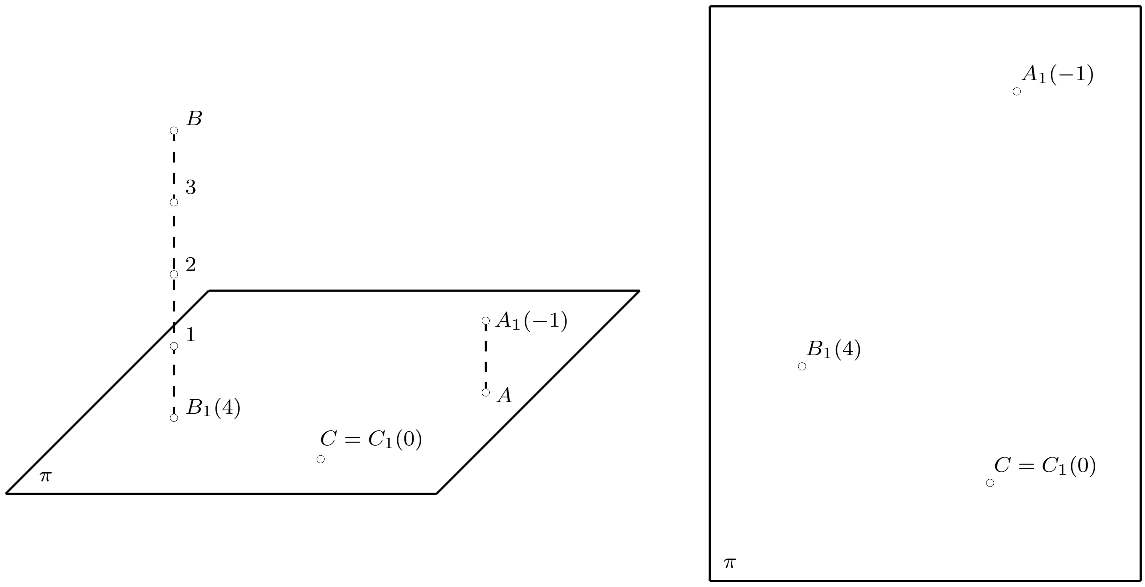
Kapitola 4

Kótované promítání

4.1 Úvodní pojmy

4.1.1 Popis zobrazovací metody, zobrazení bodu

Jako u každé zobrazovací metody, kterou budeme probírat, půjde nám v kótovaném promítání o to, jak zobrazit trojrozměrný prostor do dvourozměrného prostoru (tedy do roviny), a to vzájemně jednoznačným způsobem. Kótované promítání se používá při vrstevnicovém zobrazení terénu na turistických mapách, stavaři ho aplikují při řešení praktických úloh umisťování objektů do terénu nebo při řešení střech nad daným půdorysem. Oproti tomu není kótované promítání příliš názorné pro zobrazování těles.



(a) Situace v prostoru (b) Situace v nákresně

Obrázek 4.1: Zobrazení bodů

V trojrozměrném prostoru si zvolíme vodorovnou průmětnu π. Bodem A prostoru vedeme promítací paprsek, který je kolmý na průmětnu. Průsečík tohoto paprsku s průmětnou π označíme A_1 a mluvíme o něm jako o kolmém průmětu bodu A. Toto zobrazení prostoru do roviny není vzájemně jednoznačné, protože všechny body ležící na jednom promítacím paprsku by měly ten samý průmět. Každému průmětu proto přiřadíme jeho vzdálenost od průmětny, musíme ale ještě rozlišit, zda bod leží nad průmětnou, nebo pod průmětnou. Pokud bod leží nad průmětnou, přiřadíme vzdálenosti kladné znaménko, jestliže bod leží pod průmětnou, přiřadíme vzdálenosti záporné znaménko. Této vzdálenosti opatřené znaménkem říkáme *kóta* a zapisujeme ji do závorky k průmětu bodu. Bod, který leží v průmětně má tedy kótu 0 a platí, že je totožný se svým půdorysem (viz bod C na obrázku 4.1)

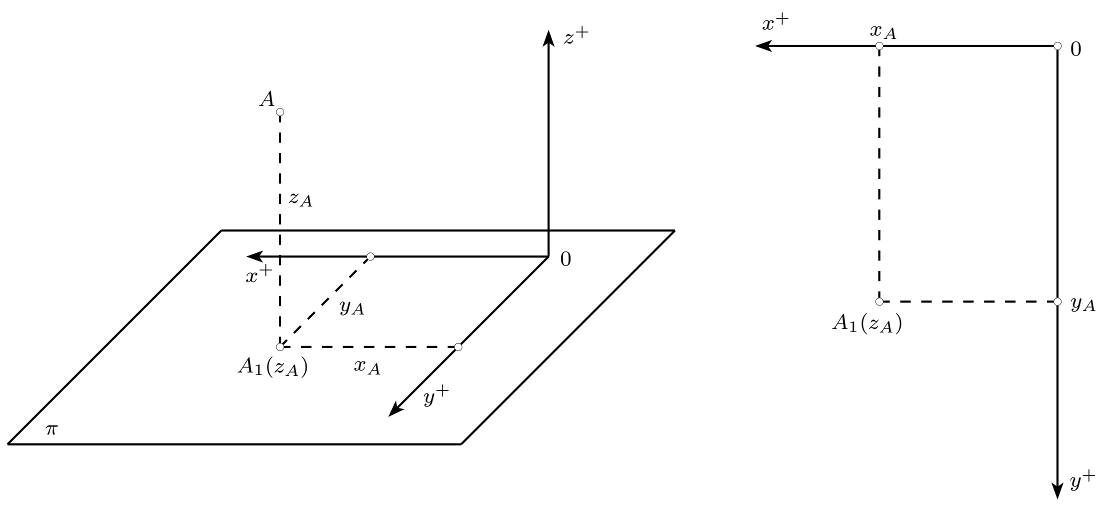
Stručně tedy můžeme říci, že *kótované promítání* je pravoúhlé promítání na jednu průmětnu, při kterém každému průmětu bodu přiřazujeme takzvanou kótu, což je orientovaná vzdálenost bodu od průmětny (jestliže bod leží nad průmětnou, je kóta kladná, v případě že bod leží pod průmětnou, je kóta záporná).

Nákresna je rovina, v níž sestrojujeme obrazy průmětů (například papír na který rýsujeme).

Průmětnu (kterou ztotožňujeme s nákresnou) označujeme π, A_1 je kolmý průmět bodu A do půdorysny, kótu (orientovanou vzdálenost) bodu A zapisujeme za jeho průmět do kulaté závorky.

4.1.2 Kartézská souřadná soustava

Kartézská souřadná soustava je taková soustava souřadnic, u které jsou souřadné osy vzájemně kolmé a protínají se v jednom bodě, takzvaném počátku souřadné soustavy.



(a) Situace v prostoru (b) Situace v nákresně

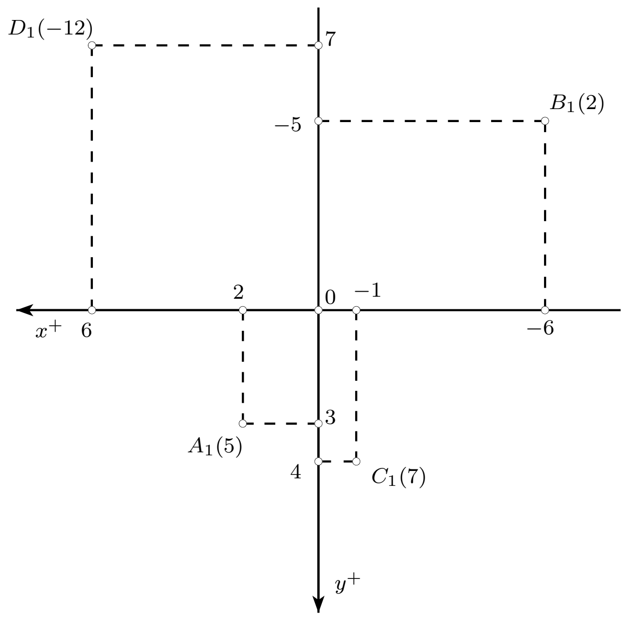
Obrázek 4.2: Zavedení kartézské souřadné soustavy

Jednotka se obvykle volí na všech osách stejně velká. Kartézskou souřadnou soustavu zavádíme pro jednoznačné zadání bodů, přičemž jednotlivé souřadnice bodu v prostoru jsou kolmé průměty tohoto bodu na příslušných osách[1]. V kótovaném promítání ztotožníme průmětnu π s rovinou os x; y, přičemž kladná část osy x jde od počátku směrem doleva, kladná část osy y od počátku směrem dolů. Osa z (kolmá na půdorysnu) bude mít kladnou část směrem nahoru, z-ové souřadnice budou tedy odpovídat kótám.

Obecně rozlišujeme takzvanou pravotočivou a levotočivou souřadnou soustavu (podle orientace os, určujeme pomocí pravidla pravé, respektive levé ruky), my používáme pravotočivou kartézskou soustavu (zkuste si nastavit pravou ruku tak, aby palec reprezentovat osu x, ukazováček osu y a prostředník osu z ve směrech jako na obrázku 4.2a).

Příklad 4.1. V kótovaném promítání zobrazte body $A[2,\ 3,\ 5]$, $B[-6,\ -5,\ 2]$, $C[-1,\ 4,\ 7]$, $D[6,\ -7,\ -12]$ (představte si, kde leží v prostoru, které z nich leží nad průmětnou, které pod průmětnou).

Řešení. Řešení viz obrázek 4.3 □

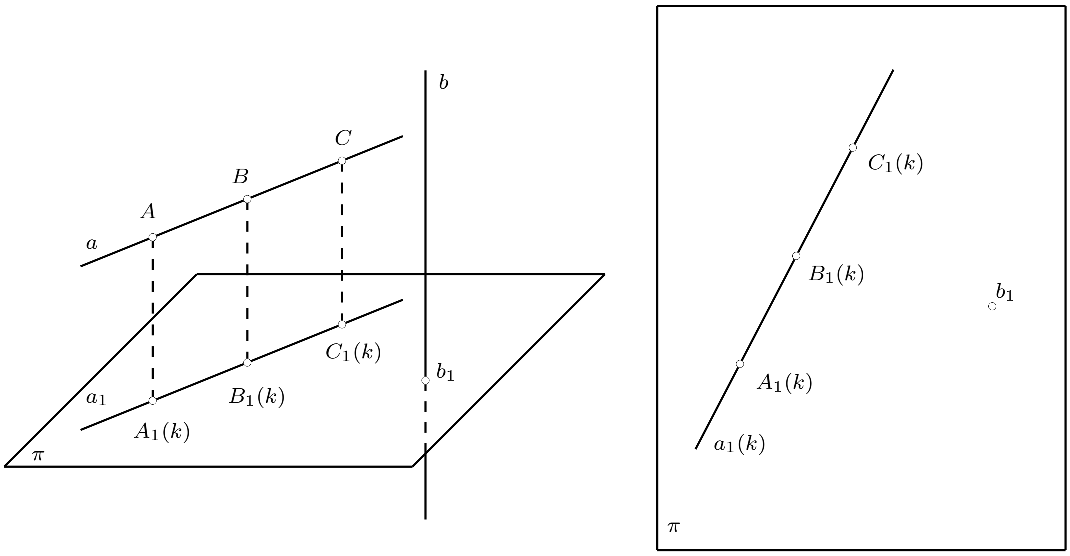


Obrázek 4.3: Zobrazení bodů v kartézské souřadné soustavě

4.1.3 Zobrazení přímky

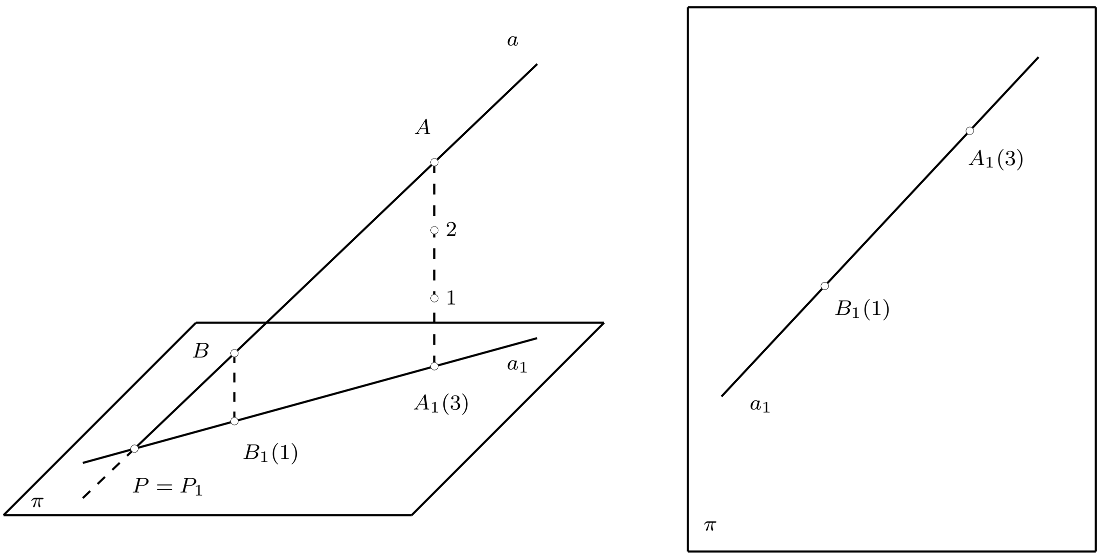
Vzhledem k průmětně můžeme uvažovat dvě speciální polohy přímky, a to přímku kolmou k průmětně a přímku rovnoběžnou s průmětnou. Přímka kolmá k průmětně (na obrázku 4.4 přímka b) se v kótovaném promítání zobrazí jako bod. Přímka rovnoběžná s průmětnou (na obrázku 4.4 přímka a) se zobrazí jako přímka, jejíž body mají všechny stejnou kótu (kótu můžeme psát přímo k označení přímky).

[1]Většina příkladů v kapitole bude zadaná polohou přímek a bodů, souřadnicové zadání a kartézskou souřadnou soustavu budeme používat pro slovní zadání příkladů na procvičení.



(a) Situace v prostoru (b) Situace v nákresně

Obrázek 4.4: Přímka a rovnoběžná s průmětnou, přímka b kolmá k průmětně



(a) Situace v prostoru (b) Situace v nákresně

Obrázek 4.5: Zobrazení přímky

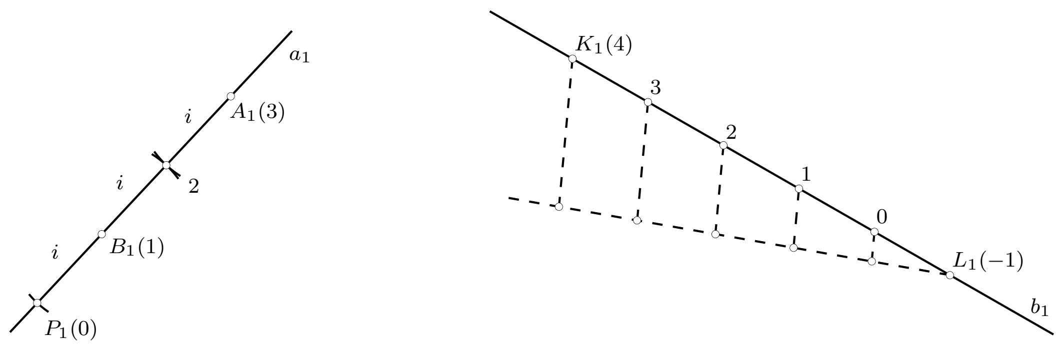
Průmětem obecně položené přímky a ($a \not\perp \pi$) je opět přímka. Průmětem přímky, která je kolmá na průmětnu, je bod. Průsečík přímky s průmětnou nazýváme *stopník* a značíme ho P (přímka rovnoběžná s průmětnou stopník nemá).

Přímku máme většinou zadánu pomocí dvou bodů s celočíselnými kótami jako na obrázku 4.5

Při takovémto zadání přímky (v nákresně) se nabízí otázka, kde leží stopník přímky a. Jeho polohu můžeme zjistit dvěma způsoby, které si teď postupně probereme, jedná se o *stupňování přímky* a *sklápění přímky*.

4.1.4 Stupňování přímky

Stupňování přímky je proces určení polohy dalších průmětů bodů o celočíselných kótách a nalezení *intervalu přímky*, což je vzdálenost dvou sousedních průmětů bodů o celočíselných kótách. Vystupňovat přímku $a = AB$ z obrázku 4.6 je jednoduché, stačí určit střed S úsečky A_1B_1 (viz obrázek 4.6a), který musí mít kótu 2 (rovnoběžné promítání zachovává dělící poměr). Interval přímky je $i = |A_1S_1| = |S_1B_1|$, přímka p je tedy vystupňovaná, nanášením intervalu od daných bodů můžeme získávat další průměty bodů o celočíselných kótách, tedy i půdorysný stopník přímky p, což je bod o kótě 0.



(a) Stupňování přímky z obrázku 4.5 (b) Užití pomocného dělení

Obrázek 4.6: Stupňování přímky

Ve většině případů si ale při stupňování přímky nevystačíme s půlením úseček. Mějme danou přímku $b = KL$, viz obrázek 4.6b a úkol vystupňovat tuto přímku. Bod K má kótu 4, bod L kótu -1, rozdíl těchto kót je $4 - (-1) = 5$, potřebujeme tedy rozdělit úsečku K_1L_1 na 5 stejně velkých úseček. K tomu použijeme konstrukci, která využívá podobnosti trojúhelníků.

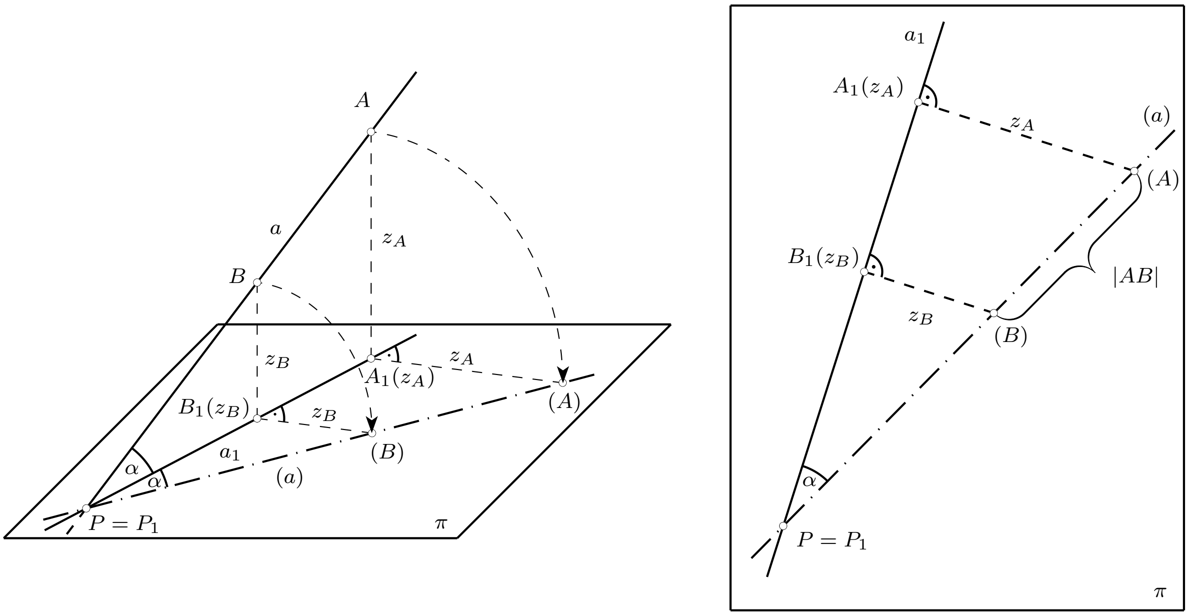
Jedním z daných bodů, například bodem L_1 vedeme libovolnou pomocnou polopřímku a na ni naneseme od bodu L_1 za sebou 5 stejně velkých úseček (jejich délka může být libovolná, ale volíme ji tak, aby se nám konstrukce vešla na rýsovací plochu). Poslední takto získaný bod spojíme úsečkou s bodem K_1 a vedeme rovnoběžky s touto úsečkou dalšími body na pomocné polopřímce. Průsečíky těchto rovnoběžek s úsečkou K_1L_1 jsou body o celočíselných kótách mezi body K a L. Konstrukcí jsme zjistili i bod o kótě 0, tedy stopník přímky a.

4.1.5 Sklápění přímky

Sklápění přímky a je ve skutečnosti otočení promítací roviny přímky a do průmětny, přičemž osa otáčení je průmět a_1 dané přímky (situaci v prostoru vidíme na obrázku 4.7

nalevo). Při tomto pohybu rotují body přímky po kružnicích, jejichž poloměry jsou kóty příslušných bodů. Tyto kružnice leží v rovinách kolmých na osu otáčení, proto musí sklopené obrazy bodů ležet na průsečnicích těchto rovin s průmětnou, tj. na kolmicích na a_1. Vzdálenosti sklopených bodů od a_1 jsou poloměry kružnic, po kterých body rotovaly, tedy z-ové kóty těchto bodů.

Při řešení příkladu v průmětně (na obrázku 4.7 napravo) sestrojíme prvními průměty bodů A a B kolmice k a_1. Od budu A_1 naneseme na kolmici z_A, od bodu B_1 naneseme z_B, získané body označíme (A) a (B) a spojíme je čerchovanou čarou, tato spojnice je sklopeným obrazem přímky a a značíme ji (a). Průsečík a_1 a (a) je stopník přímky a.

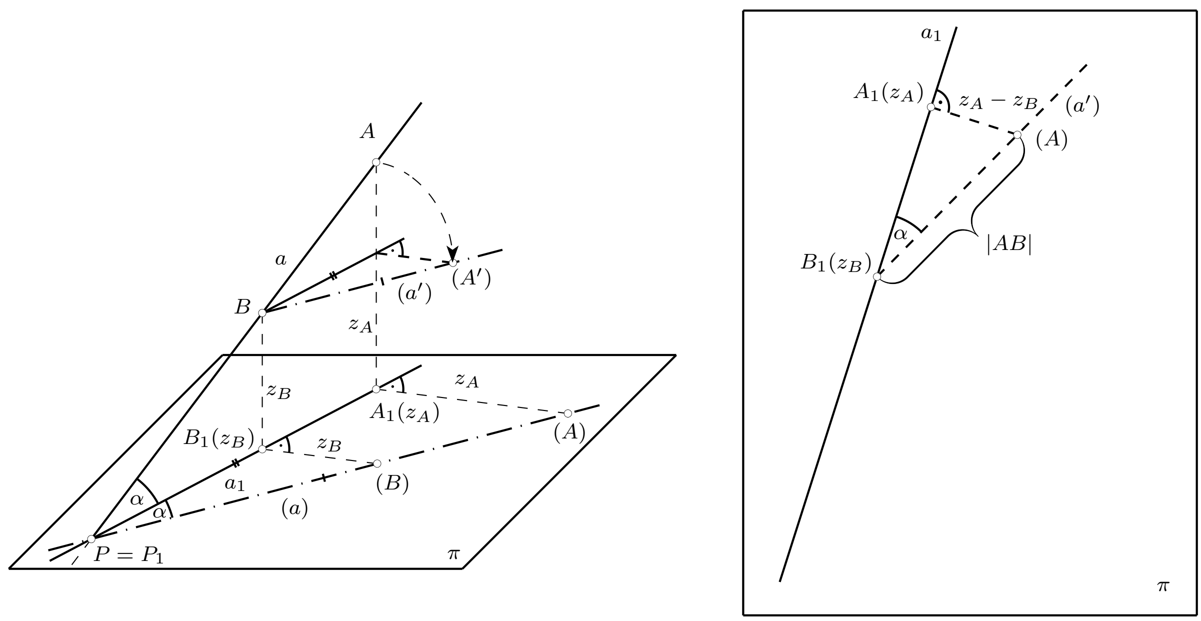


(a) Situace v prostoru (b) Situace v nákresně

Obrázek 4.7: Sklápění přímky otočením promítací roviny do půdorysny

Poznámka 4.2. Na obrázku 4.7 je zobrazený případ, kdy mají body A, B určující přímku a kladnou kótu, v tom případě musí ležet jejich sklopené obrazy ve stejné polorovině určené přímkou a_1 (je jedno ve které). Ve stejné polorovině by ležely také sklopené obrazy bodů, jejich kóty by byly obě záporné. V případě, že by byla kóta jednoho bodu kladná a druhá záporná, došlo by k tomu, že sklopené obrazy budou ležet v opačných polorovinách určených přímkou a_1

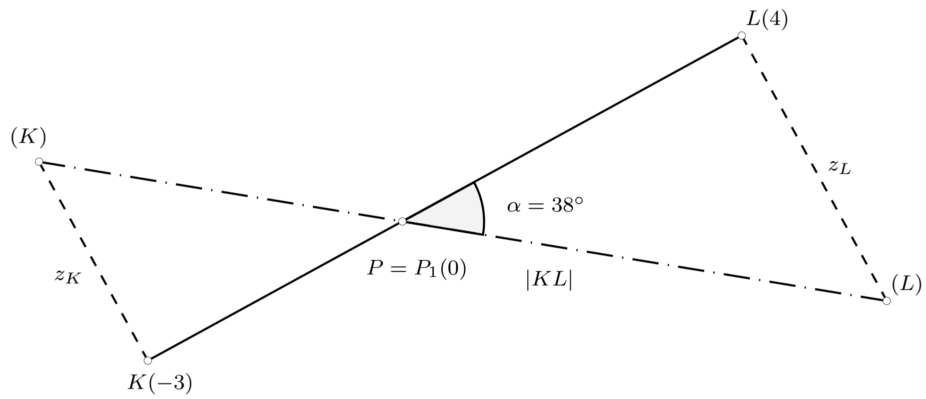
Pokud pomocí sklápění hledáme skutečnou velikost úsečky AB nebo odchylku přímky AB od průmětny, můžeme předchozí konstrukci zjednodušit. Zjednodušení spočívá v tom, že budeme otáčet promítací rovinu přímky a do roviny rovnoběžné s průmětnou. V našem případě rovina do které otáčíme prochází bodem B (viz obrázek 4.8a), ten tedy při otáčení zůstane na místě, osa otáčení je přímka rovnoběžná s a_1 procházející bodem B. Bod A při otáčení rotuje po kružnici o poloměru $z_A - z_B$ (kružnice opět leží v rovině kolmé na osu otáčení). Situace v průmětně je zřejmá z obrázku 4.8b.



(a) Situace v prostoru (b) Situace v nákresně

Obrázek 4.8: Sklápění přímky do roviny rovnoběžné s průmětnou

Příklad 4.3. Je dán kótovaný průmět úsečky KL, určete skutečnou velikost úsečky KL a její odchylku od průmětny (zadání i řešení viz obrázek 4.9).



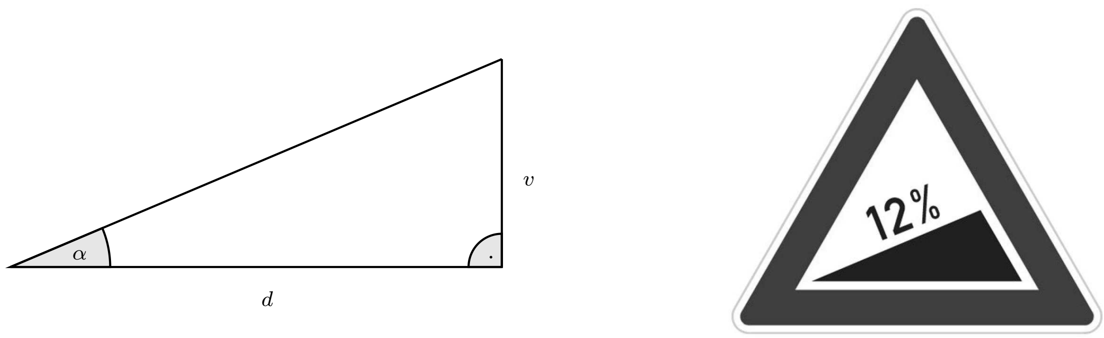
Obrázek 4.9: Řešení příkladu 4.3

Řešení. Skutečnou velikost úsečky KL najdeme pomocí sklopení do průmětny. Sklopený bod (L) bude ležet na kolmici bodem L_1 ve vzdálenosti $z_L = 4$ jednotky (můžeme si vybrat, kterým směrem vzdálenost naneseme). Bod K má zápornou kótu, proto velikost z-ové souřadnice $|z_K| = 3$ naneseme na kolmici od bodu K opačným směrem, než jsme nanášeli kladnou kótu a získaný bod označíme (K). Spojnice bodů (K), (L), kterou rýsujeme čerchovaně, je sklopeným obrazem úsečky KL. Skutečná velikost úsečky KL je rovna vzdálenosti $|(K)(L)|$. Odchylka přímky KL od průmětny je odchylka úseček K_1L_1 a $(K)(L)$. □

4.1.6 Spád přímky

Se spádem se v praxi často setkáváme například u dopravního značení, jde o vyjádření rychlosti stoupání (nebo klesání). *Spád* s je poměr výškových rozdílů ku délkovým rozdílům (na určitém úseku). Jestliže výškové rozdíly označíme v a délkové rozdíly d, máme tedy spád $s = \frac{v}{d}$, viz obrázek 4.10a.

Protože je spád poměr protilehlé odvěsny ku přilehlé odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku, platí také $s = \operatorname{tg} \alpha$. Z toho vztahu můžeme určit úhel α, ale pozor, úhel α a spád není totéž! V praxi bývá spád často vyjádřen v procentech nebo v promilích (pokud je spád velmi malý). Stoupání 12% ze značky na obrázku 4.10 znamená, že na vzdálenost 100 metrů (na mapě) cesta vystoupá o 12 metrů do výšky, tedy spád $s = \frac{12}{100} = 0,12$ (to odpovídá 12%). Spád přímky kolmé k průmětně není definován (protože není definován $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$).



(a) (b)

Obrázek 4.10: Využití spádu v praxi

V kótovaném promítání existuje vztah mezi spádem přímky a intervalem přímky. Z obrázku 4.11 máme

$$s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{i},$$

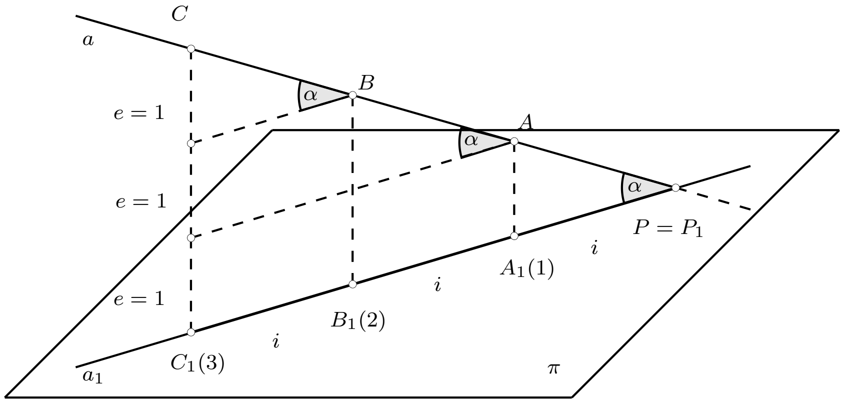
kde e je takzvaná ekvidistance (výškový rozdíl sousedních bodů o značených kótách), α je úhel, který svírá přímka a s průmětnou a i je interval přímky.

V našem případě je ekvidistance rovna 1, takže platí

$$s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{i}$$

a odtud pro interval přímky platí

$$i = \frac{1}{s}.$$



Obrázek 4.11: Spád a interval

4.1.7 Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky v prostoru mohou mohou být rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. Kótované promítání není pro určení vzájemné polohy příliš názorné, polohu přímek v prostoru z jejich prvních průmětů často nedokážeme určit na první pohled.

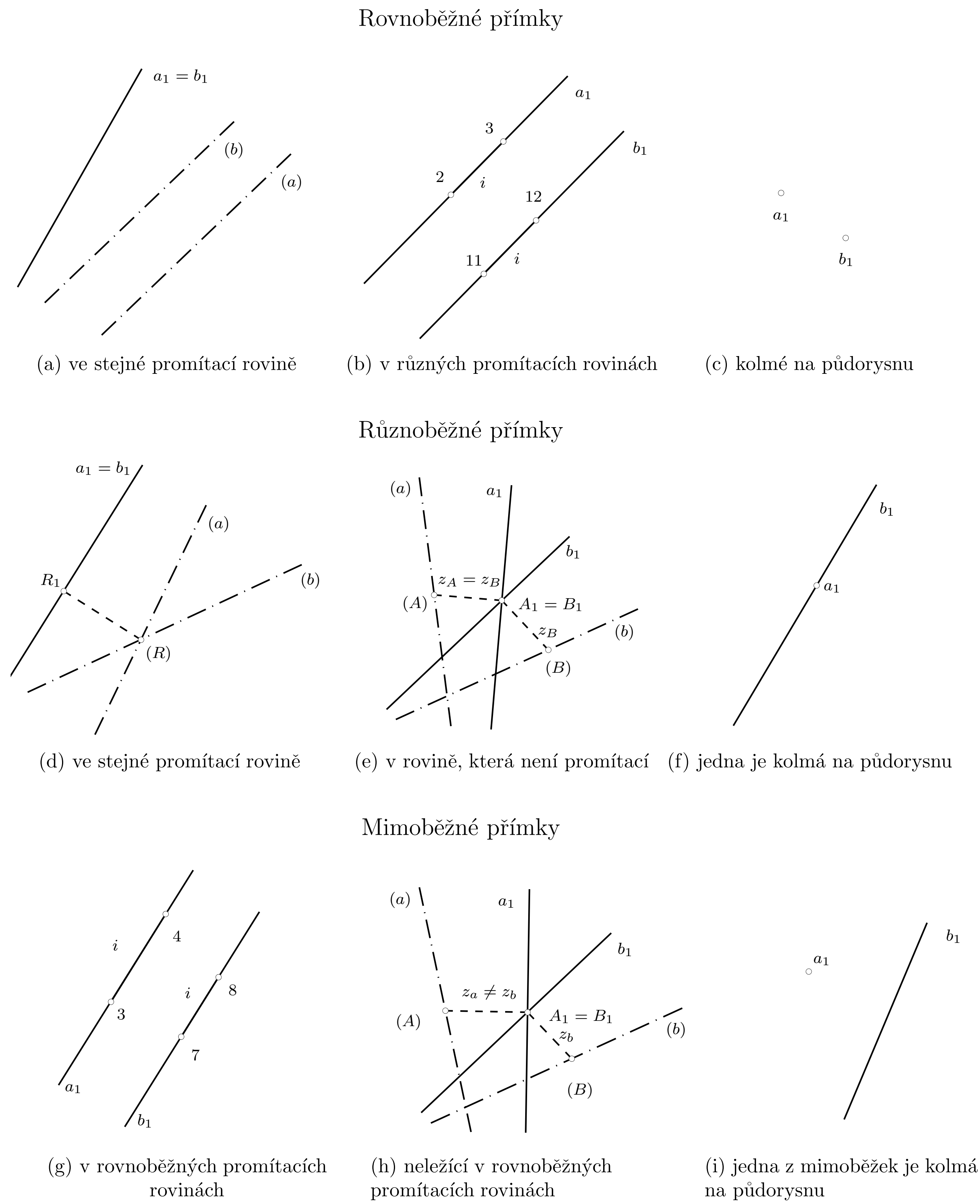
Totožné přímky jsou průmětem dvou rovnoběžek nebo dvou různoběžek ležících ve stejné promítací rovině, skutečnou polohu přímek v prostoru můžeme zjistit pomocí sklopení.

Jako různoběžné přímky se promítají různoběžné přímky (ležící v rovině, která není promítací), nebo dvě mimoběžky jejichž promítací roviny nejsou rovnoběžné. Tyto možnosti rozlišíme opět pomocí sklopení obou přímek, při kterém zjistíme kóty průsečíku respektive zdánlivého průsečíku vzhledem k oběma přímkám. Pokud jsou kóty průsečíku stejné vzhledem k oběma přímkám, jedná se o různoběžky, v případě že kóty jsou různé, jde o zdánlivý průsečík a přímky jsou mimoběžné. Rovnoběžné přímky jsou průmětem rovnoběžných přímek pokud mají stejný interval a směr stoupání, v opačném případě se jedná o mimoběžky jejichž promítací roviny jsou rovnoběžné.

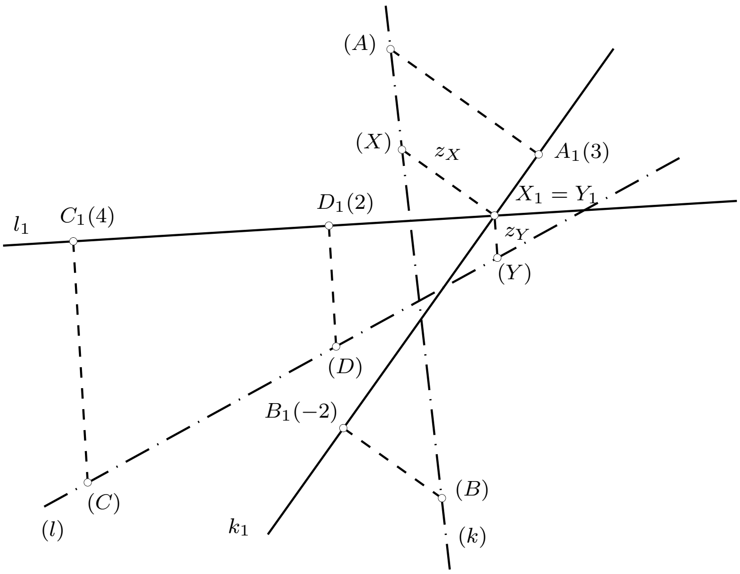
Rovnoběžné přímky se také mohou zobrazit jako dva body a to v případě, že jde o promítací přímky (kolmice na půdorysnu). U různoběžek nastává speciální situace pokud je jedna z různoběžek promítací, jejich průmětem je pak bod a přímka, přičemž průmět bodu leží na průmětu přímky. V případě že je jedna z mimoběžek promítací, dostáváme v prvním průmětu přímku a bod, který na ní neleží.

Příklad 4.4. Určete vzájemnou polohu přímek $k = AB$, $l = CD$ (zadání i řešení viz obrázek 4.13).

Řešení. Průměty přímek $k = AB$, $l = CD$ jsou různoběžné, to znamená, že přímky k a l jsou v prostoru různoběžné nebo mimoběžné. Obě přímky sklopíme, sklopené přímky označíme (k) a (l). Průsečík přímek k_1 a l_1 označíme jako $X_1 = Y_1$ (zatím nevíme, zda jde o skutečný nebo zdánlivý průsečík přímek k a l). Řekněme, že bod X leží v prostoru na přímce k a bod Y leží na přímce l. Sklopený obraz (X) bodu X najdeme jako průsečík



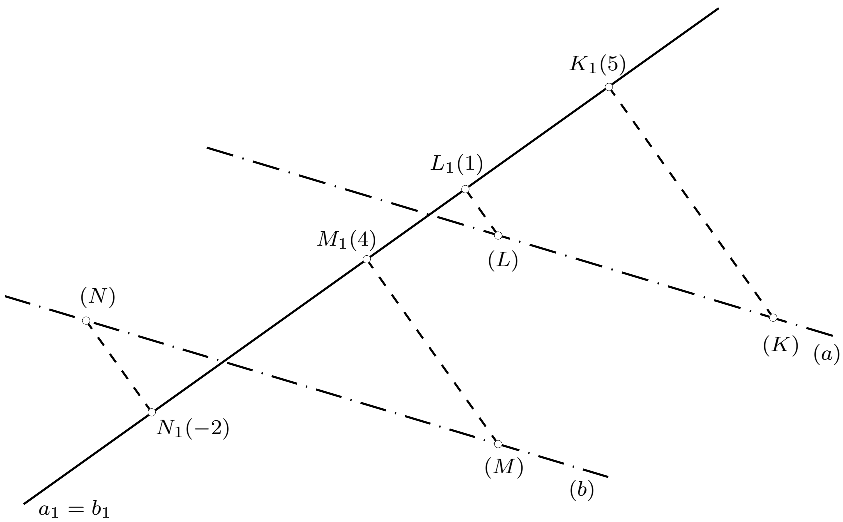
Obrázek 4.12: Vzájemná poloha přímek



Obrázek 4.13: Řešení příkladu 4.4

kolmice na k_1 a přímky (k). Sklopený obraz (Y) bodu Y najdeme jako průsečík kolmice na l_1 a přímky (l). Nyní porovnáme z-ové souřadnice bodů X a Y, z-ová souřadnice bodu X je $z_X = |X_1(X)|$, z-ová souřadnice bodu Y je $z_Y = |Y_1(Y)|$. Z-ové souřadnice bodů X a Y jsou různé, to znamená, že přímky k a l jsou mimoběžné. □

Příklad 4.5. Určete vzájemnou polohu přímek $a = AB$, $c = CD$ (zadání i řešení viz obrázek 4.14).



Obrázek 4.14: Řešení příklad 4.5

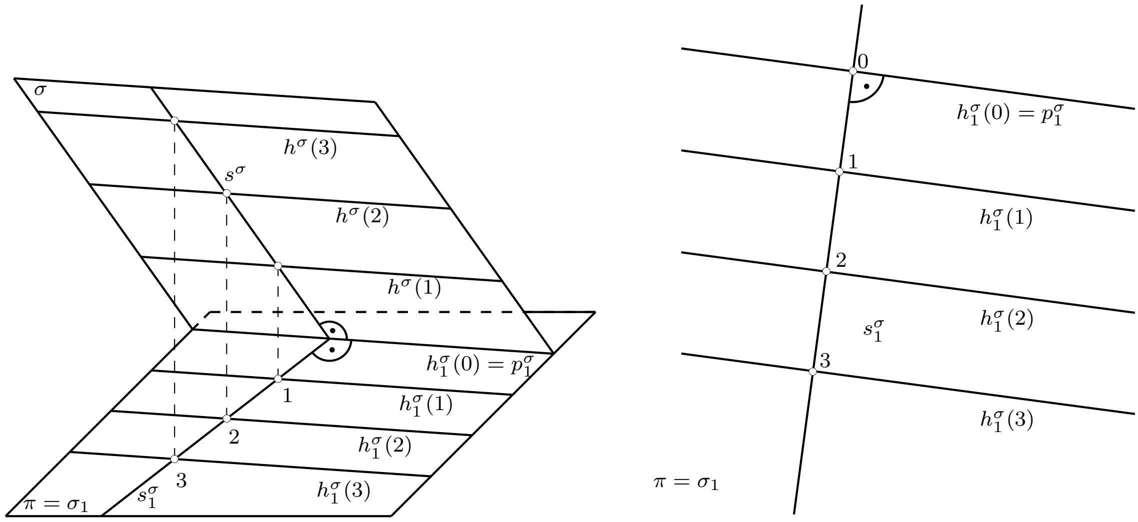
Řešení. Průměty přímek a a c jsou totožné, to znamená, že v prostoru přímky leží ve stejné promítací rovině a jsou rovnoběžné nebo různoběžné. Obě přímky opět sklopíme do průmětny a ve sklopení zjistíme jejich vzájemnou polohu, v tomto případě jsou přímky (a) a (c) rovnoběžné a jsou tedy rovnoběžné i přímky a, b v prostoru. Vzájemnou polohu takto zadaných přímek bychom mohli také zjistit určením intervalů přímek, který musí být v případě rovnoběžných přímek stejný, navíc musí být totožný i směr stoupání přímek. □

4.2 Zobrazení roviny a úlohy o rovinách

4.2.1 Zobrazení roviny

Průmětem roviny kolmé na průmětnu (tzv. promítací roviny) je přímka, průmětem roviny, která není kolmá na průmětnu je celá průmětna π.

Rovina σ, která není rovnoběžná s průmětnou protíná průmětnu v takzvané *stopě roviny* p^σ.



(a) Situace v prostoru

(b) Situace v nákresně

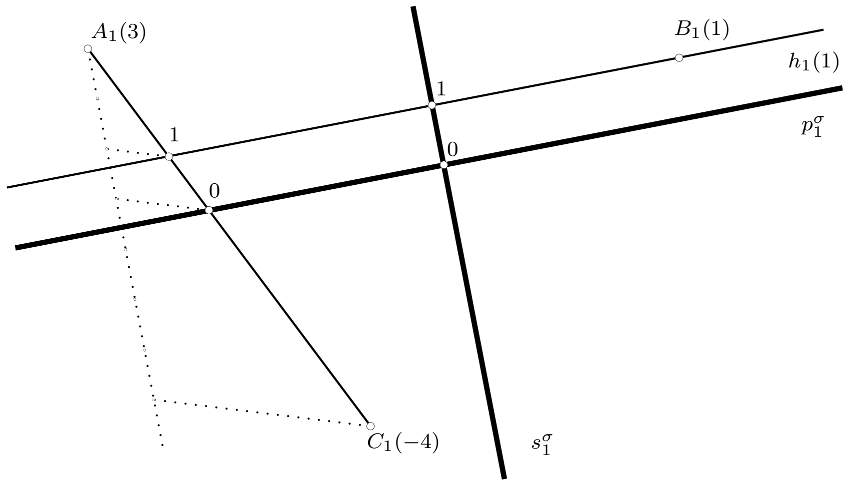
Obrázek 4.15: Zobrazení roviny

Přímkám, které jsou rovnoběžné s průmětnou a leží v rovině σ, říkáme *hlavní přímky* roviny σ a značíme je h^σ. Většinou zadáváme nebo určujeme hlavní přímky o celočíselných kótách. Kótou hlavní přímky opět rozumíme její orientovanou vzdálenost od průmětny a zapisujeme ji, stejně jako u bodů, do závorky za průmět přímky. Přímka označená $h_1^\sigma(3)$ je tedy první průmět hlavní přímky roviny σ, která leží tři jednotky nad průmětnou π.

Přímce roviny σ, která je kolmá na půdorysnou stopu (a tedy i na hlavní přímky roviny) říkáme *spádová přímka* roviny σ a značíme ji s^σ.

Rovina bývá často zadaná vystupňovanou spádovou přímkou. Pokud je rovina určena jinými prvky, měli bychom umět její spádovou přímku najít.

Příklad 4.6. Určete půdorysnou stopu a spádovou přímku roviny $\varrho \equiv (A, B, C)$(zadání i řešení viz obrázek 4.16).



Obrázek 4.16: Řešení příkladu 4.6

Řešení. Nejdříve určíme hlavní přímku roviny ϱ jedním z daných bodů, vzhledem k poloze a kótám bodů bude nejvýhodnější hledat hlavní přímku o kótě 1 ($h_1^\sigma(1)$) procházející bodem B_1, k jejímu určení nám stačí najít jeden další bod roviny ϱ o kótě 1. Ten můžeme najít (už známou konstrukcí) na úsečce A_1C_1, když ji rozdělíme na 7 stejně velkých dílků. Nemusíme určovat všechny body o celočíselných kótách, stačí nám bod o kótě 1 a také bod o kótě 0, který později využijeme při hledání půdorysné stopy. Spojením bodu o kótě 1 (nalezeném na úsečce A_1C_1) a bodu B_1 dostaneme hlavní přímku o kótě 1, půdorysná stopa roviny ϱ s ní je rovnoběžná a prochází bodem o kótě 0, který jsme našli na úsečce A_1C_1. Spádová přímka je kolmá na půdorysnou stopu a můžeme ji narýsovat kdekoliv.

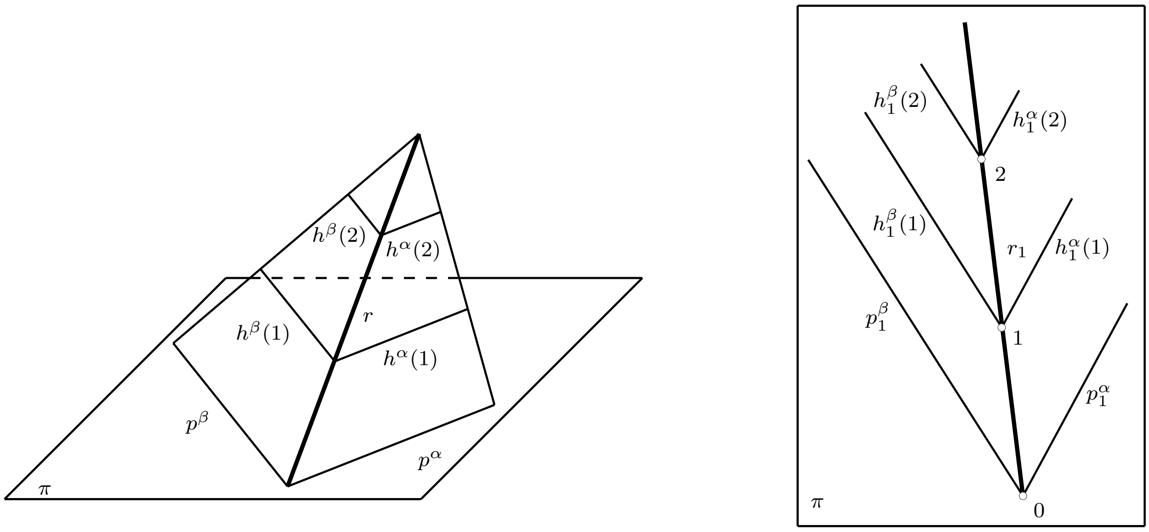
Příklad jsme mohli také začít řešit například hledáním dvou bodů o kótě 0 (třeba dělením úsečky A_1C_1 na 7 stejně velkých dílků a dělením úsečky B_1C_1 na 5 stejně velkých dílků). □

4.2.2 Průsečnice dvou rovin

Pokud dvě roviny nejsou rovnoběžné, existuje jejich průsečnice, která prochází průsečíky hlavních přímek o stejných kótách (viz obrázek 4.17). Průsečnice dvou rovin je přímka, k jejímu určení nám tedy stačí najít dva její body. Příklady na určení průsečnice dvou rovin tedy budeme řešit tak, že najdeme nebo zvolíme (pokud již jsou zadané) dvě hlavní přímky jedné roviny a v druhé rovině určíme hlavní přímky o stejných kótách jako v předchozí rovině.

Příklad 4.7. Určete průsečnici rovin ϱ a σ. Rovina ϱ je daná spádovou přímkou, na které jsou určeny body o kótách 3 a 6. Rovina σ je daná spádovou přímkou, na které jsou určeny body o kótách 4 a 9 (zadání i řešení viz obrázek 4.18).

Řešení. Jak už bylo řečeno výše, potřebujeme najít dvojice hlavních přímek v jedné i v druhé rovině o stejných kótách. Vzhledem k zadání je vhodné hledat hlavní přímky o kótách 3 a 6. V rovině ϱ je můžeme okamžitě narýsovat jako kolmice na spádovou přímku s_1^ϱ body 3 a 6. V rovině σ musíme nejdříve body o kótách 3 a 6 najít. Použijeme pomocné

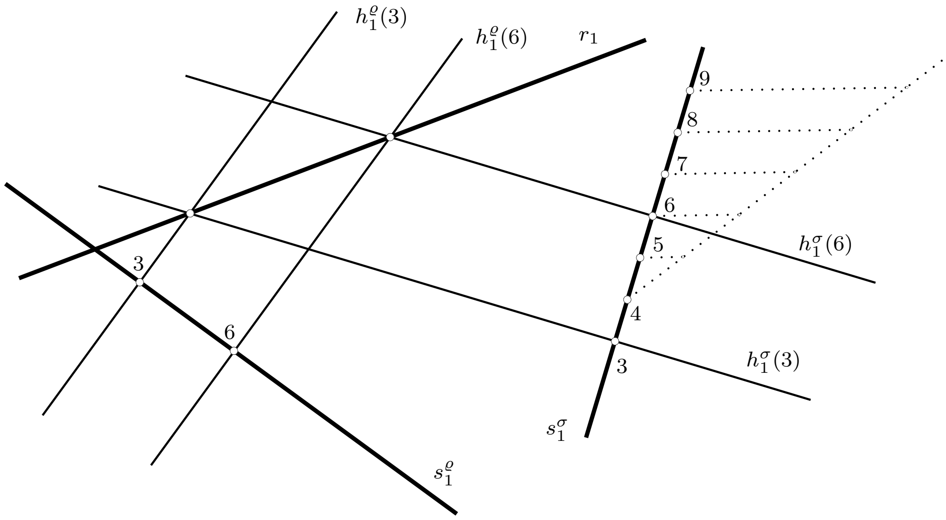


(a) Situace v prostoru

(b) Situace v průmětně

Obrázek 4.17: Průsečnice dvou rovin

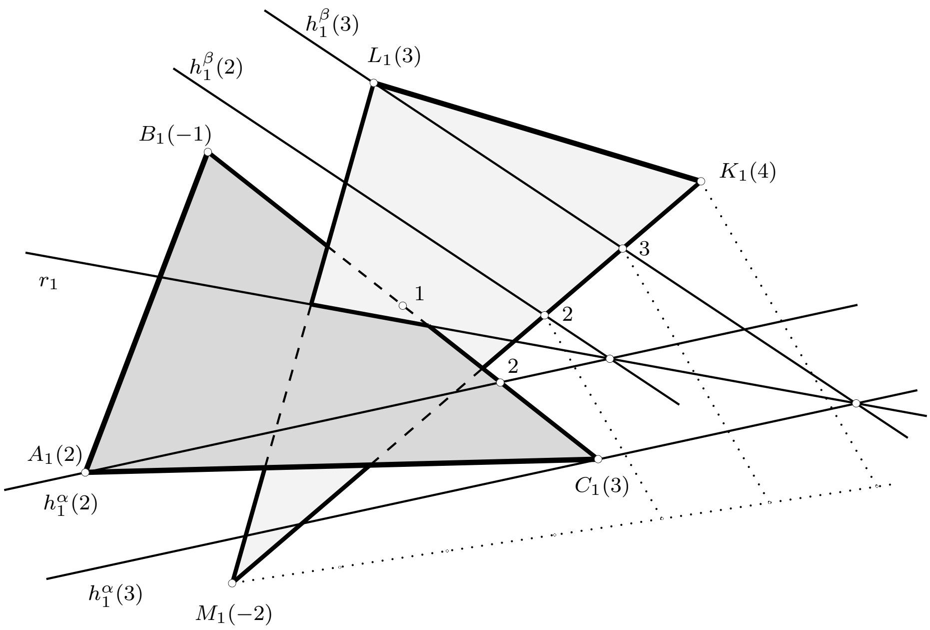
dělení na 5 dílků. Hledané hlavní přímky roviny σ jsou pak opět kolmice na spádovou přímku s_1^σ těmito body. Průsečnice r roviny ϱ a σ prochází průsečíkem hlavních přímek o kótách 3 ($h_1^\varrho(3) \cap h_1^\sigma(3)$) a průsečíkem hlavních přímek o kótách 6 ($h_1^\varrho(6) \cap h_1^\sigma(6)$). $\square$



Obrázek 4.18: Průsečnice dvou rovin

Příklad 4.8. Určete zásek trojúhelníků ABC a KLM (zadání i řešení viz obrázek 4.19).

Řešení. Zásek dvou trojúhelníků je vlastně úloha na určení průsečnice dvou rovin $\alpha \equiv (A, B, C)$ a $\beta \equiv (K, L, M)$, kde kromě průsečnice určíme posléze viditelnost trojúhelníků. Budeme proto z počátku postupovat podobně jako v předchozím případě. Když se podíváme



Obrázek 4.19: Zásek trojúhelníků

na kóty vrcholů trojúhelníků, vidíme, že bude vhodné určovat hlavní přímky ve výšce 3, další hodnotu, ve které budeme určovat hlavní přímku, si zvolíme třeba 2.

Nejdříve určíme hlavní přímku roviny trojúhelníka ABC o kótě 2, která povede bodem A, a k jejímu určení nám stačí najít další bod o kótě 2 na straně BC. Rozdíl z-ových souřadnic bodů B a C je 4, bod o kótě 2 zjistíme pomocným dělením na 4 dílky nebo pomocí dvou technických půlení. Spojením nalezeného bodu o kótě 2 s bodem A dostáváme hlavní přímku trojúhelníka ABC o kótě 2. Hlavní přímka trojúhelníka ABC o kótě 3 je rovnoběžná s hlavní přímku trojúhelníka ABC o kótě 2 a prochází bodem C.

V trojúhelníku KLM je výhodnější nejdříve hledat hlavní přímku o kótě 3. Bod o kótě 3 na úsečce MK najdeme pomocným dělením na 6 stejně velkých dílků. Bod o kótě 3 na úsečce KM pak spojíme s bodem L o kótě 3 a dostaneme hlavní přímku o kótě 3. Hlavní přímka o kótě 2 je s ní rovnoběžná a prochází bodem o kótě 2, který jsme zjistili na úsečce KM. Půdorys průsečnice $r = \alpha \cap \beta$ je spojnice průsečíků $h_1^\alpha(3) \cap h_1^\beta(3)$ a $h_1^\alpha(2) \cap h_1^\beta(2)$. Velmi tlustou plnou čarou vytahujeme na r_1 jen tu část, kde se překrývají oba dané trojúhelníky.

Viditelnost trojúhelníků určíme tak, že rozhodneme o viditelnosti v jednom z bodů, kde se protínají první průměty stran jednoho a druhého trojúhelníka. V prostoru jsou takové strany trojúhelníků mimoběžné, mluvíme proto o takzvaném zdánlivém průsečíku. Jde vlastně o dva body, které leží nad sebou (na stejné promítací přímce). Vezmeme například zdánlivý průsečík strany ML a AC a přibližně odhadneme kóty bodů vzhledem k jednotlivým stranám. Vzhledem ke straně AC bude kóta bodu mezi 2 a 3 jednotkami, vzhledem ke straně ML bude kóta záporná (kolem -1). Při pohledu shora je tedy viditelný bod strany AC a bod strany ML leží pod ním (je neviditelný). Z viditelnosti jednoho bodu odvodíme viditelnost celého zadání, protože viditelnost se mění na průsečnici r a samozřejmě platí, že jeden trojúhelník je viditelný mimo obrys druhého trojúhelníka. □

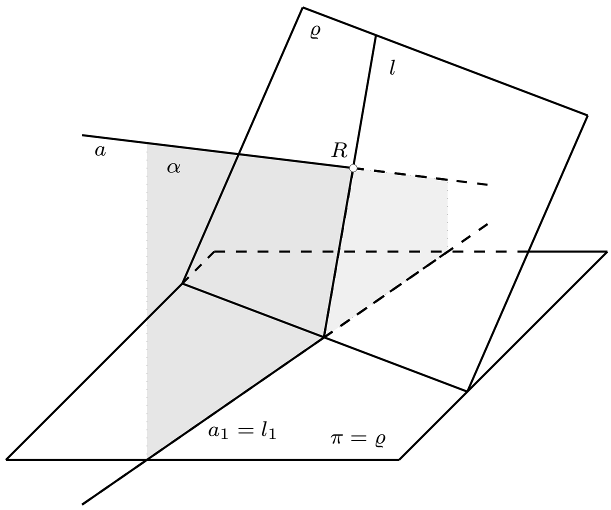
4.3 Průsečík přímky s rovinou, metoda krycí přímky

Průsečík přímky s rovinou můžeme řešit tak, že danou přímkou proložíme libovolnou rovinu a určíme její průsečnici s danou rovinou (viz předchozí oddíl). Průnik získané průsečnice a dané přímky je pak hledaným průsečíkem.

Pokud přímkou neprokládáme libovolnou rovinu, ale promítací rovinu, mluvíme o takzvané *metodě krycí přímky.*

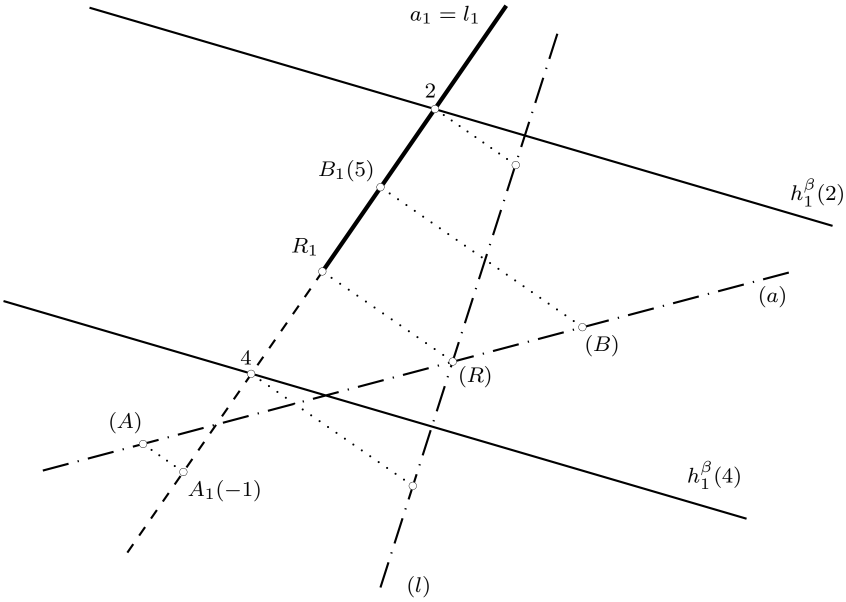
Řekněme, že máme určit průsečík přímky a s rovinou ϱ. Přímkou a proložíme promítací rovinu α (rovina kolmá na průmětnu), pro průsečnici $l = \alpha \cap \varrho$ pak platí $a_1 = l_1$. Při řešení příkladů budeme postupovat následovně:

- představíme si, že přímkou a proložíme promítací rovinu α, která protne rovinu ϱ v přímce l (nic nerýsujeme, jde jen o myšlenku),
- přímky a a l leží ve stejné promítací rovině, proto položíme $a_1 = l_1$,
- najdeme na přímce l dva body tak, aby skutečně platilo, že leží v rovině ϱ,
- určíme průsečík přímky a a l (jedná se o různoběžky ve stejné promítací rovině, průsečík najdeme sklopením), což je hledaný průsečík přímky a s rovinou ϱ,
- určíme viditelnost přímky a vzhledem k rovině ϱ (viditelnost se mění v průsečíku, proto stačí určit viditelnost v jednom z dalších bodů přímky a).



Obrázek 4.20: Prostorová situace při hledání průsečíku přímky a s rovinou ϱ pomocí krycí přímky

Příklad 4.9. Určete průsečík přímky $a = (A, B)$ s rovinou β, která je daná hlavními přímkami o kótách 2 a 4 (zadání i řešení viz obrázek 4.21).



Obrázek 4.21: Průsečík přímky s rovinou danou hlavními přímkami

Řešení. Postupujeme podle předchozích bodů. Představíme si promítací rovinu přímky a, která protne rovinu β v přímce l (tzv. krycí přímka). Přímky a a l leží ve stejné promítací rovině, proto položíme $a_1 = l_1$. Přímka l současně leží v rovině β, její průsečíky s hlavními přímkami roviny β jsou tedy skutečné a v prostoru určují polohu přímky l. Konkrétně se jedná o průsečík $l_1 \cap h_1^\beta(2)$, který má kótu 2 (protože je to bod hlavní přímky o kótě 2) a o průsečík $l_1 \cap h_1^\beta(4)$, který má kótu 4 (protože je to bod hlavní přímky o kótě 4).

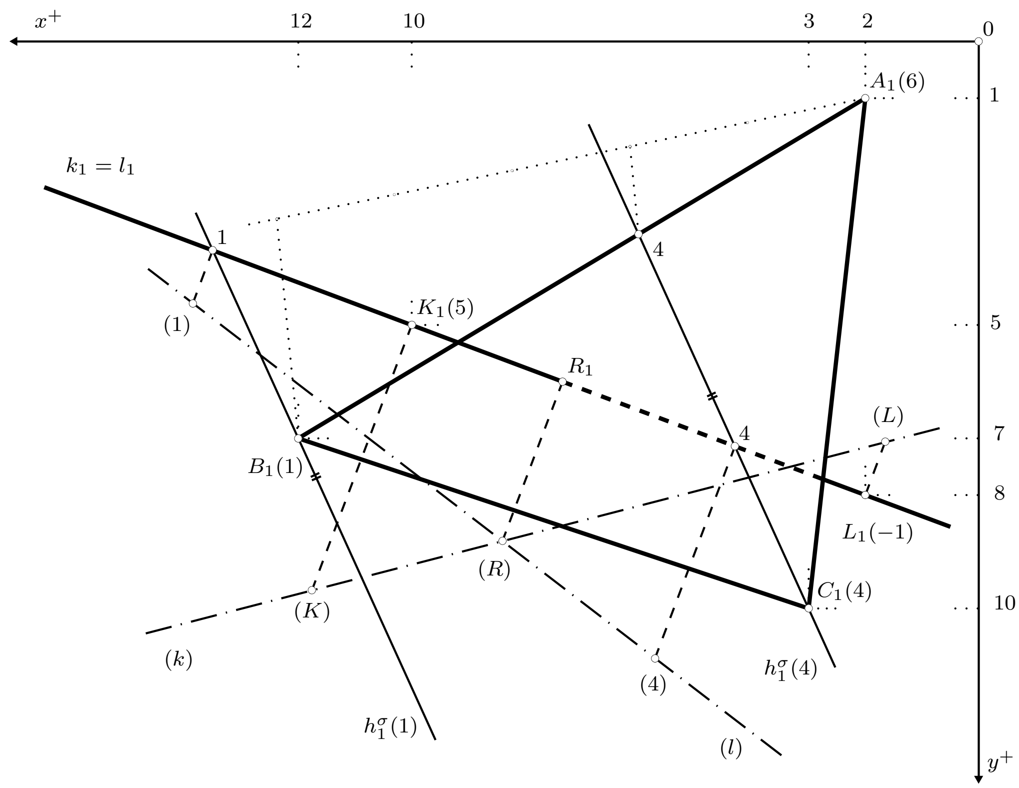
Přímky a a l leží ve stejné promítací rovině, jejich průsečík najdeme sklopením. Tento průsečík ve sklopení označíme (R), jeho první průmět, který najdeme na kolmici na $a_1 = l_1$ bodem (R), označíme R_1. Bod R je hledaný průsečík přímky $a = (A, B)$ s rovinou β.

Zbývá určit viditelnost přímky $a = (A, B)$ vzhledem k rovině β. Viditelnost se mění v bodě R, proto stačí určit viditelnost v jednom bodě přímky a (kromě bodu R). Uvažujme například zdánlivý průsečík přímky a_1 a $h_1^\beta(2)$. Vzhledem k přímce a je kóta tohoto bodu větší než 5, vzhledem k přímce $h^\beta(2)$ je kóta tohoto bodu 2. Bod přímky a tedy v tomto místě leží výš a je viditelný, z přímky a je tedy viditelná polopřímka RB. □

Příklad 4.10. Určete průsečík přímky $k = (K, L)$ s trojúhelníkem ABC, $K[10; 5; 5]$, $L[2; 8; -1]$, $A[2; 1; 6]$, $B[12; 7; 1]$, $C[3; 10; 4]$ (zadání i řešení viz obrázek 4.22).

Řešení. Vyneseme body dané souřadnicemi (vynášení souřadnic viz obrázek 4.2) a narýsujeme zadání. V rovině σ trojúhelníku ABC najdeme dvě hlavní přímky. Nejdříve budeme hledat hlavní přímku roviny $\sigma \equiv (ABC)$ o kótě 4. Ta musí procházet bodem C a bodem o kótě 4, který najdeme pomocí dělení úsečky AB na 5 dílků. Další hlavní přímku, například o kótě 1, roviny σ určíme jako rovnoběžku s h^σ bodem B. Tím jsme zadání převedli opět na průsečík přímky s rovinou danou hlavními přímkami a dále ho budeme řešit jako v předchozím případě.

Představíme si promítací rovinu přímky k, která protne rovinu σ v přímce l (tzv. krycí přímka). Přímky k a l leží ve stejné promítací rovině, proto položíme $k_1 = l_1$. Přímka l



Obrázek 4.22: Průsečík přímky s trojúhelníkem

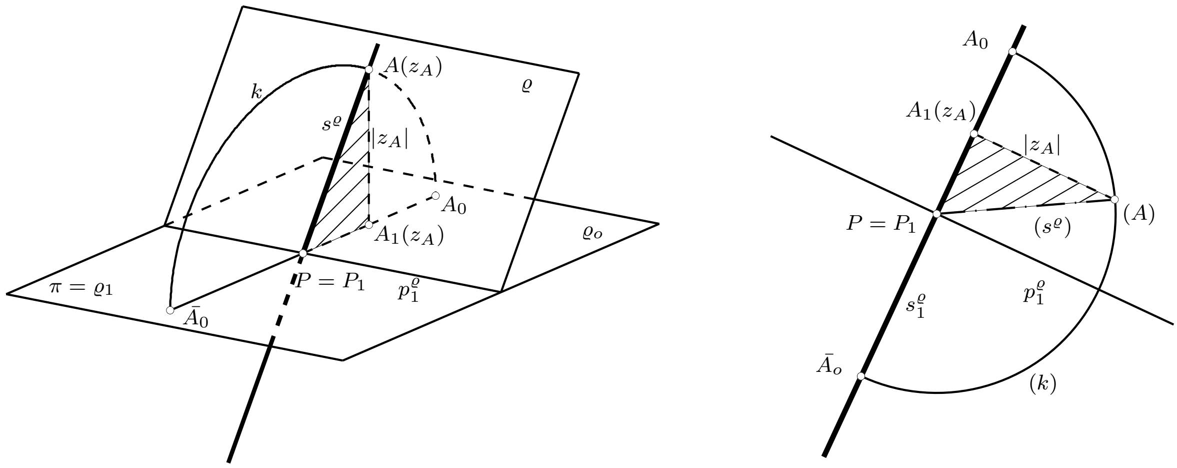
současně leží v rovině σ, její průsečíky s hlavními přímkami roviny σ jsou tedy skutečné a v prostoru určují polohu přímky l. Konkrétně se jedná o průsečík $l_1 \cap h_1^\sigma(4)$, který má kótu 4 a o průsečík $l_1 \cap h_1^\sigma(1)$, který má kótu 1. Průsečík přímek k a l, ležících ve stejné promítací rovině, najdeme jejich sklopením. Tento průsečík ve sklopení označíme (R), jeho první průmět, který najdeme na kolmici na $k_1 = l_1$ bodem (R) označíme R_1. Bod R je hledaný průsečík přímky $k = (K, L)$ s rovinou $\sigma \equiv (ABC)$.

Zbývá určit viditelnost přímky $k = (K, L)$ vzhledem k trojúhelníku ABC. Viditelnost přímky k se nám bude lépe určovat vzhledem k hlavním přímkám roviny $\sigma \equiv (ABC)$, uvažujme například zdánlivý průsečík přímky k a $h^\sigma(1)$, vzhledem k přímce $h^\sigma(1)$ je kóta tohoto bodu 1, vzhledem k přímce k je kóta tohoto bodu zcela jistě více jak 5 (5 je kóta bodu K). Přímka k je tedy v tomto bodě viditelná a viditelnost se mění v bodě R. Mimo obrys trojúhelníka ABC je přímka k opět viditelná. $\square$

4.4 Otočení roviny

Útvary ležící v rovině rovnoběžné s průmětnou se v kótovaném promítání zobrazují do útvarů shodných. U roviny kolmé k průmětně můžeme ke zjištění skutečné velikosti útvarů, ležících v této rovině, použít sklápění.

V této kapitole se budeme věnovat určení skutečných velikostí útvarů v obecně položené rovině (tj. v rovině, která není rovnoběžná s průmětnou ani kolmá na průmětnu). Budeme postupovat pomocí otáčení roviny do půdorysny kolem její půdorysné stopy. Úlohy se také dají řešit pomocí otáčení roviny do polohy rovnoběžné s průmětnou kolem libovolné hlavní přímky této roviny. Otáčení roviny se také používá pokud máme v obecně položené rovině zobrazit útvar konkrétního tvaru a rozměru. V tom případě postupujeme tak, že provedeme otočení roviny, v otočení zobrazíme požadovaný útvar a poté najdeme pomocí afinity první průmět tohoto útvaru.



(a) Situace v prostoru (b) Situace v nákresně

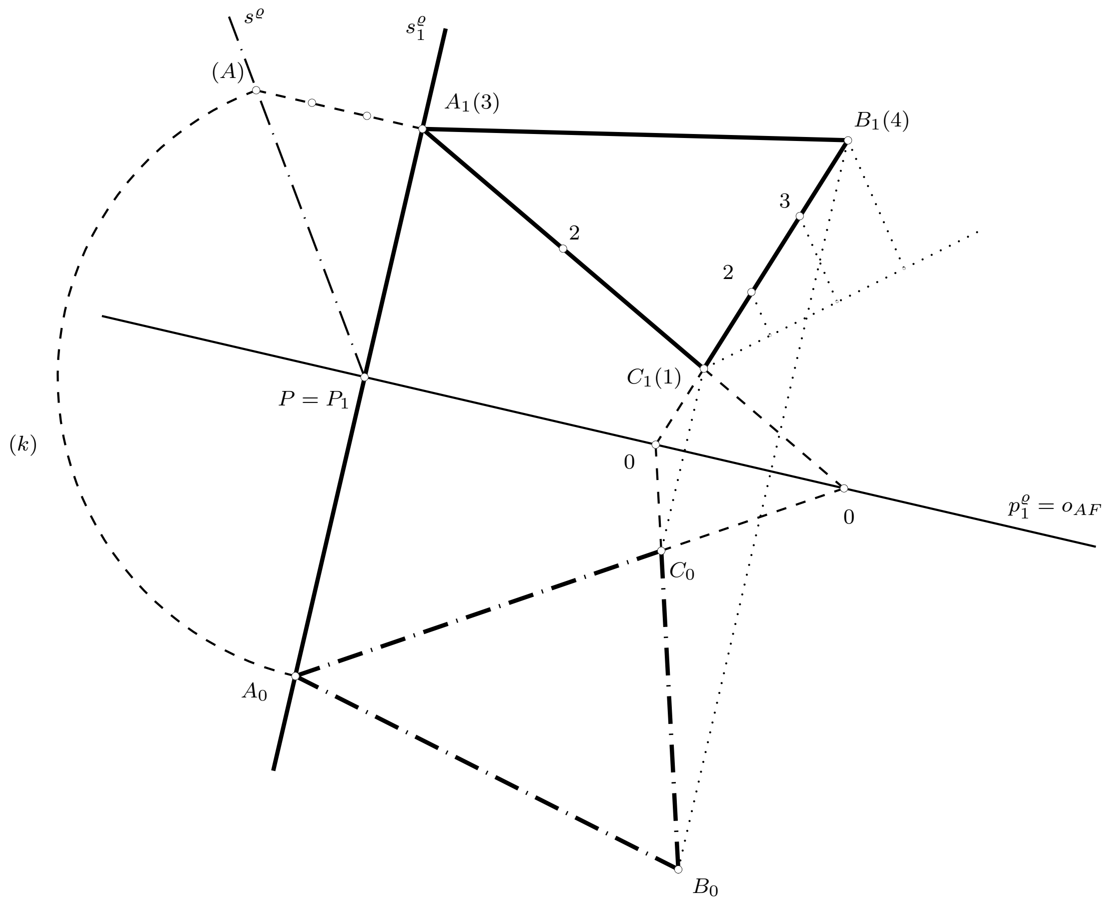
Obrázek 4.23: Otáčení roviny kolem půdorysné stopy

Mějme rovinu ϱ, která protíná půdorysnu π v půdorysné stopě p^ϱ, a bod A, který leží v rovině ϱ a současně neleží na p^ϱ (viz obrázek 4.23a). Rovinu otáčíme kolem p^ϱ do půdorysny a sledujeme, co se děje s bodem A. Bod A při otáčení rotuje po kružnici, která leží v rovině kolmé na půdorysnou stopu. Středem této kružnice je půdorysný stopník $P = P_1$ spádové přímky s^ϱ procházející bodem A. Poloměr kružnice je tedy vzdálenost bodu A od $P = P_1$. Průsečíky kružnice, po které rotuje bod A, s průmětnou jsou otočené body A_0 a $\bar{A}_0$ (rovinu můžeme otáčet dvěma směry).

Nyní si popíšeme, jak budeme postupovat při odpovídající konstrukci v průmětně. Mějme dánu stopu p_1^ϱ a bod A_1. Bodem A_1 vedeme půdorys spádové přímky s_1^ϱ kolmo na p_1^ϱ. Průsečík spádové přímky s_1^ϱ a půdorysné stopy p_1^ϱ označíme $P = P_1$. Sklopením spádové přímky a bodu A určíme skutečnou vzdálenost bodů A, $P = P_1$, což je poloměr hledané kružnice. Narýsujeme kružnici o středu $P = P_1$, procházející bodem (A) (jde o sklopený obraz kružnice k). Průsečíky této kružnice s s_1^ϱ jsou otočené body A_0 a $\bar{A}_0$.

Příklad 4.11. Určete skutečnou velikost daného trojúhelníka ABC (zadání i řešení viz obrázek 4.24).

Řešení. Skutečnou velikost trojúhelníka ABC zjistíme otočením roviny, ve které leží, kolem její půdorysné stopy. Nejdříve tedy najdeme půdorysnou stopu roviny $\varrho \equiv (ABC)$. K určení půdorysné stopy potřebujeme dva body roviny $\varrho \equiv (ABC)$ o kótě 0, ty najdeme pomocnými konstrukcemi na polopřímkách AC a BC. Spojením dvou bodů o kótě 0 (jde vlastně o půdorysné stopníky polopřímek AC a BC) dostáváme půdorysnou stopu p_1^ϱ.



Obrázek 4.24: Skutečná velikost trojúhelníka

Otočíme jeden z vrcholů trojúhelníka ABC, například bod A (postupujeme podle návodu viz výše).

Bodem A vedeme spádovou přímku s^ϱ, kolmo na p^ϱ. Průsečík spádové přímky s^ϱ a půdorysné stopy p^ϱ označíme $P = P_1$. Spádovou přímku sklopíme (vzdálenost bodů (A), $P = P_1$ je poloměr kružnice otáčení). Narýsujeme kružnici o středu $P = P_1$, procházející bodem (A) (jde o sklopený obraz kružnice k). Vybereme si jeden z průsečíků sklopené kružnice (k) se spádovou přímkou s_1^ϱ (stačí nám otočit rovinu jedním směrem) a označíme ho A_0, to je otočený obraz bodu A.

Mezi rovinou $\varrho \equiv (ABC)$ a jejím otočeným obrazem platí vztah afinity. Osa afinity je půdorysná stopa p^ϱ a odpovídající dvojice bodů A_1 a A_0 (směr afinity je tedy kolmý na osu afinity). Body C a D tedy již nemusíme otáčet, ale můžeme jejich otočené obrazy zjistit afinitou. Průsečík polopřímky A_1C_1 s půdorysnou stopou je samodružný bod, jehož spojením s bodem A_0 dostaneme otočený obraz polopřímky AC. Bod C_0 leží na tomto obrazu polopřímky AC a současně na kolmici na osu afinity vedenou bodem C_1. Obdobně získáme otočený obraz bodu B (využijeme tentokrát průsečíku polopřímky B_1C_1 s osou afinity). Trojúhelník $A_0B_0C_0$ je skutečná velikost trojúhelníka ABC. □

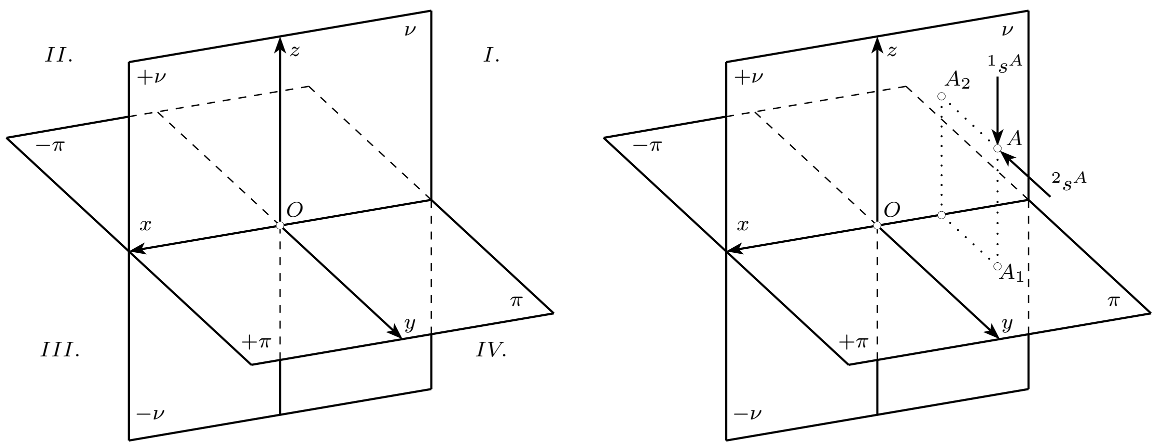
Kapitola 5

Mongeovo promítání

Jedním z nejjednodušších užívaných zobrazení je pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, které se stručně nazývá *Mongeovo promítání*.[1]

5.1 Úvodní pojmy

V Mongeově promítání přidáme k první, vodorovné průmětně, kterou známe z kótovaného promítání, druhou, svislou průmětnu ν. Průmětna π se nazývá *půdorysna* a průmětna ν *nárysna*. Osu x kartézské soustavy souřadnic, kterou budeme nazývat *základnice*, umístíme do průsečnice půdorysny a nárysny. Osa y pak bude ležet v půdorysně a osa z v nárysně.



(a) Průmětny v prostoru   (b) Zobrazení bodu

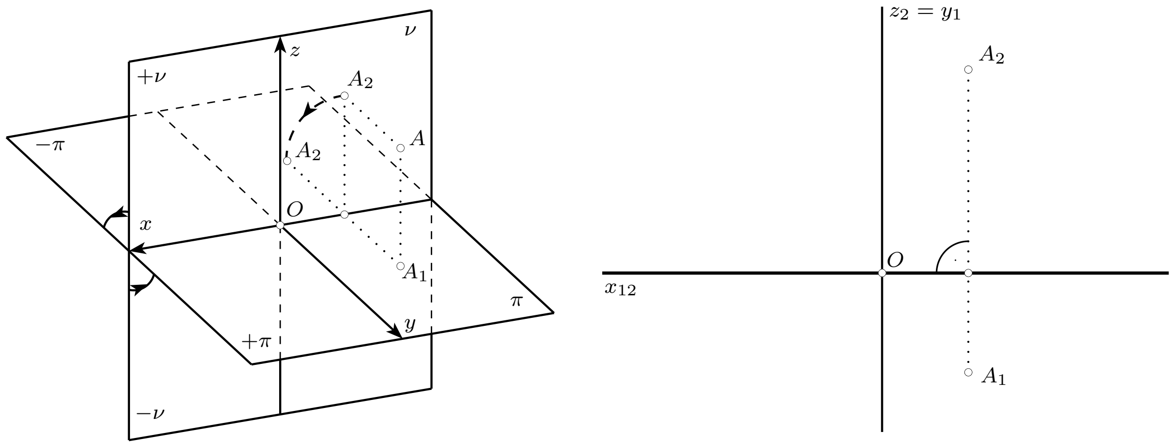
Obrázek 5.1: Mongeovo promítání v prostoru

Základnice rozdělí průmětny na poloroviny ($+\pi$, $-\pi$ a $+\nu$, $-\nu$) a průmětny rozdělí prostor na čtyři části, tzv. kvadranty, viz obrázek 5.1a. Část prostoru nad půdorysnu a před nárysnou je první kvadrant, nad půdorysnou a za nárysnou druhý kvadrant, pod

[1]Podle francouzského inženýra Gasparda Monge (1746-1818), který toto promítání vynalezl. Pro zajímavost je možné zmínit, že ve své době se jednalo o vojenské tajemství.

půdorysnou a za nárysnou třetí kvadrant a pod půdorysnou a před nárysnou je čtvrtý kvadrant. Pro lepší představu může jako základní model sloužit napolo otevřený sešit nebo kniha (modeluje tak první kvadrant).

Bod A v prostoru promítneme pomocí první promítací přímky ${}^{1}s^{A}$ kolmo na půdorysnu do bodu A_1, viz obrázek 5.1b, a pomocí druhé promítací přímky ${}^{2}s^{A}$ kolmo na nárysnu do bodu A_2. Bod A_1 se nazývá *půdorys* (první průmět) bodu A a bod A_2 se nazývá *nárys* (druhý průmět) bodu A_2. Půdorys odpovídá pohledu shora (stejně jako v kótovaném promítání) a nárys představuje pohled zepředu (nahrazuje zápis kóty).



(a) Sdružení průměten (b) Sdružené obrazy bodu

Obrázek 5.2: Mongeovo promítání v rovině

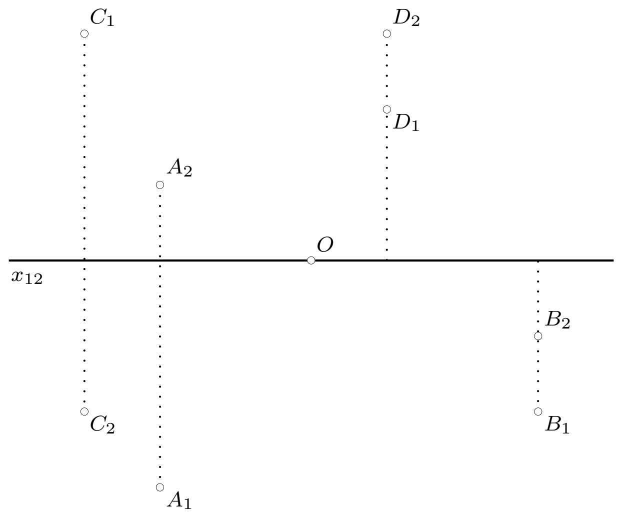
Aby promítání bylo prakticky použitelné je třeba oba průměty zobrazit v jediné rovině, to se provádí tzv. *sdružením průměten*, viz obrázek 5.2a. Otočíme o 90° kolem osy x nárysnu do půdorysny, resp. půdorysnu do nárysny. V takovémto otočení splyne polorovina $+\pi$ s polorovinou $-\nu$ a polorovina $-\pi$ s polorovinou $+\nu$. Půdorys A_1 přejde do nové polohy, přičemž spojnice nového půdorysu A_1 a nárysu A_2 je kolmá k ose x, viz obrázek 5.2b. Sdružené průměty osy x splývají a značíme je x_{12}. Takovéto průměty nazýváme *sdružené průměty.* Přímka A_1A_2 kolmá k ose x, tj. k základnici, se nazývá *ordinála.* Platí, že každá dvojice odpovídajících si sdružených průmětů bodu leží na ordinále.

5.2 Základní úlohy

5.2.1 Zobrazení bodu

Příklad 5.1. Sestrojte sdružené průměty bodů $A[2,\ 3\,1]$, $B[-3,\ 2,\ -1]$, $C[3,\ -3,\ -2]$, $D[-1,\ -2,\ 3]$ a určete jejich polohu v prostoru.

Řešení. Zobrazíme osu x s počátkem soustavy souřadnic. Půdorys a nárys bodu leží na ordinále, tj. na kolmici k ose x_{12}. Vzdálenost ordinály od počátku je určena x-ovou souřadnicí bodu. Na ordinálu vyneseme vzdálenosti odpovídající y-ovým a z-ovým souřadnicím bodu, přičemž přihlížíme k znaménku těchto souřadnic.



Obrázek 5.3: Řešení příklad 5.1

Polohu bodů v prostoru určíme pomocí jejich y-ových a z-ových souřadnic. Jelikož pro bod A platí, že $y_A > 0$ i $z_A > 0$, leží bod A v prvním kvadrantu ve vzdálenosti 3 před nárysnou a ve vzdálenosti 1 nad půdorysnou. Podobně bod B leží ve čtvrtém kvadrantu, tj. před nárysnou (ve vzdálenosti 2) a pod půdorysnou (ve vzdálenosti 1), bod C leží ve třetím kvadrantu, tj. za nárysnou (ve vzdálenosti 3) a pod půdorysnou (ve vzdálenosti 2) a bod D leží ve druhém kvadrantu, tj. za nárysnou (ve vzdálenosti 2) a nad půdorysnou (ve vzdálenosti 3). □

Poznámka 5.2. Pro všechny body roviny π platí, že jejich nárysy leží na ose x_{12}, a podobně pro všechny body roviny ν platí, že jejich půdorysy leží na ose x_{12}.

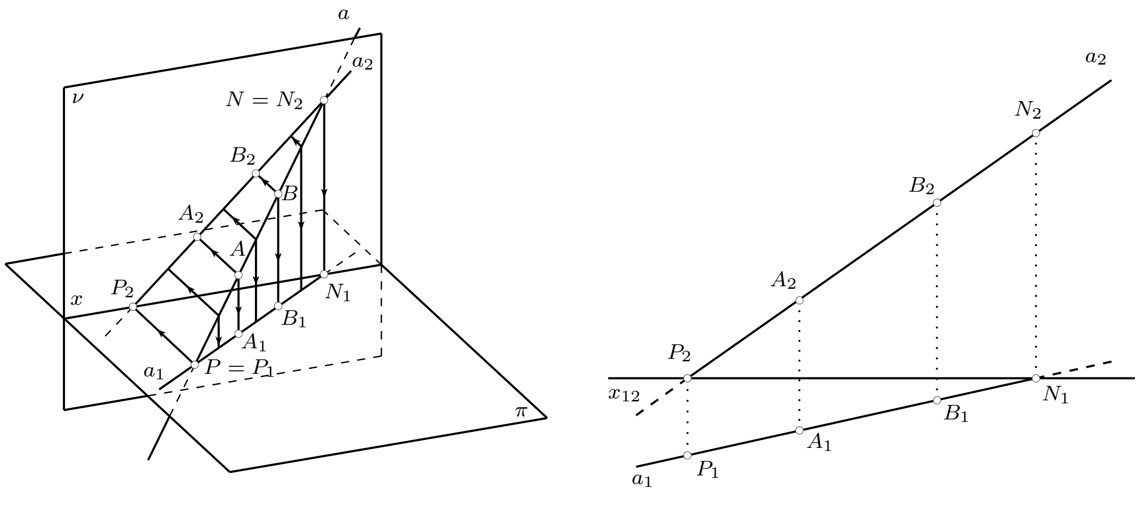
Vzájemnou polohu bodů můžeme popsat pomocí výrazu „vlevo“, „vpravo“ (ve směru osy x), „před“, „za“ (ve směru osy y) a výš, níž (ve směru osy z). Těchto pojmů využíváme při určování viditelnosti v průmětech.

5.2.2 Zobrazení přímky

Druhým základním objektem, který chceme umět zobrazit je přímka. Nejprve se zaměříme na přímku v tzv. obecné poloze, tj. není rovnoběžná s průmětnami, ani kolmá k průmětnám.

Podobně jako jsme bodu přiřadili v promítání na dvě průmětny dvě promítací přímky, přiřazujeme obecně položené přímce dvě promítací roviny, viz obrázek 5.4. První promítací přímka roviny a prochází přímkou a je kolmá k půdorysně. Druhá promítací rovina přímky a prochází přímkou a je kolmá k nárysně. Prvním průmětem přímky a je průsečnice první promítací roviny a půdorysny, druhým průmětem je průsečnice druhé promítací roviny a nárysny. Jelikož víme, že rovnoběžným promítáním se zachovává incidence, musí hledané průměty přímky procházet odpovídajícími průměty bodů, které přímku určují.

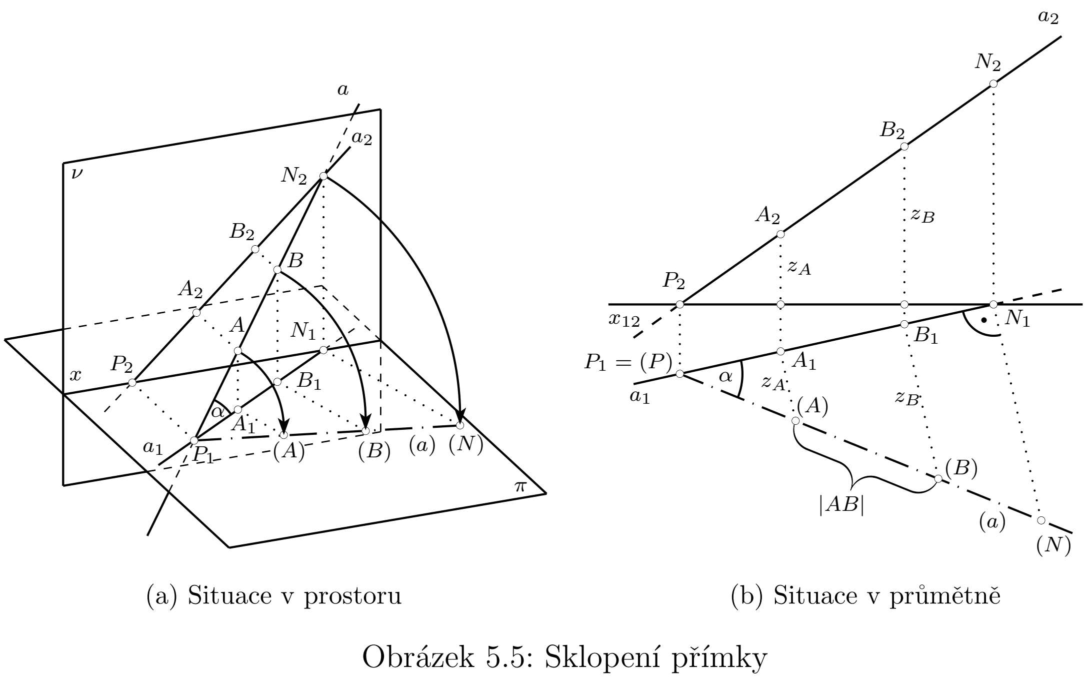
Body, ve kterých přímka protíná průmětny, jsou tzv. *stopníky přímky*. Průsečík P přímky a s půdorysnou je její *půdorysný stopník*, podobně průsečík N přímky s a nárysnou je její *nárysný stopník*. Jelikož stopník P leží v půdorysně, je $z_P = 0$ a proto nárys P_2 leží na ose x_{12}. Půdorys P_1 leží na ordinále a na přímce a_1. Nárysný stopník leží v nárysně, je tedy $y_N = 0$ a proto půdorys leží na ose x_{12}. Nárys leží na ordinále a na přímce a_2.



(a) Přímka v prostoru (b) Přímka v průmětu

Obrázek 5.4: Zobrazení přímky

Určení skutečné velikost úsečky a odchylek přímky od průměten provedeme stejně jako v kótovaném promítání, tj. užitím *sklopení promítací roviny přímky* do průmětny. Můžeme sklopit první promítací rovinu do půdorysny pomocí z-ových souřadnic bodů A, B přímky, které získáme v nárysu, viz obrázek 5.5. Ve sklopení pak vidíme jak skutečnou velikost úsečky, tak odchylku α dané přímky od půdorysny. Analogicky bychom mohli sklopit promítací rovinu do nárysny pomocí y-ových souřadnic bodů A, B, které získáme v půdorysu. V takovém sklopení opět vidíme skutečnou velikost úsečky (je samozřejmě stejná jako při sklopení do půdorysny) a odchylku β přímky a od nárysny.

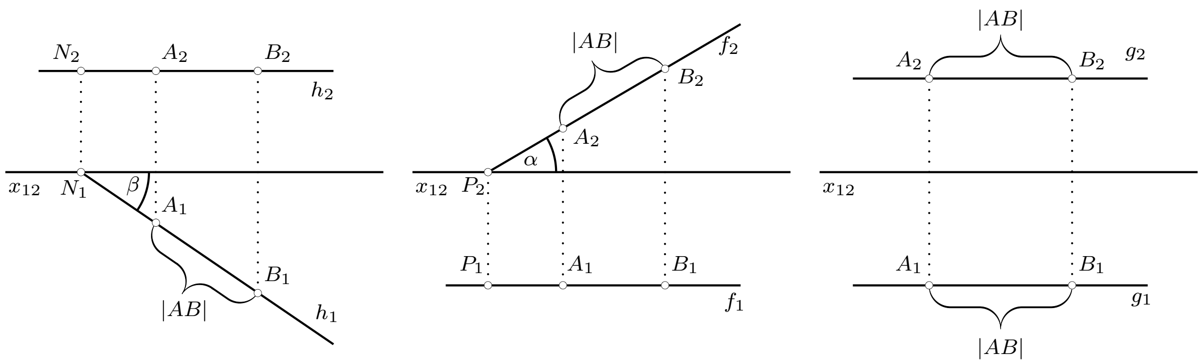


(a) Situace v prostoru (b) Situace v průmětně

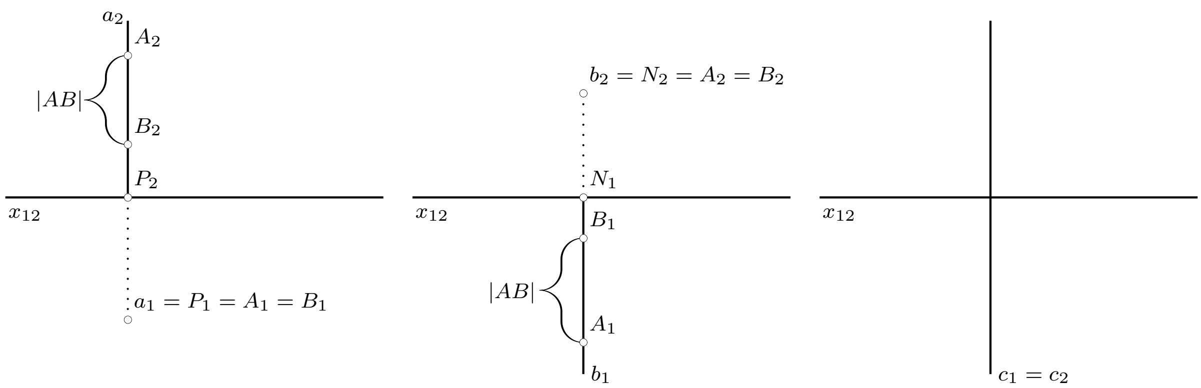
Obrázek 5.5: Sklopení přímky

Přímky ve speciální poloze

V předchozím jsme se zabývali přímkou v obecné poloze. Teď se zaměříme na přímky, které mají speciální polohu, tj. jsou rovnoběžné s průmětnou (osou), případně kolmé na průmětnu (k ose).



(a) Přímka rovnoběžná s půdorysnou (b) Přímka rovnoběžná s nárysnou (c) Přímka rovnoběžná s osou x



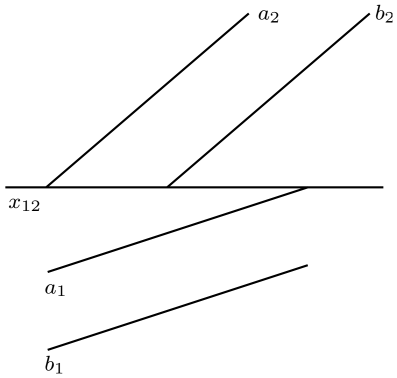
(d) Přímka kolmá k půdorysně (e) Přímka kolmá k nárysně (f) Přímka kolmá k ose x

Obrázek 5.6: Přímky ve speciální poloze

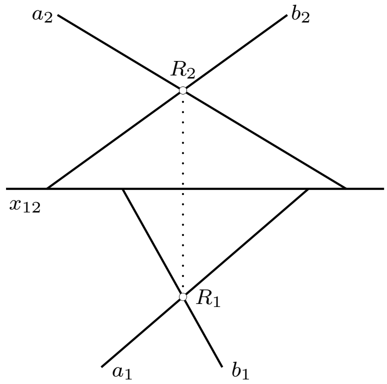
Přímka rovnoběžná s půdorysnou neboli tzv. horizontální přímka se obvykle značí h (uvažujeme, že $h \not\parallel x$). Jelikož takováto přímka zřejmě nemá půdorysný stopník, je její nárysný průmět rovnoběžný s osou x_{12}. Půdorysný průmět je s osou x_{12} různoběžný a určuje odchylku přímky h od nárysny. Navíc platí, že skutečná velikost úsečky ležící na h je vidět přímo v půdorysu.

Podobně *přímka rovnoběžná s nárysnou* neboli tzv. frontální přímka se značí f (uvažujeme opět, že $f \not\parallel x$), má půdorysný průmět rovnoběžný s osou x_{12} (nemá nárysný stopník) a její nárys je různoběžný s osou x_{12} a určuje odchylku přímky f od půdorysny. Skutečná velikost úsečky ležící na f je vidět přímo v nárysu.

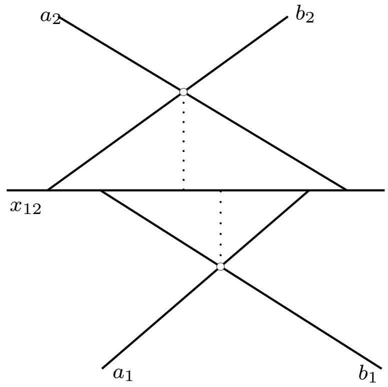
Přímka rovnoběžná s osou x je rovnoběžná s oběma průmětnami a její průměty jsou přímky rovnoběžné s osou x_{12}. Její odchylka od obou průměten je tedy 0° a skutečná



(a) Rovnoběžné přímky



(b) Různoběžné přímky



(c) Mimoběžné přímky

Obrázek 5.7: Vzájemná poloha přímek

velikost úsečky na takovéto přímce je vidět ve skutečné velikost v obou průmětech.

Přímka kolmá k půdorysně se do půdorysny promítá jako bod a do nárysny jako přímka kolmá k ose x_{12} ležící na ordinále. Jelikož je přímka zároveň i s nárysnou rovnoběžná, vidíme v nárysně velikosti úseček na této přímce ve skutečné velikosti. Podobně *přímka kolmá k nárysně* se do nárysny zobrazí jako bod a v půdorysně jako přímka kolmá k ose x_{12} ležící na ordinále. Přímka je rovnoběžná s půdorysnou a proto na půdorysu vidíme úsečky ve skutečné velikosti.

Přímka kolmá k ose x není kolmá k žádné průmětně. Její půdorys i nárys splynou v jednu přímku kolmou k ose x_{12} a přímka jimi není jednoznačně určena (k jejímu jednoznačnému určení je třeba dvou bodů, které na ní leží).

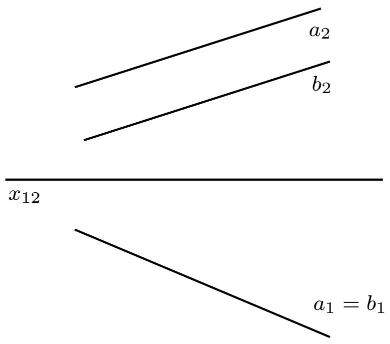
5.2.3 Vzájemná poloha dvou přímek

Víme, že dvě různé přímky v prostoru mohou být rovnoběžné, různoběžné a nebo mimoběžné. O tom, která z těchto situací nastane, je v Mongeově promítání poměrně snadné rozhodnout, viz obrázek 5.7.

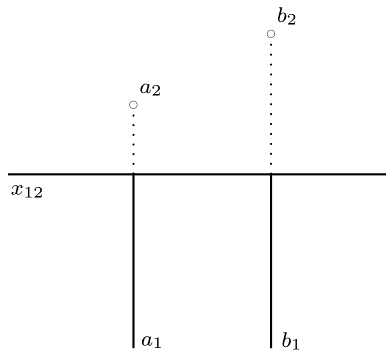
Uvažujme přímky, které nemají k průmětnám speciální polohu a neleží v jedné promítací rovině. Pak dvě *rovnoběžné přímky* mají rovnoběžné půdorysy a nárysy (mají totiž rovnoběžné promítací roviny), dvě *různoběžné přímky* se promítají jako různoběžky, přičemž průsečík nárysů a půdorysů leží na ordinále. Dvě *mimoběžné přímky* nemají společný bod, a proto, jsou-li jejich půdorysem a nárysem různoběžky, neleží průsečíky půdorysů a nárysů přímek na ordinále. Je-li v jednom průmětu obrazem dvojice mimoběžek dvojice rovnoběžek, pak v druhém průmětu je obrazem dvojice různoběžek. Je-li některá přímka, případně obě přímky, ve speciální poloze jsou jednotlivé situace na obrázku 5.8.

5.2.4 Zobrazení roviny

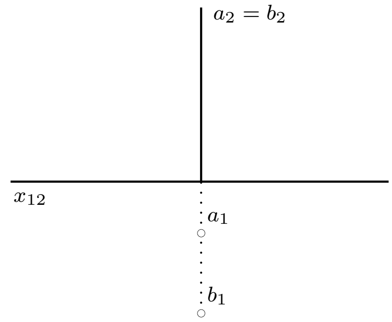
Podobně jako u zobrazení přímky si nejprve všimneme obecně položené roviny, tj. takové, která není rovnoběžná s žádnou průmětnou ani osou, a která není kolmá k průmětně ani



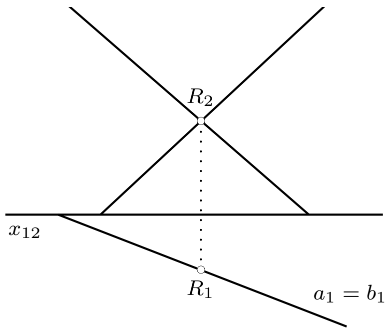
(a) Rovnoběžné přímky v jedné promítací rovině



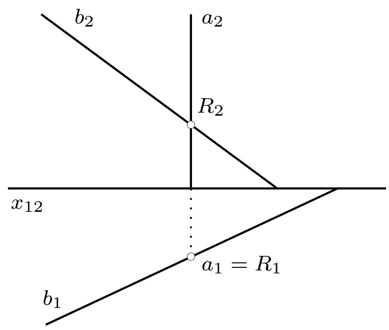
(b) Rovnoběžné přímky kolmé k nárysně



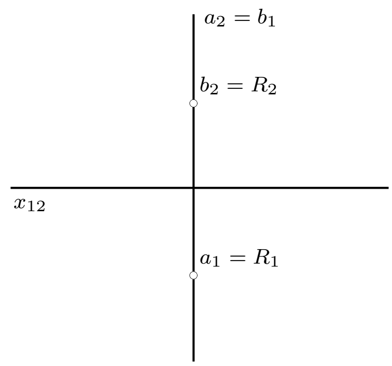
(c) Rovnoběžné přímky v jedné promítací rovině kolmé k půdorysně



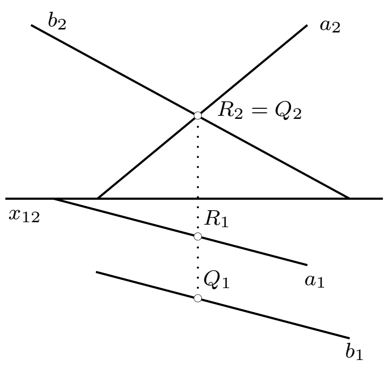
(d) Různoběžné přímky v jedné promítací rovině



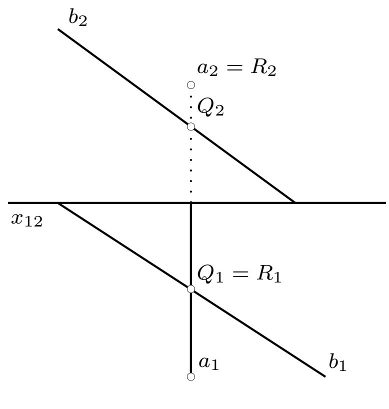
(e) Různoběžné přímky, jedna kolmá k půdorysně



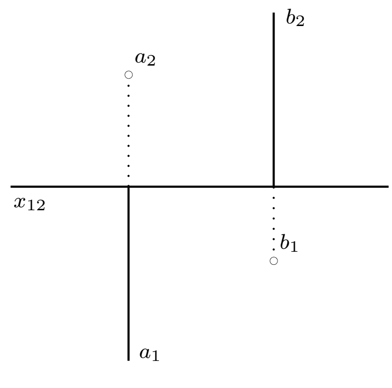
(f) Různoběžné přímky kolmé k průmětnám



(g) Mimoběžné přímky v rovnoběžných rovinách



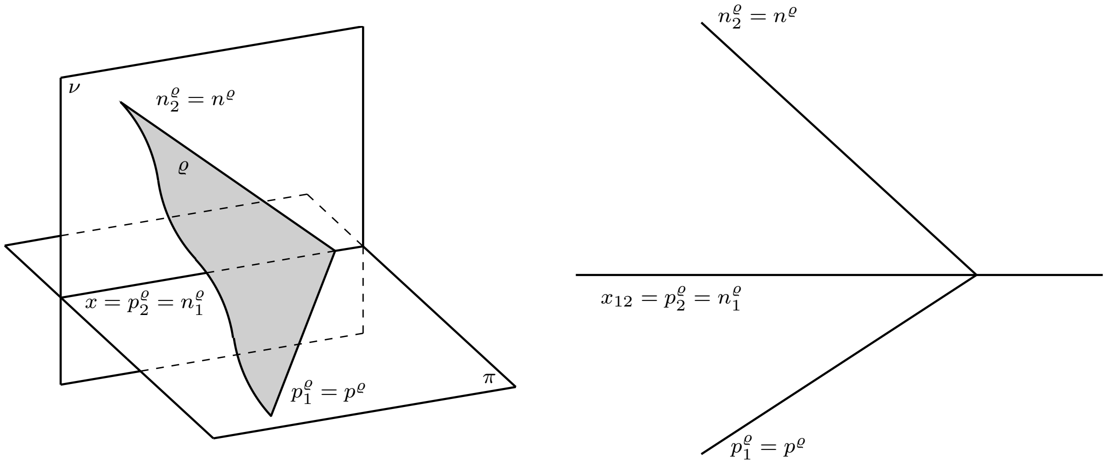
(h) Mimoběžné přímky, jedna kolmá k nárysně



(i) Mimoběžné přímky kolmé k průmětnám

Obrázek 5.8: Vzájemná poloha přímek - speciální polohy ose.

Půdorysem obecně položené roviny je celá půdorysna, jejím nárysem je pak celá nárysna. Důležitou roli hrají přímky, v kterých rovina protíná průmětny, tzv. *stopy roviny*, viz obrázek 5.9. Průsečnice roviny ϱ s půdorysnou se nazývá *půdorysná stopa* a značí se p^{ϱ}, průsečnice roviny s nárysnou se nazývá *nárysná stopa* a značí se n^{ϱ}. Obě stopy se protínají na ose x. Půdorysná stopa leží v půdorysně, proto $p^{\varrho} = p_1^{\varrho}$, a podobně pro nárysnou stopu platí $n^{\varrho} = n_2^{\varrho}$.



(a) Rovina v prostoru

(b) Stopy roviny

Obrázek 5.9: Zobrazení roviny

Nejjednodušším zadáním roviny v souřadnicích je zadání pomocí úseků vyťatých rovinou na osách souřadnic, tedy pomocí bodů $X[x;\ 0;\ 0]$, $Y[0;\ y;\ 0]$, $Z[0;\ 0;\ z]$, což zkráceně zapisujeme ve tvaru $\varrho(x;\ y;\ z)$. Body X, Y určují půdorysnou stopu a body Y, Z určují nárysnou stopu. Tento způsob zápisu se nedá použít pro roviny procházející počátkem soustavy souřadnic.

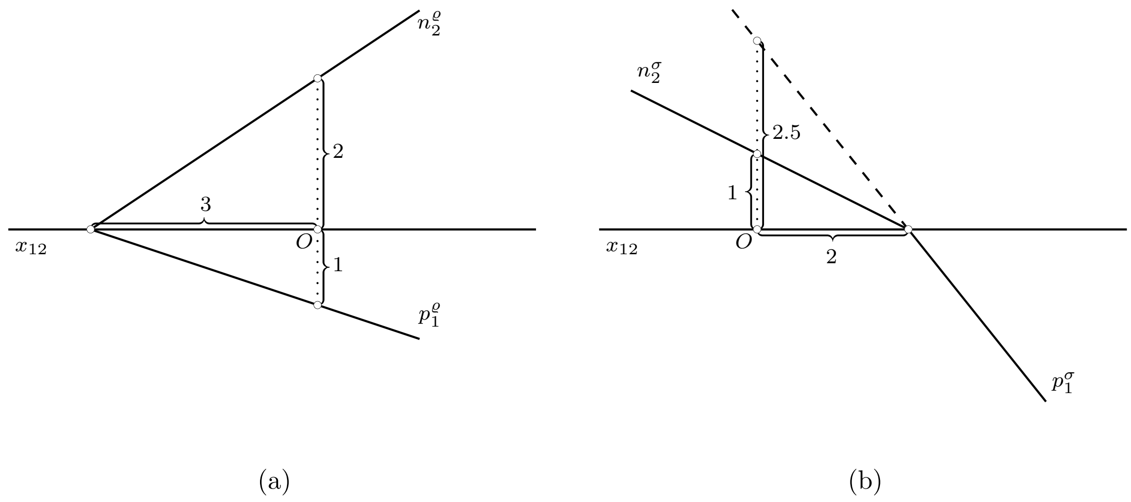
Příklad 5.3. Zobrazte stopy rovin $\varrho(3;\ 1;\ 2)$ a $\sigma(-2;\ -2.5;\ 1)$.

Řešení. Podle předchozího tedy vyneseme body [2; 0; 0], [0; 1; 0] a [0; 0; 3], které nám určí stopy roviny ϱ, viz obrázek 5.10. Podobně pro rovinu σ. Zobrazujeme pouze „viditelné části“ stop (pokud to konstrukce nevyžaduje jinak). □

Poznámka 5.4. Další možností zadání roviny v souřadnicích je pomocí trojice $(x;\ \varphi;\ \psi)$, kde x je zkrácený zápis pro bod X na ose x, φ je velikost úhlu, který svírá „viditelná“ část půdorysné stopy s kladným směrem osy x a ψ je úhel, který svírá „viditelná“ část nárysné stopy s kladným směrem osy x.

Roviny kolmé k některé z průměten jsou vlastně promítací roviny, tedy např. rovina kolmá k půdorysně se v prvním průmětu celá promítá do své půdorysné stopy. Protíná-li taková rovina nárysnu, pak je její nárysná stopa kolmá k půdorysně.

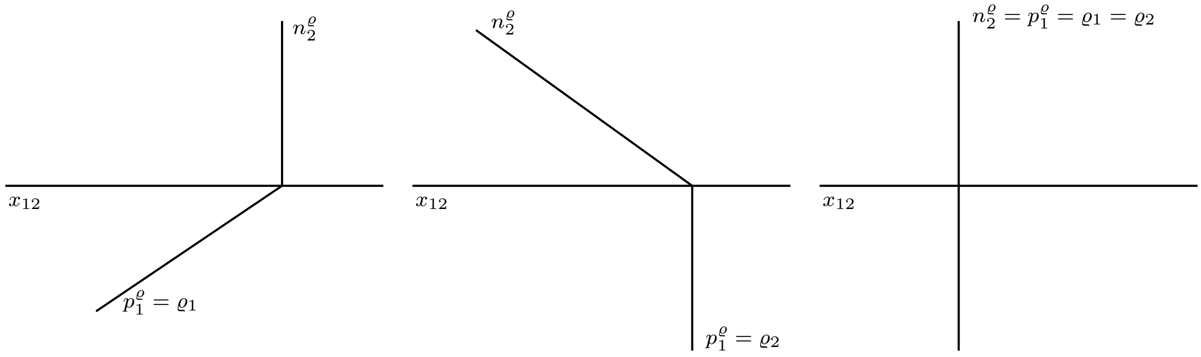
Pokud je rovina rovnoběžná s některou osou, nevytíná na ní žádný úsek. V takovém případě nahradíme odpovídající úsek symbolem ∞. Například rovina kolmá k půdorysně,



Obrázek 5.10: Řešení příkladu 5.3

která není rovnoběžná s nárysnou, je určena trojicí (x; y; ∞). Speciální polohy rovin viz obrázky 5.11 a 5.11.

Nejvíce problematická je rovina, která prochází osou x, ta totiž není jednoznačně určena svými stopami (všechny průměty stop splývají s osou x) a musíme ji tedy dourčit. Její polohu tak upřesníme například pomocí bodu, který v ní leží.



(a) Rovina $\varrho(x;\, y;\, \infty)$ kolmá k půdorysně

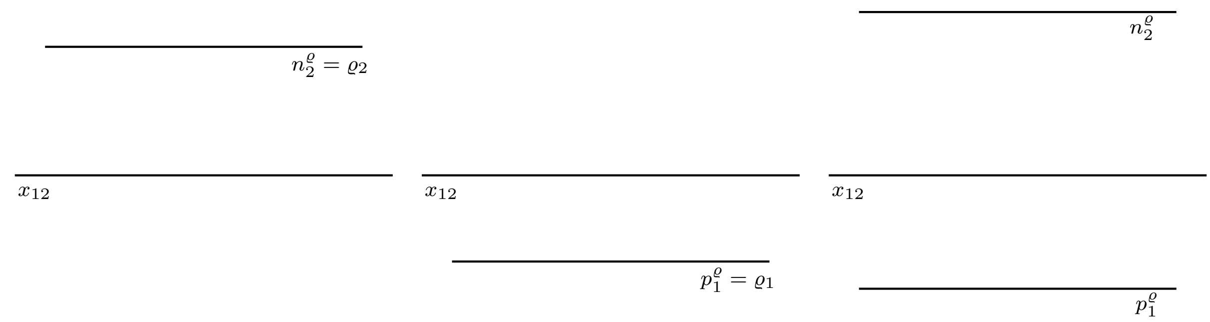
(b) Rovina $\varrho(x;\, \infty;\, z)$ kolmá k nárysně

(c) Rovina $\varrho(x;\, \infty;\, \infty)$ kolmá k ose x

Obrázek 5.11: Speciální polohy rovin

Poznámka 5.5. Přímky ležící v rovině mají své stopníky (pokud existují) na stopách dané roviny, tj. půdorysný stopník na půdorysné stopě a nárysný stopník na nárysné stopě. Tohoto faktu můžeme využít pro nalezení stop roviny, která je zadána dvojicí přímek, případně trojicí bodů (dvojicemi bodů vedeme přímky a máme tak předchozí případ).

Příklad 5.6. Zobrazte stopy roviny ϱ dané různoběžkami a a b.



(a) Rovina $\varrho(\infty;\ \infty;\ z)$ rovnoběžná s půdorysnou (b) Rovina $\varrho(\infty;\ y;\ \infty)$ rovnoběžná s nárysnou (c) Rovina $\varrho(\infty;\ y;\ z)$ rovnoběžná s osou x

Obrázek 5.12: Speciální polohy rovin

Řešení. Půdorysné (nárysné) stopníky určují půdorysnou (nárysnou) stopu roviny. Naším úkolem je tedy najít stopníky daných přímek. Nalezneme-li půdorysné stopníky, určíme tím půdorysnou stopu, a pro nárysnou stopu stačí najít jen jeden nárysný stopník, jelikož stopy se protínají na ose x_{12}, řešení viz obrázek 5.13a. □

Příklad 5.7. Určete chybějící průmět bodu A tak, aby bod A ležel v rovině ϱ dané stopami.

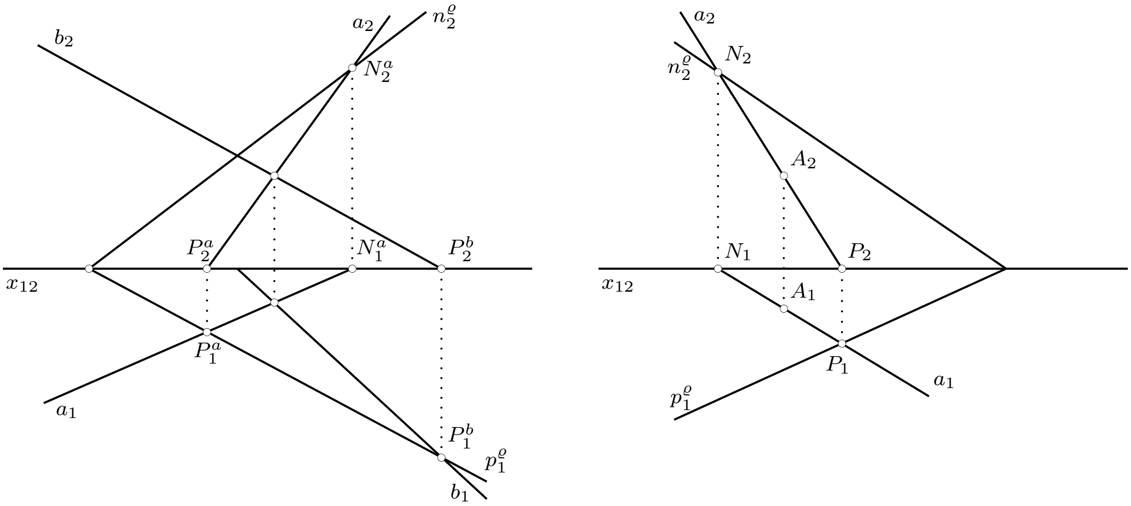
Řešení. Má-li bod ležet v rovině, stačí pro jeho určení jen jeden průmět (odpovídající znalosti dvou souřadnic). Druhý průmět (třetí souřadnice) je nahrazen podmínkou, že bod leží v dané rovině. Tato podmínka také znamená, že bod leží na nějaké přímce roviny. Proto bodem A zvolíme libovolnou přímku, viz obrázek 5.13, tak, aby ležela v dané rovně, tj. bodem A_1 vedeme libovolnou přímku a_1 a pomocí stopníků odvodíme její nárys a_2. Na tomto nárysu na ordinále jdoucí bodem A_1 leží bod A_2. □

Poznámka 5.8. Pokud bychom v předchozím příkladu neměli rovinou zadánu stopami, ale například dvojicí různoběžek q a r, byla by základní myšlenka řešení stejná, jen bychom nárys zvolené přímky nehledali pomocí stopníků, ale pomocí průsečíků s přímkami q a r.

Hlavní a spádové přímky roviny

Hlavní přímkou roviny rozumíme přímku, která v dané rovině leží a je rovnoběžná s některou z průměten. Takové přímky jsou zároveň rovnoběžné i s některou stopou roviny.

Hlavní přímku rovnoběžnou s půdorysnou nazýváme *horizontální* hlavní přímka a nebo také *hlavní přímka první osnovy* a značíme h. Pro obrazy horizontálních hlavních přímek roviny ϱ platí, že $h_1 \parallel p_1^\varrho$ a $h_2 \parallel x_{12}$. Hlavní přímku rovnoběžnou s nárysnou nazýváme *frontální* hlavní přímka a nebo také *hlavní přímka druhé osnovy* a značíme f. Pro obrazy frontálních hlavních přímek roviny ϱ platí, že $f_2 \parallel n_2^\varrho$ a $f_1 \parallel x_{12}$.

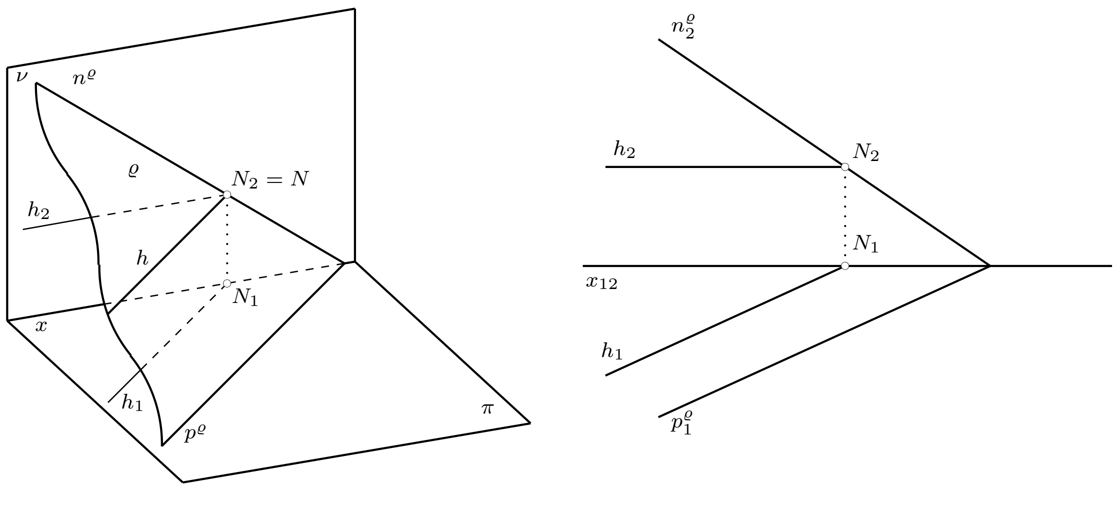


(a) (b)

Obrázek 5.13: Řešení příkladů 5.6 a 5.7

Půdorysná stopa je tedy vlastně také horizontální hlavní přímka a nárysná stopa je frontální hlavní přímka. Jelikož je hlavní přímka rovnoběžná vždy s některou průmětnou, zobrazuje se úsečka na hlavní přímce v takovémto průmětu ve skutečné velikosti.

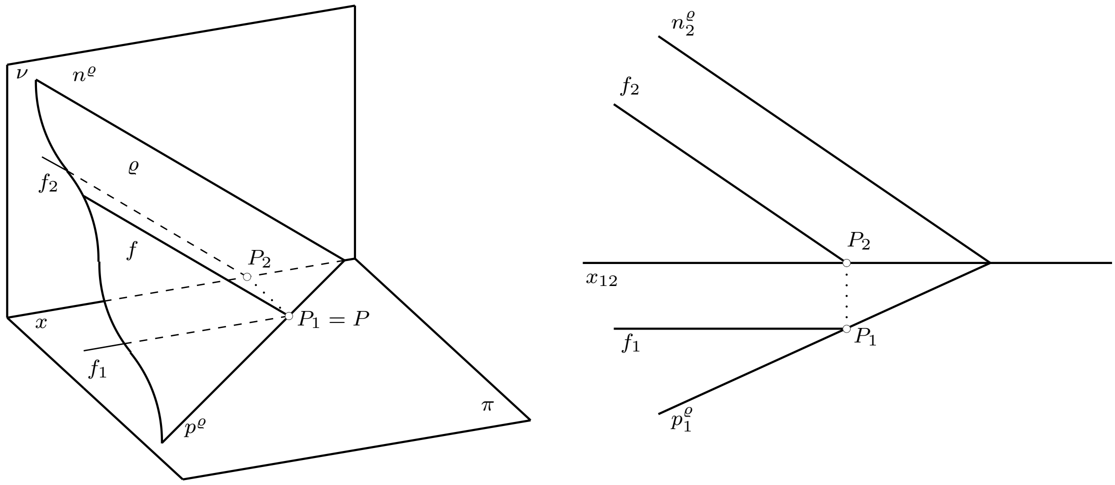
Hlavní přímky používáme k určení chybějících průmětů v rovině, v některých konstrukcích nahrazují stopy roviny. Ukážeme také jejich využití při hledání průsečnice dvou rovin nebo při zobrazení kružnice.



(a) (b)

Obrázek 5.14: Horizontální hlavní přímka

Spádová přímka je přímka ležící v rovině a přitom kolmá k její stopě. Rozlišujeme tak *spádové přímky první osnovy*, které jsou kolmé k půdorysné stopě (značíme je ${}^1s$), a *spádové přímky druhé osnovy*, které jsou kolmé k nárysné stopě (značíme je ${}^2s$).

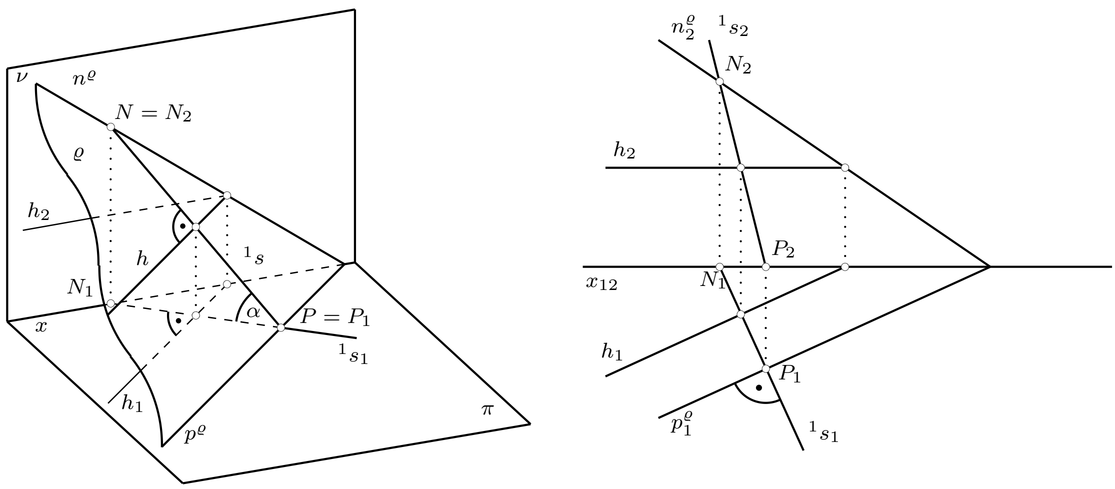


(a) (b)

Obrázek 5.15: Frontální hlavní přímka

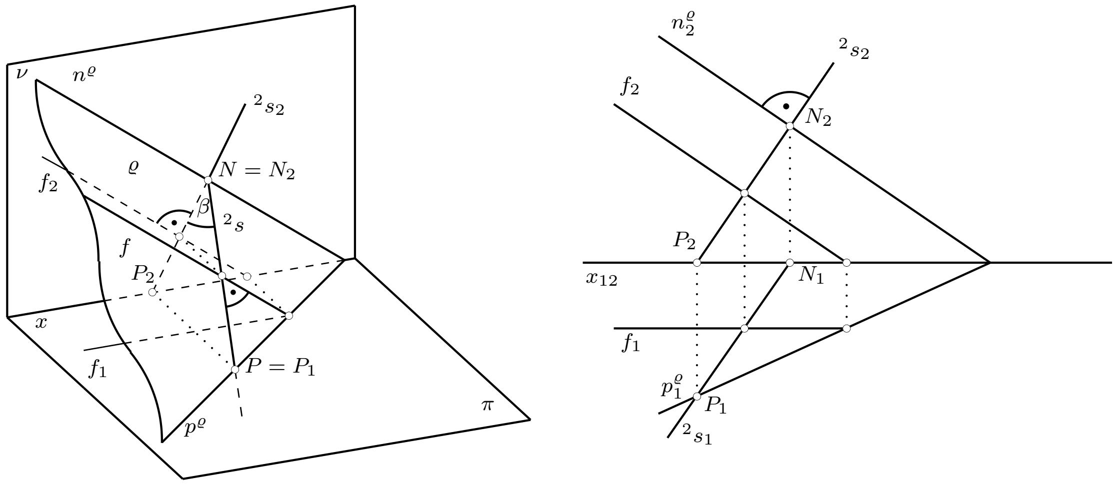
Pro průměty spádových přímek roviny ϱ (v důsledku věty o průmětu pravého úhlu) platí ${}^1s_1 \perp p_1^\varrho$ a ${}^2s_2 \perp n_2^\varrho$. Zbývající průměty můžeme odvodit pomocí stopníků, případně dalšího bodu, který leží na dané přímce.

Spádové přímky první (druhé) osnovy mají ze všech přímek roviny největší odchylku od půdorysny (nárysny). Zároveň je spádová přímka první (druhé) osnovy kolmá k půdorysné (nárysné) stopě roviny, proto pro změření odchylky roviny od průmětny měříme odchylku příslušné spádové přímky od průmětny.



(a) (b)

Obrázek 5.16: Spádová přímka první osnovy



(a) (b)

Obrázek 5.17: Spádová přímka druhé osnovy

5.2.5 Vzájemná poloha dvou rovin

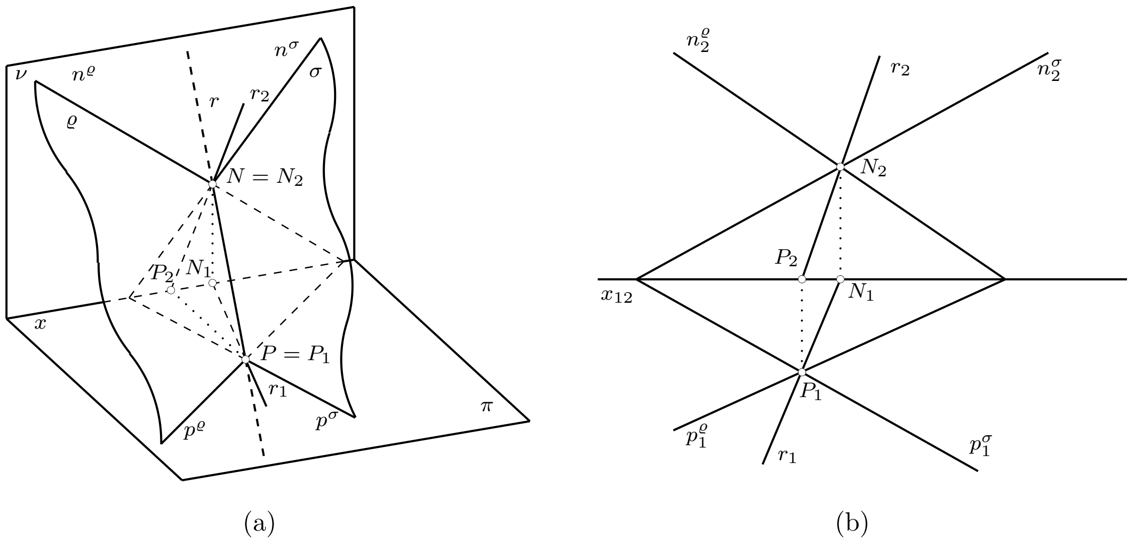
Jak již víme, mohou být dvě různé roviny v prostoru buď rovnoběžné nebo různoběžné. V případě, kdy jsou různoběžné, mají společnou právě jednu přímku bodů, tzv. *průsečnici.*

Pokud máme stopy (případně hlavní přímky) daných rovin, tak je v Mongeově promítání velmi jednoduché určit vzájemnou polohu dvou rovin. Dvě roviny (které nejsou promítací) jsou *rovnoběžné* právě tehdy, když mají rovnoběžné odpovídající si stopy, tj. mají-li rovnoběžné hlavní přímky téže osnovy. Je-li jedna z rovin promítací, je i druhá rovina promítací.

Tohoto faktu můžeme použít i tehdy, když chceme například určit rovinu rovnoběžnou s danou rovinou a procházející daným bodem. V takovém případě hledanou rovinu určím právě pomocí hlavních přímek.

Když jsou dvě roviny *různoběžné*, chceme většinou najít jejich společnou přímku – *průsečnici.* Pro určení průsečnice stačí najít dva její různé body. Pokud jsou roviny zadány stopami a jsou-li dostupné průsečíky jejich odpovídajících si stop, pak jsou tyto průsečíky stopníky hledané průsečnice. Obě půdorysné stopy leží v půdorysně a jejich společný bod je tedy společným bodem obou rovin. A jelikož průsečnice je přímka obou rovin a má svůj stopník na stopě roviny, je jím zřejmě právě průsečík půdorysných stop. Podobně se získá nárysný stopník jako průsečík nárysných stop.

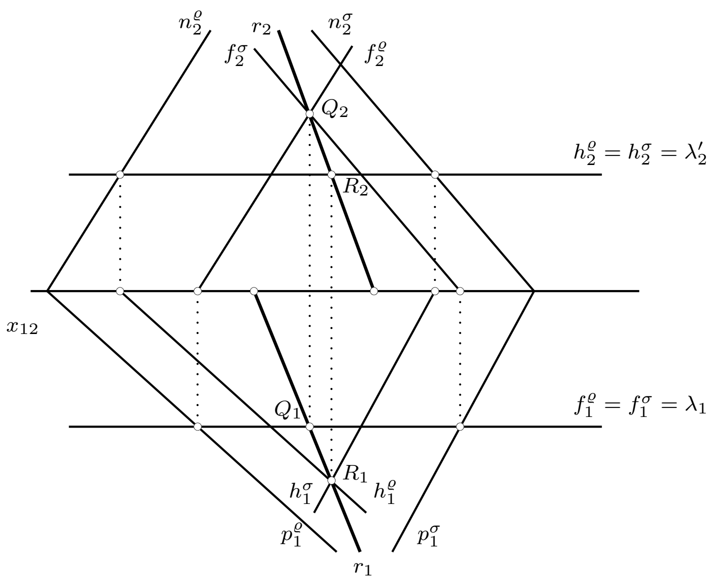
Uvedený postup je speciálním případem obecnější myšlenky, kterou můžeme použít i v případě, kdy stopy nemáme, nebo je jejich průsečík nedostupný. Princip řešení vychází ze vzájemné polohy tří rovin, z nichž každé dvě roviny jsou různoběžné, jejich průsečnice jsou různé a prochází jedním bodem. Roviny, jejich průsečnici chceme určit, protneme vhodně zvolenou třetí rovinou (v předchozím hrála tuto roli přímo průmětna) a určíme průsečnice této pomocné roviny a zadaných rovin. Společný bod těchto průsečnic je bodem hledané průsečnice. Postup pak opakujeme s další pomocnou rovinou. Většinou jako pomocnou rovinu volíme rovinu rovnoběžnou s průmětnou, která zadané roviny protíná v hlavních přímkách (tento postup je tak přímo analogií řešení z kótovaného promítání).



Obrázek 5.18: Průsečnice dvou rovin

Příklad 5.9. Určete průsečnici r rovin ϱ a σ daných stopami.

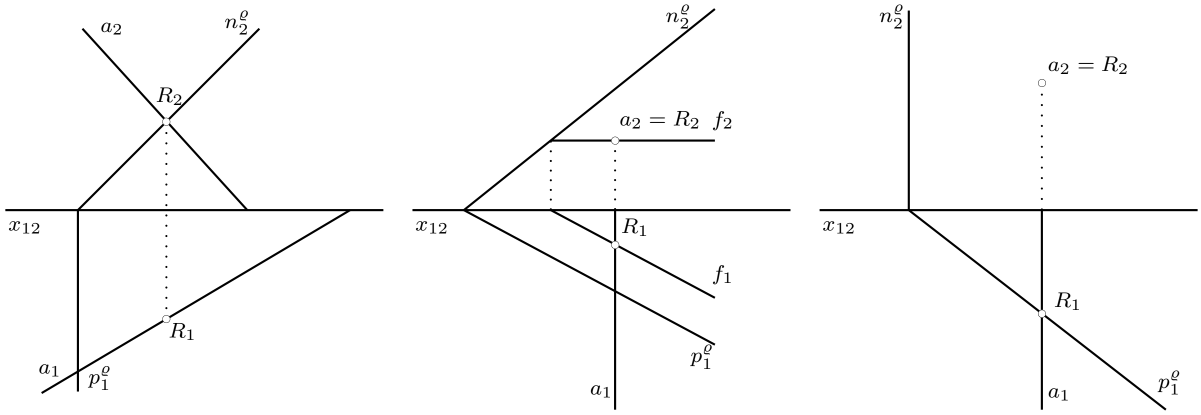
Řešení. Jelikož průsečíky stop nejsou dostupné, použijeme výše popsaný postup. Proložíme zadané roviny rovinou λ kolmou k půdorysně. Tato rovina protíná roviny ϱ a σ ve frontálních hlavních přímkách, jejichž půdorysné průměty splývají, tedy $\lambda_1 = f_1^\varrho = f_1^\sigma$. Pomocí stopníků odvodíme nárysy f_2^ϱ a f_2^σ, které jsou rovnoběžné s příslušnými stopami. Společný bod Q_2 přímek f_2^ϱ a f_2^σ je druhý průmět bodu na hledané průsečnici. Jeho první průmět najdeme na ordinále na přímce $f_1^\varrho = f_1^\sigma$. Podobně, například s rovinou λ' kolmou k nárysně, získáme druhý bod R hledané průsečnice r. □



Obrázek 5.19: Řešení příkladu 5.9

5.2.6 Vzájemná poloha přímky a roviny

Rovina a přímka která v ní neleží mají dvě možné vzájemné polohy. Buď je přímka s rovinou *rovnoběžná* a nebo *různoběžná*. Pokud je přímka s rovinou různoběžná, hledáme jejich společný bod, *průsečík*. Pokud je přímka nebo rovina promítací, je tato úloha snadná, řešení viz obrázek 5.20.



(a) Promítací rovina a obecná přímka

(b) Obecná rovina a promítací přímka

(c) Promítací přímka a promítací rovina

Obrázek 5.20: Průsečík přímky s rovinou – speciální polohy

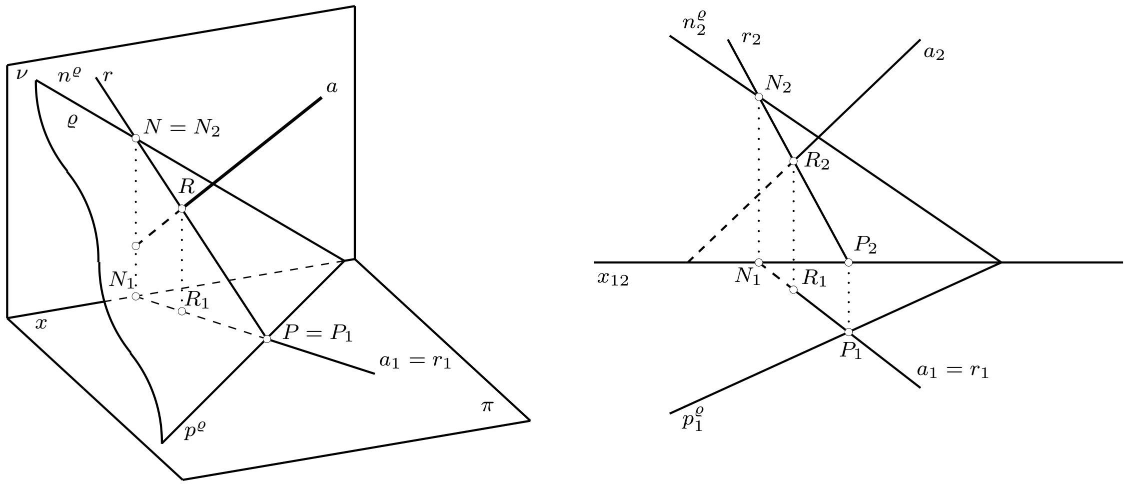
Nejsou-li ani přímka, ani rovina promítací, požijeme analogický postup jako v kótovaném promítání, tzv. *metodu krycí přímky.*

Uvažujme přímku a a rovinu ϱ, které nejsou promítací, a hledejme jejich společný bod, viz obrázek 5.21. Proložíme-li přímkou a první promítací rovinu (kolmá k půdorysně), leží v této rovině i přímka r, která patří rovině ϱ a platí $r_1 = a_1$. Společný bod přímek a a r je hledaný průsečík R. Pomocí stopníků určíme druhý průmět r_2 přímky r a společný bod přímek a_2 a r_2 je druhý průmět R_2 hledaného bodu. První průmět R_1 najdeme na ordinále na přímce $a_1 = r_1$.

Přímka r se nazývá první *krycí přímka* a je vlastně průsečnicí pomocné promítací roviny a roviny ϱ. Analogicky bychom mohli celý postup provést i s druhou promítací rovinou.

Příklad 5.10. Zobrazte průnik trojúhelníků ABC a EFG.

Řešení. Pro určení průniku zadaných trojúhelníku sestrojíme průsečnici rovin, které jsou těmito trojúhelníky určeny. K sestrojení jejich průsečnice potřebujeme alespoň dva společné body těchto rovin. Tyto body získáme například jako průsečíky přímek AB a AC s rovinou EFG. Zvolme krycí přímku r, která leží v rovině EFG a její nárys r_2 splývá s přímkou A_2B_2 (mohli bychom zvolit i takovou přímku r, že její půdorys by splýval s A_1B_1). Jelikož přímka leží v rovině EFG jsou její průsečíky s přímkami E_2G_2 a F_2G_2 opravdu nárysy společných bodů těchto přímek. Průsečíky označíme 1_2 a 2_2 a jejich první průměty najdeme na ordinálách a na odpovídajících přímkách v půdorysně. Získáme tak přímku r_1. Její průsečík R_1 s přímkou A_1B_1 je půdorys hledaného průsečíku přímky AB s rovinou



Obrázek 5.21: Průsečík přímky s rovinou

EFG. Podobně získáme bod R_1', tj. průsečík přímky AC s rovinou EFG (pomocí bodů 3 a 4).

Body R_1 a R_1' je určen půdorys průsečnice rovin zadaných trojúhelníků. Část této průsečnice mezi body X_1 a Y_1 je společná oběma trojúhelníkům a je tak půdorysem hledaného průniku. Nárys získáme určením nárysů bodů X_2 a Y_2, které leží na ordinálách a na patřičných přímkách.

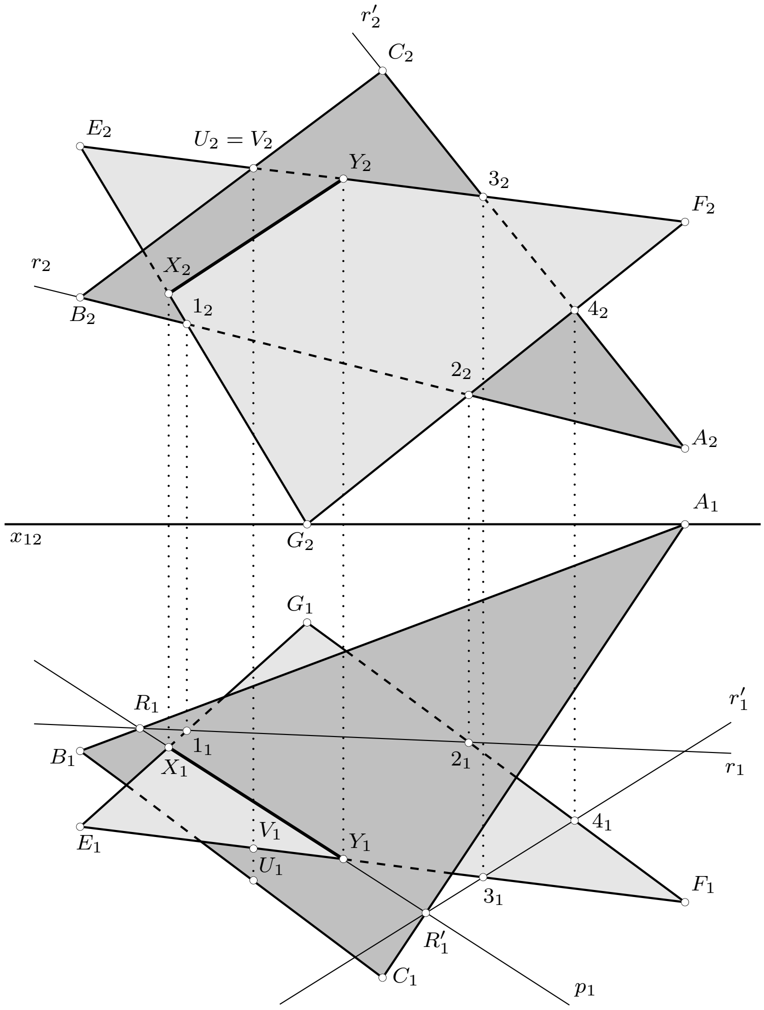
Pro určení viditelnosti, tj. pro určení toho, které části trojúhelníku jsou v některém průmětu zakryté druhým trojúhelníkem, použijeme tzv. *krycích bodů*. Například pro určení viditelnosti v nárysu použijeme bodu $U_2 = V_2$, který je zdánlivým průsečíkem přímek B_2C_2 a E_2F_2. Odvedeme-li tento bod na ordinále na odpovídající přímky, vidíme, že bod U_1 na přímce B_1C_1 je níž než bod V_1 na přímce E_1F_1, tj. bod U je ve větší vzdálenosti před nárysnou a zakrývá tak bod V, je tedy viditelná úsečka B_2C_2. Díky této informaci můžeme logicky určit viditelnost celého obrázku v nárysu. Podobně bychom určili i viditelnost v půdorysu pomocí nějakého zdánlivého průsečíku v půdorysně. □

5.2.7 Kolmice k rovině, rovina kolmá k přímce a jejich použití

Ze všech přímek, které jsou s danou rovinou různoběžné, hrají největší roli přímky, které jsou k dané rovině kolmé. Kolmosti totiž využíváme v metrických úlohách. Nejjednodušší aplikací je pak určení vzdálenosti bodu od roviny.

Již z dřívějška víme, že přímka kolmá k rovině je kolmá ke všem přímkám roviny. Použijeme-li navíc větu o průmětu pravého úhlu, dostaneme tak následující vlastnost: *Půdorys přímky kolmé k rovině je kolmý na půdorysnou stopu této roviny, nárys přímky kolmé k rovině je kolmý na nárysnou stopu této roviny.*

Příklad 5.11. Zobrazte kolmici k vedenou bodem A k rovině ϱ, která je dána stopami.



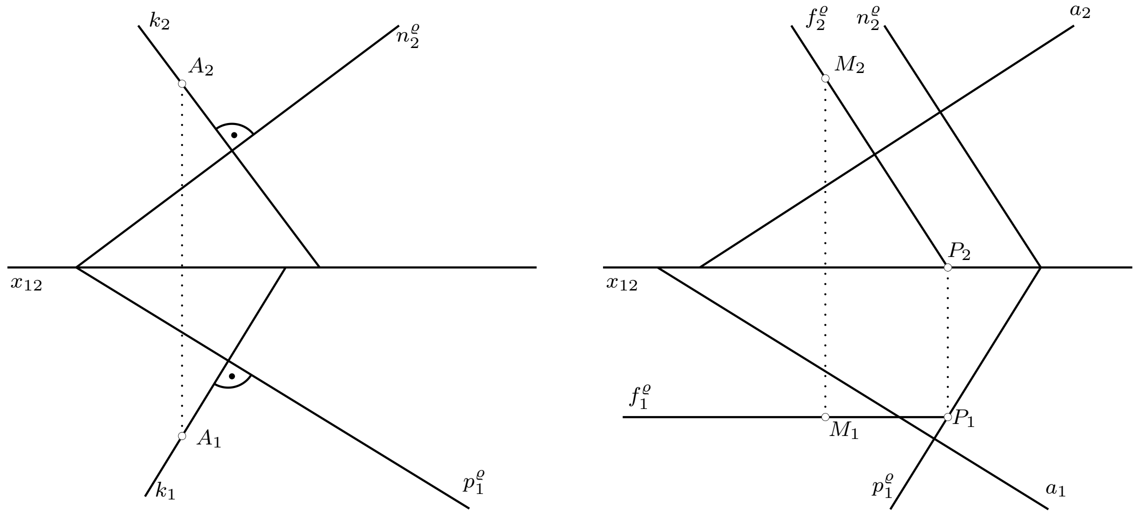
Obrázek 5.22: Průnik dvou trojúhelníků

Řešení. Bodem A_1 vedeme půdorys kolmice $k_1 \perp p_1^\varrho$ a bodem A_2 její nárys $k_2 \perp n_2^\varrho$, viz obrázek 5.23a. □

Poznámka 5.12. K zobrazení kolmice nepotřebujeme nutně stopy dané roviny, stačí nám její hlavní přímky, jelikož i k těm jsou odpovídající průměty kolmice kolmé. Tohoto faktu se při konstrukcích často využívá.

Příklad 5.13. Zobrazte stopy roviny ϱ, která prochází daným bodem M a je kolmá k přímce a.

Řešení. K nalezení hledaných stop použijeme frontální hlavní přímku (analogicky bychom mohli použít i horizontální hlavní přímku), viz obrázek 5.23b. Jelikož hledáme stopy roviny ϱ, která je kolmá k dané přímce a, je zřejmě i přímka a kolmá k rovině ϱ a platí, že $f_1^\varrho \perp a_1$ a $f_2^\varrho \perp a_2$. Navíc musí platit $M_1 \in f_1^\varrho$ a $M_2 \in f_2^\varrho$. Najdeme průměty P_1, P_2 půdorysného stopníku přímky f^ϱ. Půdorysná stopa $p_1^\varrho \perp a_1$ a prochází bodem P_1. Nárysná stopa $n_2^\varrho \perp a_2$ a protíná se s půdorysnou stopu na ose x_{12}. □



(a) Přímka kolmá k rovině (b) Rovina kolmá k přímce

Obrázek 5.23: Kolmost přímek a rovin

Nejjednodušší úlohou na užití kolmosti je určení *vzdálenosti bodu od roviny.*

Konstrukce 5.14. Určete vzdálenost bodu M od roviny ϱ dané stopami.

Řešení. Vzdálenost bodu M od roviny ϱ bude rovna velikosti úsečky MR, kde R je průsečík kolmice z bodu M na rovinu ϱ s touto rovinou.

Bodem M vedeme přímku k kolmou k rovině ϱ, $M_1 \in k_1 \perp p_1^\varrho$, $M_2 \in k_2 \perp n_2^\varrho$, viz obrázek 5.24a. Pomocí krycí přímky l najdeme průsečík R přímky k s rovinou ϱ. Zvolme například $l_1 = k_1$ a pomocí stopníků P a N odvodíme její druhý průmět l_2. Bod $R_2 \in l_2 \cap k_2$, první průmět R_1 leží na ordinále na přímce k_1. Skutečnou velikost úsečky MR zjistíme například pomocí sklopení do půdorysny. □

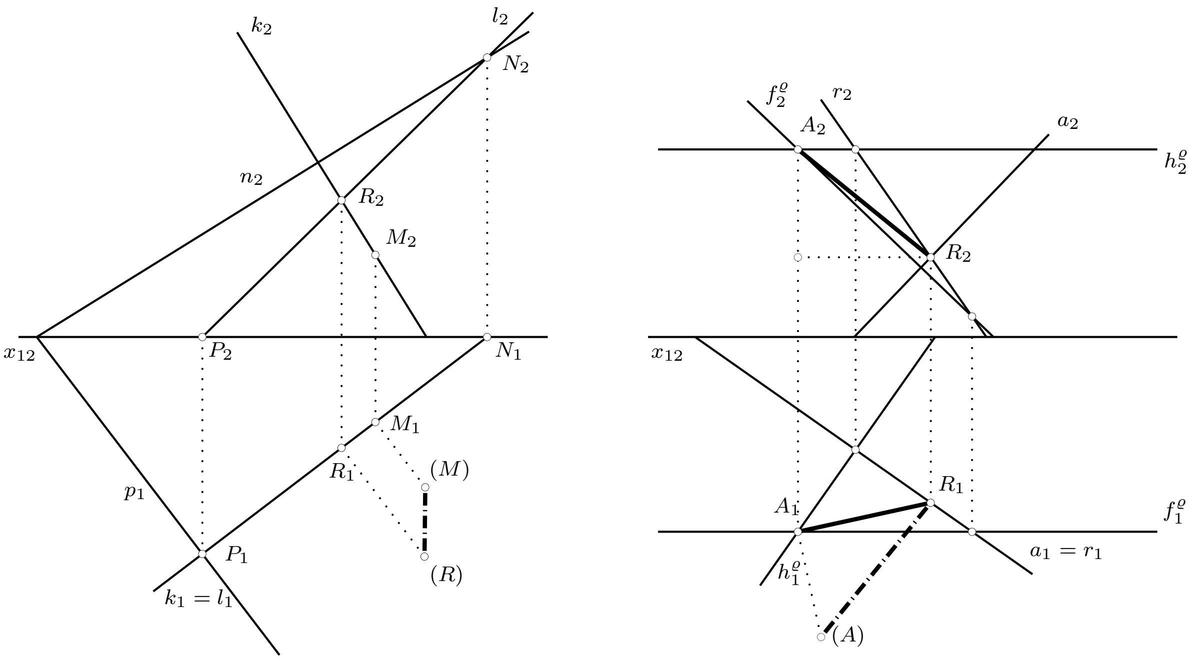
Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, případně *vzdálenost roviny a přímky*, která je s ní rovnoběžná, je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé, případně vzdálenost libovolného bodu přímky od roviny. Obě tyto úlohy se tak dají převést na úlohu určení vzdálenosti bodu od roviny.

Úlohu určení *vzdálenosti bodu od přímky* vyřešíme pomocí použití roviny kolmé k přímce.

Konstrukce 5.15. Určete vzdálenost bodu A od přímky a.

Řešení. Vzdálenost bodu A od přímky a bude rovna velikosti úsečky AR, kde bod R je průsečík přímky a a roviny ϱ k ní kolmé, která prochází bodem A.

Rovinu ϱ určíme pomocí dvojice hlavních přímek h a f, přičemž $A_1 \in h_1 \perp a_1$ a $A_2 \in f_2 \perp a_2$, viz obrázek 5.24b. Průsečík R přímky a a roviny ϱ určíme pomocí krycí přímky r. Zvolme například $a_1 = r1$, druhý průmět r_2 nalezneme pomocí průsečíků s hlavními přímkami. Pak $R_2 \in a_2 \cap r_2$ a bod R_1 leží na ordinále. Pomocí sklopení úsečky AR do půdorysny (pro jednoduchost sklápíme jen rozdílový trojúhelník) určíme hledanou vzdálenost. □



(a) (b)

Obrázek 5.24: Určení vzdáleností

Na úlohu určení vzdálenosti bodu od přímky můžeme převést i úlohu určení *vzdálenosti dvou rovnoběžek*. Ta je totiž rovnu vzdálenosti libovolného bodu jedné rovnoběžky od druhé. Nejobtížnější je určení *vzdálenosti dvou mimoběžek*. Tuto úlohu převedeme na určení vzdálenosti bodu od roviny tím, že jednou mimoběžkou vedeme rovinu rovnoběžnou s druhou mimoběžkou.

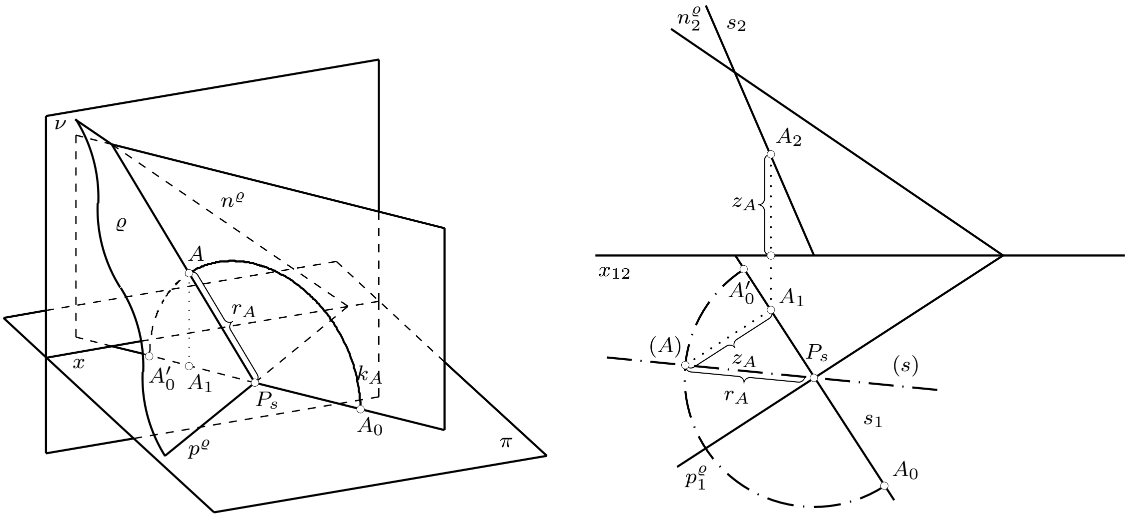
5.3 Otáčení roviny

Běžně se můžeme setkat s úlohami na sestrojení a zobrazení rovinného útvaru, který leží v dané rovině, případně na zjištění skutečné velikosti útvaru, který je v dané rovině zobrazen.

Leží-li takový útvar v nějaké hlavní rovině, pak se do průmětny, která je s touto rovinou rovnoběžná, promítá ve skutečné velikosti. Jestliže útvar leží v rovině, která je kolmá k některé z průměten, pak můžeme tyto úlohy řešit sklopením. Leží-li však útvar v obecné rovině, musíme tuto úlohu, podobně jako v kótovaném promítání, řešit pomocí *otočení roviny* do některé z průměten.

Stejně jako v kótovaném promítání otočíme rovinu kolem stopy do průmětny tak, že určíme poloměr otáčení jednoho vhodného bodu roviny. Ostatní body a přímky otočíme užitím osové afinity. Ukažme si tedy, jak určíme poloměr otáčení konkrétního bodu a příslušný otočený bod. Situace je znázorněna na obrázku 5.25, kde otáčíme do půdorysny. Analogicky bychom mohli otáčet i do nárysny.

Příklad 5.16. Určete otočený obraz bodu A, který leží v obecné rovině ϱ.



(a) (b)

Obrázek 5.25: Otáčení roviny

Řešení. Každý bod A roviny ϱ, který neleží na její půdorysné stopě, se otáčí po tzv. kružnici otáčení k^A, která leží v rovině kolmé na půdorysnou stopu. Středem této kružnice je stopník P_s spádové přímky roviny ϱ, která prochází bodem A. Její poloměr je skutečná velikost úsečky P_sA a nazývá se *poloměr otáčení*. Průsečíky kružnice k^A s průmětnou jsou otočené body A_0, resp. A'_0.

V průmětně postupujeme následovně. Bodem A_1 vedeme spádovou přímku s_1. V této přímce má svůj obraz rovina otáčení. Tuto rovinu sklopíme, získáme tak sklopenou spádovou přímku a sklopenou kružnici otáčení. Její poloměr je velikost úsečky $P_s(A)$ a její střed je bod P_s. Průsečíky sklopené kružnice a přímky s_1 jsou otočené body A_0, resp. A'_1. □

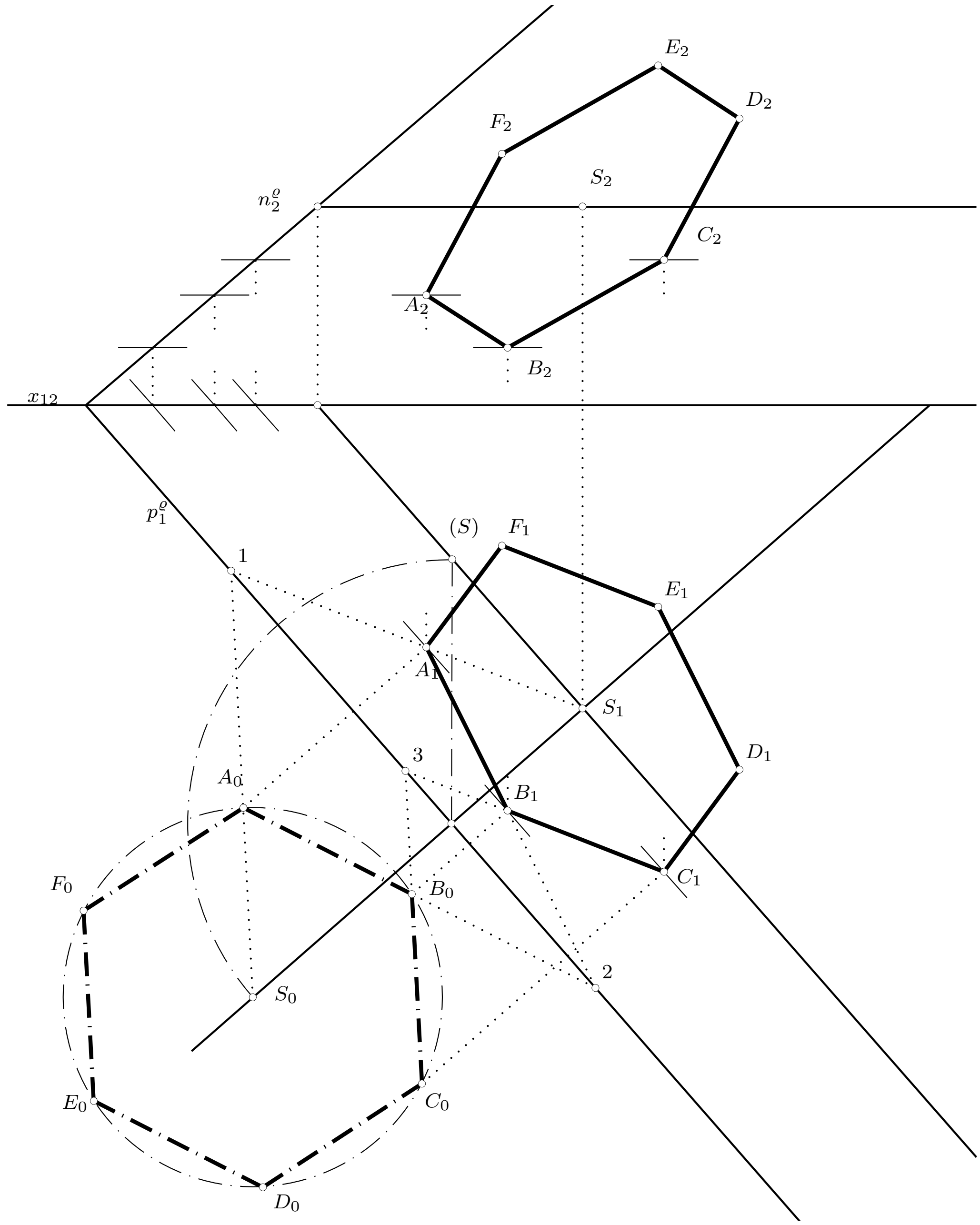
Poznamenejme, že nemusíme otáčet jen kolem stopy do průmětny, ale můžeme otáčet i kolem hlavní přímky do roviny, která je s průmětnou rovnoběžná. Jediný rozdíl je v tom, že poloměr otáčení je vzdálenost bodu v rovině od zvolené hlavní přímky.

Příklad 5.17. Zobrazte pravidelný šestiúhelník se středem S a vrcholem A (body jsou zadány jejich prvním průmětem), který leží v rovině ϱ (dána stopami).

Řešení. Abychom mohli šestiúhelník sestrojit, otočíme rovinu do půdorysny, kde bude daný šestiúhelník ve skutečné velikosti a půjde tedy o planimetrickou konstrukci.

Rovinu otočíme pomocí bodu S. Nejdříve použitím hlavní přímky určíme druhý průmět bodu S. Pro určení poloměru kružnice otáčení bodu S, tento bod sklopíme. Střed kružnice otáčení je na stopníku spádové přímky, která bodem S prochází a její poloměr je roven vzdálenosti sklopeného bodu S od tohoto stopníku. Bod S_0 je pak průsečíkem této spádové přímky a sklopené kružnice otáčení.

Bod A_0 získáme pomocí afinity. Za prvé víme, že bod A_0 leží na kolmici ke stopě procházející bodem A_1. Za druhé platí, že přímka A_1S_1 protíná stopu roviny v bodě 1, kde ji protíná i přímka A_0S_0. Bod A_0 tedy určíme jako průsečík dané kolmice a přímky S_01.



Obrázek 5.26: Konstrukce šestiúhelníku v obecné rovině

Jelikož známe body S_0 a A_0, tj. střed a vrchol šestiúhelníku, můžeme daný šestiúhelník sestrojit.

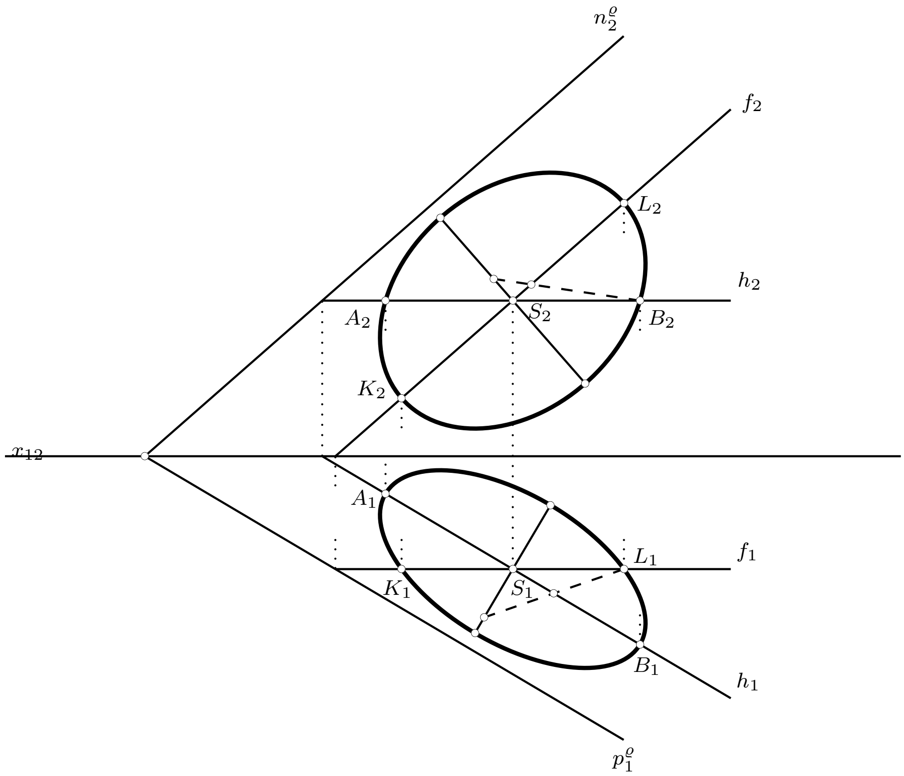
Jeho obraz v rovině ϱ získáme opět pomocí afinity. Například bod B_1 leží v průsečíku přímky kolmé na půdorysnou stopu a procházející bodem B_1 a přímky $A_1 2$, kde bod 2 je průsečík přímky A_0B_0 s půdorysnou stopou. Podobně získáme i bod C. Zbylé vrcholy šestiúhelníku získáme s využitím souměrnosti šestiúhelníku podle svého středu.

Obrazy bodů A_2, B_2 a C_2 odvodíme do nárysu pomocí hlavních přímek podobně jako v případě bodu S. Zbylé vrcholy šestiúhelníku v nárysu získáme opět pomocí středové souměrnosti. $\square$

5.4 Zobrazení kružnice

Pravoúhlým průmětem kružnice, která leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, je shodná kružnice, přičemž její střed je průmětem středu dané kružnice. Leží-li kružnice v rovině kolmé k průmětné, je jejím průmětem úsečka, která leží na průmětu roviny, její střed je průmětem středu dané kružnice a délka je rovna jejímu průměru.

Pravoúhlým průmětem kružnice o poloměru r, která leží v obecné rovině, je elipsa. Platí, že střed kružnice se promítá do středu elipsy. Navíc víme, že na hlavních přímkách vidíme vzdálenosti ve skutečné velikosti a všechny ostatní přímky se zkracují, proto platí, že hlavní osa elipsy leží na hlavní přímce procházející středem a $a = r$. Najdeme-li tedy jeden další bod elipsy, můžeme proužkovou konstrukcí sestrojit i velikost vedlejší poloosy elipsy a danou elipsu vyrýsovat.



Obrázek 5.27: Zobrazení kružnice

Příklad 5.18. Zobrazte kružnici k, která leží v rovině ϱ, má střed S a poloměr r.

Řešení. Daná rovina není rovnoběžná ani kolmá k žádné z průměten. Oba průměty kružnice budou tedy elipsy. Bodem S vedeme hlavní přímku první osnovy h. Na přímku h_1 naneseme od bodu S_1 vzdálenost r, čímž dostaneme body A_1 a B_1, jež jsou hlavní vrcholy elipsy, která je půdorysným průmětem dané kružnice. Do nárysu odvedeme body A_1, B_1 po ordinálách a na přímce h_2 tak získáme body A_2 a B_2, které jsou obecné body elipsy, jež je nárysným průmětem dané kružnice. Podobně na hlavní přímce f, která prochází bodem S, dostaneme hlavní vrcholy K_2 a L_2 elipsy, která je nárysným průmětem kružnice a obecné body K_1, L_1 na elipse v půdorysně.

Pro obě elipsy máme jejich hlavní osu a dva obecné body. Na kolmicích k hlavním osám procházejících středem leží vedlejší poloosy, které omezíme proužkovou konstrukcí. Elipsy jsou tak plně určeny a můžeme dříve uvedenými konstrukcemi sestrojit jejich oskulační kružnice a další body. □

5.5 Zobrazení těles, jejich řezy a průniky

Pravoúhlým průmětem konvexního mnohostěnu je konvexní mnohoúhelník. Obvod tohoto mnohoúhelníku je uzavřená lomená čára, která se nazývá *zdánlivý obrys*. Každý bod, který leží na zdánlivém obrysu, je buď průmětem jediného bodu, v němž promítací přímka protíná některou hranu mnohostěnu, nebo úsečky, kterou má promítací přímka společnou s některou stěnou mnohostěnu. Každý vnitřní bod průmětu mnohostěnu je průmětem dvou bodů na mnohostěnu, ve kterých promítací přímka protíná stěny tohoto mnohostěnu.

Jestliže při zobrazování mnohostěnů považujeme tato tělesa za neprůhledná, pak rozlišujeme na jejich povrchu viditelnou a neviditelnou část. Tyto části jsou v prostoru odděleny uzavřenou prostorovou lomenou čarou, která je vytvořena některými hranami mnohostěnu. Tato lomená čára se nazývá *skutečný obrys*. Průmětem skutečného obrysu mnohostěnu je zdánlivý obrys mnohostěnu. Skutečný obrys mnohostěnu patří k jeho viditelné části. S určením viditelnosti nám může pomoci i fakt, že z viditelného vrcholu, který se promítá dovnitř mnohoúhelníku (průmětu mnohostěnu), vycházejí viditelné hrany, z neviditelného vrcholu vycházejí neviditelné hrany.

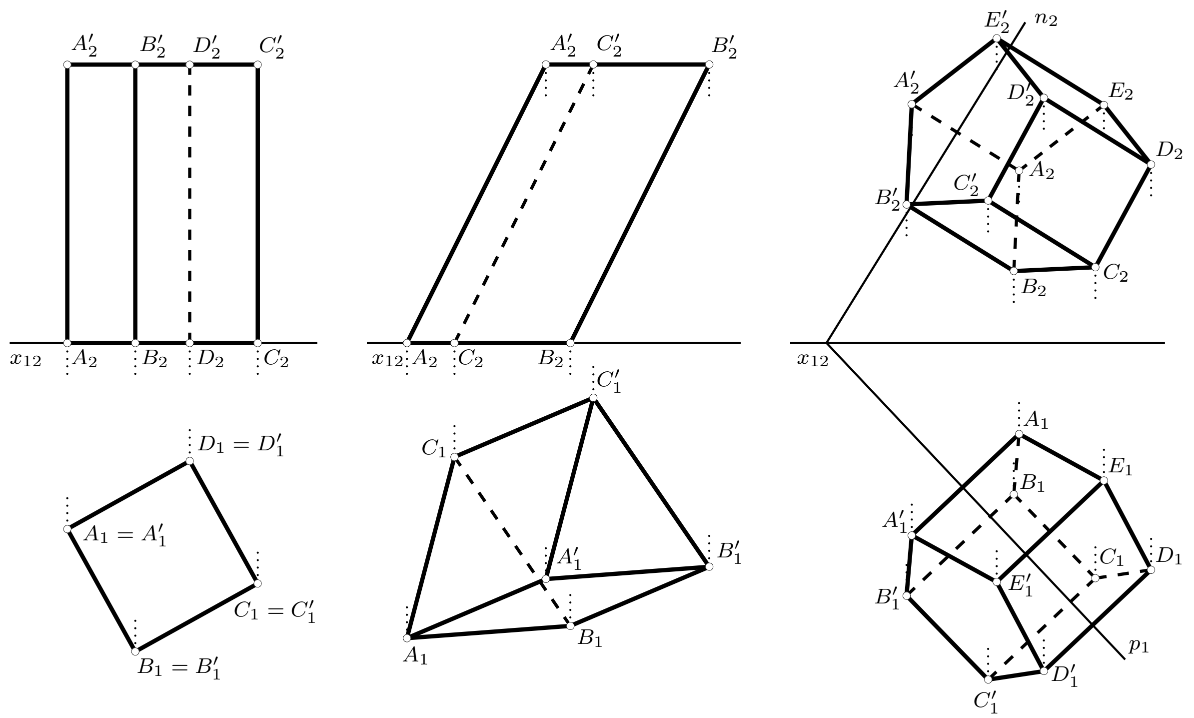
5.5.1 Zobrazení hranolu a jeho řezy rovinou

Připomeňme, že *hranolovou plochou* rozumíme množinu vzájemně rovnoběžných přímek, které protínají obvod daného mnohoúhelníka. Každá takováto přímka procházející obvodem tohoto mnohoúhelníka je *povrchová přímka* (površka) hranolové plochy, přímky procházející vrcholy mnohoúhelníka se nazývají *hrany*, přímky procházející některou stranou tvoří *stěnu* hranolové plochy. *Hranol* je část prostoru omezená hranolovou plochou a dvěma shodnými podstavami ležícími v rovnoběžných rovinách, které nejsou rovnoběžné s hranami hranolové plochy. Strany mnohoúhelníků, které tvoří podstavy hranolu, se nazývají *podstavné hrany*, části hran hranolové plochy mezi oběma podstavami se nazývají *boční hrany* (pobočné hrany). Vzdálenost rovin obou podstav se nazývá *výška hranolu.* *Kolmý hranol* má pobočné hrany kolmé k podstavám, *kosý hranol* má pobočné hrany, které svírají s podstavami kosý úhel.

Zobrazení hranolu má obecně tyto základní konstrukční kroky:

1. Zobrazení jedné podstavy.
2. Zobrazení bočních hran.
3. Zobrazení druhé podstavy.
4. Určení viditelnosti.

Příklady zobrazení různých hranolů viz obrázek 5.28. Při jejich zobrazení používáme jednoduchých konstrukcí z předchozích částí. V nejsložitějším případě hranolu s podstavou



(a) Kolmý pravidelný čtyřboký s podstavou v půdorysně

(b) Nepravidelný kosý trojboký s podstavou v půdorysně

(c) Pravidelný kolmý pětiboký s podstavou v obecné rovině

Obrázek 5.28: Hranoly

v obecné rovině (5.28c) sestrojíme jeho podstavu pomocí otočení její roviny do některé z průměten, boční hrany jsou kolmice k rovině podstavy a jejich délku, tj. výšku hranolu, určíme ze sklopení jedné z nich.

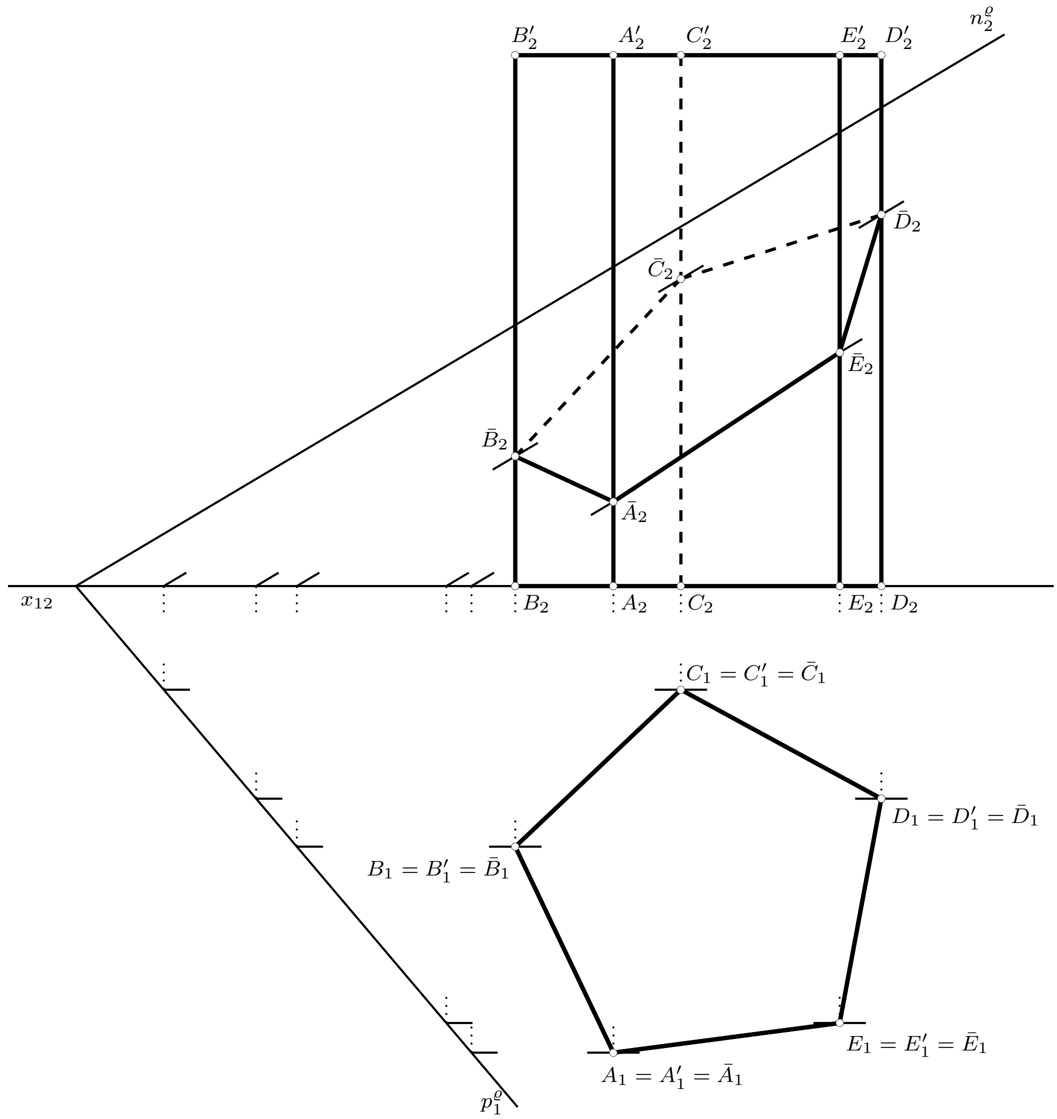
Řez hranolu je mnohoúhelník, jehož vrcholy leží na hranách hranolu a strany na stěnách, případně podstavách, hranolu. Vrcholy řezu lze tedy sestrojit jako průsečíky roviny řezu s přímkami, na kterých leží hrany hranolu. Pro nalezení řezu můžeme v některých případech použít afinitu.

Příklad 5.19. Zobrazte řez pravidelného pětibokého hranolu s podstavou v půdorysně rovinou ϱ v obecné poloze.

Řešení. Půdorysem hranolu je pravidelný pětiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1$. Výšku hranolu vidíme v nárysе ve skutečné velikosti. Jeho nárysem je obdélník $B_2D_2D_2'B_2'$. V nárysu jsou navíc viditelné hrany A_2A_2', E_2E_2'. Rovina má obecnou polohu a neprotíná podstavu hranolu, situace viz obrázek 5.29.

Řezem danou rovinou je pětiúhelník. Jelikož boční hrany hranolu jsou kolmé k půdorysně, je půdorys řezu totožný s půdorysem podstavy. Nárys řezu můžeme odvodit pomocí hlavních přímek roviny ϱ.

Pokud bychom chtěli sestrojit síť seříznuté části hranolu, rozvineme nejdříve jeho plášť, který je tvořen pravoúhlými lichoběžníky. Základny těchto lichoběžníků jsou zbytky bočních hran a jejich velikost odměříme snadno z nárysu. Jedna další strana každého lichoběžníku je hrana podstavy, jejíž rozměry jsou ve skutečné velikosti v půdorysně. Zbylá

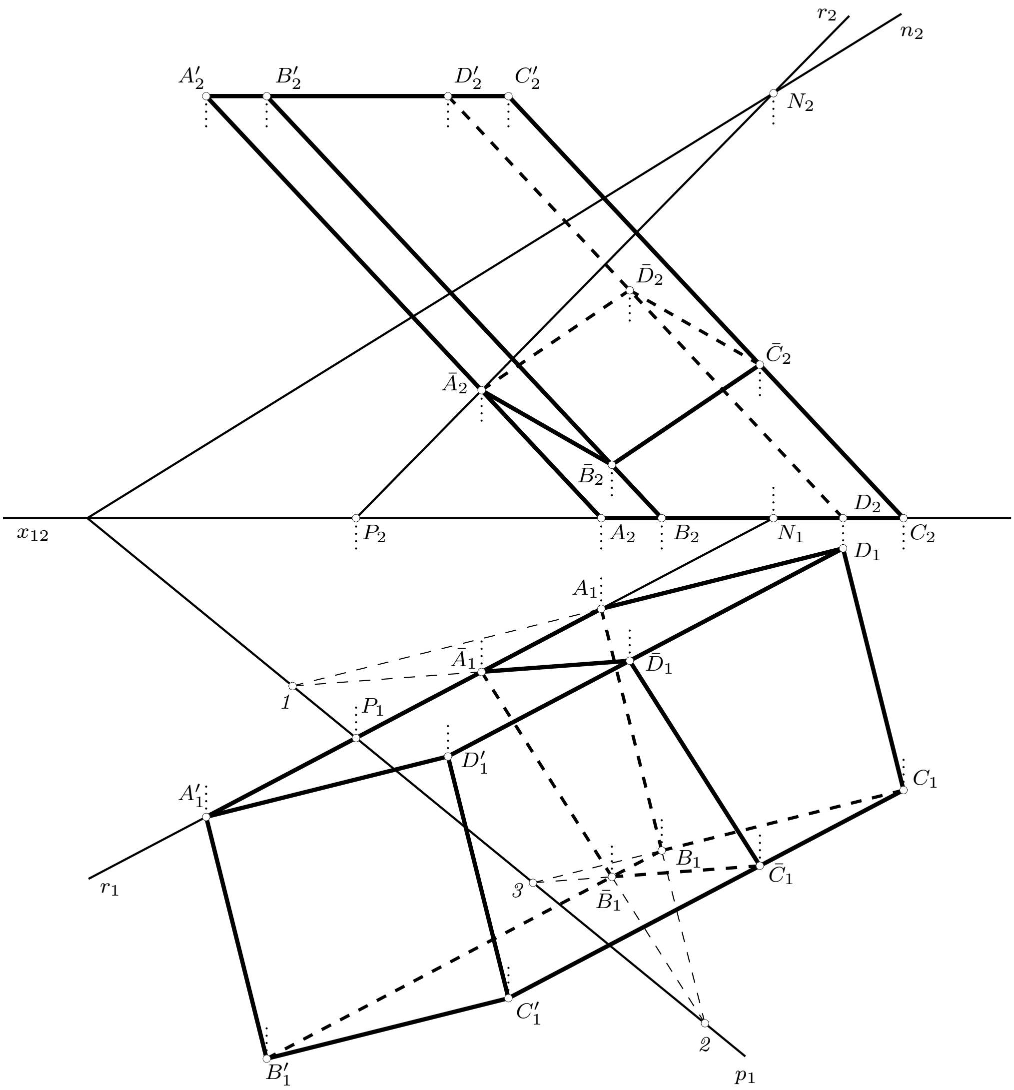


Obrázek 5.29: Řešení příkladu 5.19

strana lichoběžníků je skutečná velikost řezu, kterou bychom získali otočením roviny ϱ do nárysny (půdorysny). K rozvinutému plášti pak připojíme podstavu a řez, rozměry obou již známe z předchozího. □

Příklad 5.20. Sestrojte řez kosého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ obecnou rovinou ϱ danou stopami. Podstava hranolu je čtverec $ABCD$ v půdorysně. Hranol je dále určen vrcholem A' horní podstavy.

Řešení. Nejdříve zobrazíme hranol, viz obrázek 5.30. Podstava hranolu leží v půdorysně, jejím půdorysem je čtverec $A_1B_1C_1D_1$ a nárysem úsečka A_2C_2 ležící na ose x_{12}. Boční hrany hranolu jsou shodné a rovnoběžné úsečky. Jelikož druhá podstava leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou, je její první průmět čtverec $A_1'B_1'C_1'D_1'$ a druhý průmět úsečka $A_2'C_2'$ rovnoběžná s osou x_{12}.



Obrázek 5.30: Řešení příkladu 5.20

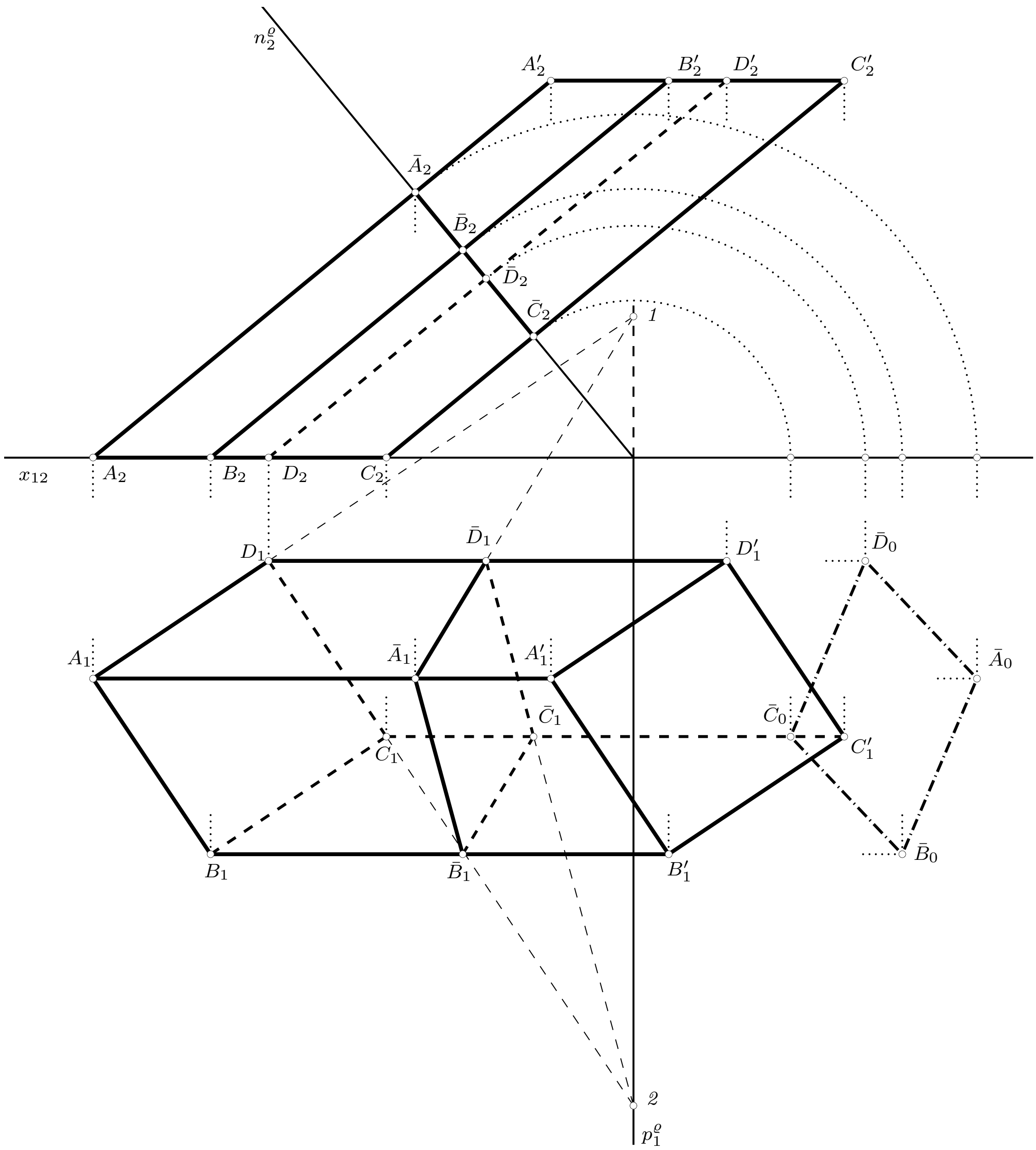
Vzhledem k poloze roviny bude řezem rovnoběžník $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, který se v obou průmětech také jako rovnoběžník zobrazí (rovina má obecnou polohu k oběma průmětnám). Jeden vrchol hledaného rovnoběžníku, např. $\bar{A}$, sestrojíme jako průsečík přímky $a = AA'$ s rovinou ϱ. K tomu použijeme krycí přímku r, jejíž průmět v půdoryse splývá s přímkou a_1, na které leží hrana $A_1A'_1$.

Půdorysy dalších vrcholů řezu bude výhodnější určit využitím afinního vztahu mezi rovinou podstavy a rovinou řezu. Osou afinity je půdorysná stopa roviny, směr afinity je dán dvojicí sdružených bodů A_1 a $\bar{A}_1$. Konstrukce bodů $\bar{B}_1$, $\bar{C}_1$ a $\bar{D}_1$ jako afinních obrazů bodů B_1, C_1 a D_1 je vidět z obrázku. Tak například bod $\bar{D}_1$ získáme jako průsečík přímky $1\bar{A}_1$ s hranou $D_1D'_1$, kde bod 1 je průsečík přímky A_1D_1 se stopou p_1^{ϱ}.

Nárysy $\bar{B}_2$, $\bar{C}_2$, $\bar{D}_2$ bodů $\bar{B}_1$, $\bar{C}_1$ a $\bar{D}_1$ leží na ordinálách. □

Příklad 5.21. Sestrojte řez kosého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ rovinou ϱ kolmou k jeho bočním hranám. Hranol má čtvercovou podstavu v půdorysně a boční hrany rovnoběžné s nárysnou. Určete skutečnou velikost řezu a využijte nalezeného řezu k sestrojení sítě daného hranolu.

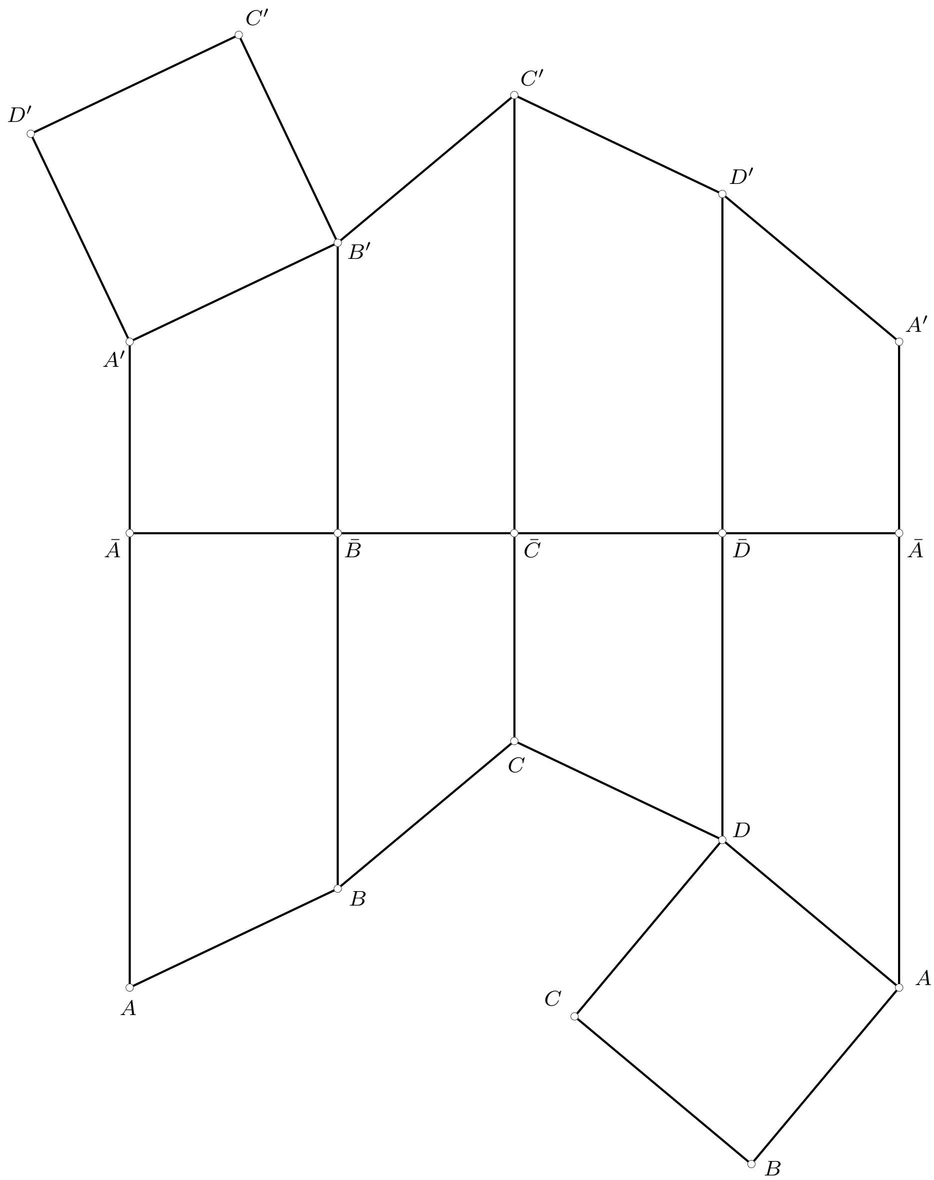
Řešení. Podstava hranolu leží v půdorysně, viz obrázek 5.31, jejím půdorysem je čtverec $A_1B_1C_1D_1$ a nárysem úsečka A_2C_2 ležící na přímce x_{12}. Boční hrany hranolu jsou shodné a rovnoběžné úsečky, jejichž půdorysné průměty jsou rovnoběžné s přímkou x_{12}, v náryse navíc vidíme boční hrany ve skutečné velikosti. Jelikož druhá podstava leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou, je její první průmět čtverec $A_1'B_1'C_1'D_1'$ a druhý průmět úsečka $A_2'C_2'$ rovnoběžná s přímkou x_{12}.



Obrázek 5.31: Řešení příkladu 5.21

Jelikož je rovina řezu kolmá k bočním hranám, je její půdorysná stopa kolmá k prvním průmětům bočních hran a podobně nárysná stopa je kolmá k druhým průmětům bočních hran. Vzhledem k tomu, že boční hrany jsou rovnoběžné s nárysnou, je rovina řezu kolmá k nárysně.

Řezem hranolu bude rovnoběžník, který se v nárysně zobrazí jako úsečka $\bar{A}_2\bar{C}_2$ na stopě n_2^{ϱ}, půdorysem pak bude rovnoběžník $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1\bar{D}_1$, jehož vrcholy získáme odvedením po ordinálách z nárysu. Samozřejmě, podobně jako v předchozím příkladu, existuje afinní vztah mezi podstavou a hledaným řezem, kde osou afinity je průmět půdorysné stopy p_1^{ϱ} a je dán pár sdružených bodů, např. A_1 a $\bar{A}_1$. Tento vztah je ilustrován na obrázku, kde se odpovídající si přímky protínají v bodech *1* a *2* na stopě p_1^{ϱ}.



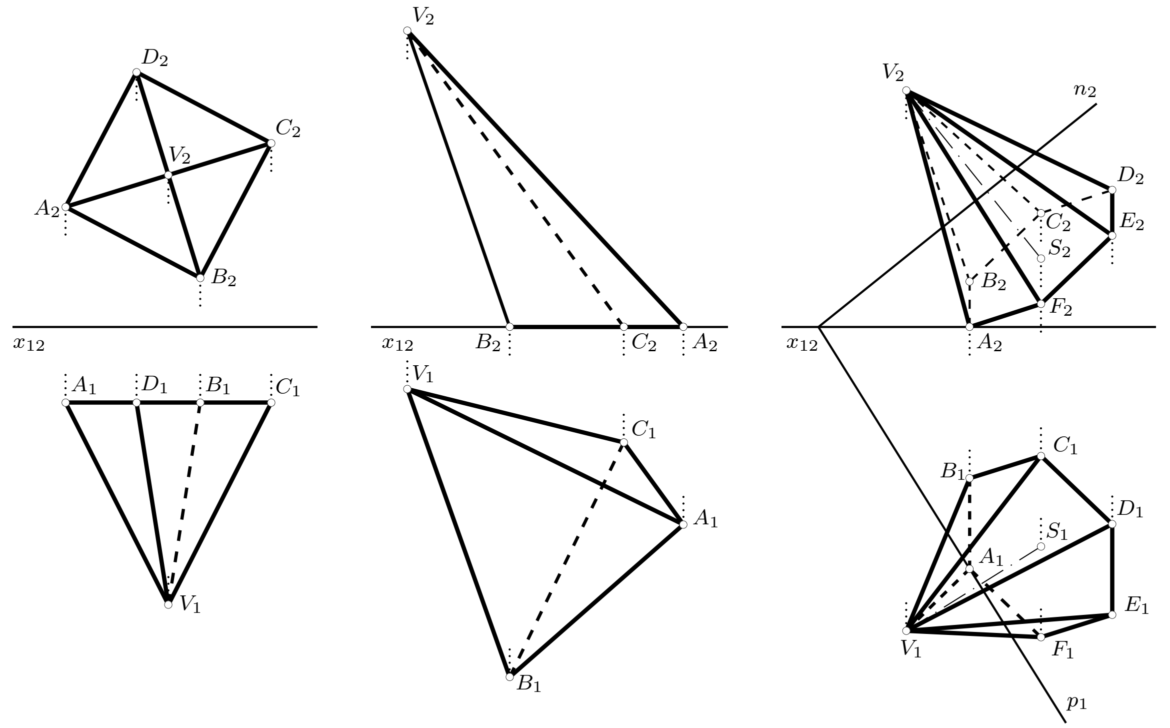
Obrázek 5.32: Síť kosého hranolu z příkladu 5.21

Pro určení skutečné velikosti řezu otočíme rovinu ϱ kolem její půdorysné stopy do půdorysny. Při tomto otáčení se body řezu pohybují po kružnicích se středy na stopě p_1^{ϱ}. Poloměry těchto kružnic vidíme ve skutečné velikosti na nárysné stopě. Získáme tak otočený rovnoběžník $\bar{A}_0\bar{B}_0\bar{C}_0\bar{D}_0$, který určuje skutečnou velikost řezu.

Nalezeného řezu můžeme použít k sestrojení sítě hranolu následujícím způsobem, viz obrázek 5.32. Jelikož je řez kolmý k bočním hranám, přejde při rozvinutí pláště tento řez v úsečku, jejíž délka je rovna obvodu skutečné velikosti řezu. Boční hrany hranolu přejdou do úseček kolmých k rozvinutému řezu. Délky těchto hran i délky jejich částí nad rovinou ϱ, resp. pod ní, vidíme ve skutečné velikosti přímo v nárysně. K takto rozvinutému plášti připojíme podstavy (jejich skutečné rozměry známe). □

5.5.2 Zobrazení jehlanu a jeho řezy rovinou

Jehlanová plocha je množina přímek procházejících pevným bodem V a protínajících obvod daného řídícího mnohoúhelníka. Bod V se nazývá (hlavní) *vrchol* jehlanové plochy. Každá přímka, která protíná vnitřek některé strany mnohoúhelníka, se nazývá, podobně jako u hranolové plochy, *povrchová přímka*, přímky spojující vrcholy mnohoúhelníka s vrcholem jsou *hrany* jehlanové plochy. Části rovin mezi sousedními hranami tvoří *stěny* jehlanové plochy.



(a) Pravidelný čtyřboký s podstavou v nárysně

(b) Nepravidelný trojboký s podstavou v půdorysně

(c) Pravidelný šestiboký s podstavou v obecné rovině

Obrázek 5.33: Jehlany

Jehlan je část prostoru omezená jehlanovou plochou a rovinou, která neprochází jejím vrcholem a ani není rovnoběžná s žádnou její hranou. Tato rovina protíná jehlanovou plochu v mnohoúhelníku, který je *podstavou* jehlanu, jeho hrany se nazývají *podstavné hrany.* Vzdálenost (hlavního) vrcholu od podstavy se nazývá *výška. Pravidelný n-boký* *jehlan* je jehlan, jehož podstavu tvoří pravidelný n-úhelník a v němž je spojnice hlavního vrcholu a středu podstavy k podstavě kolmá.

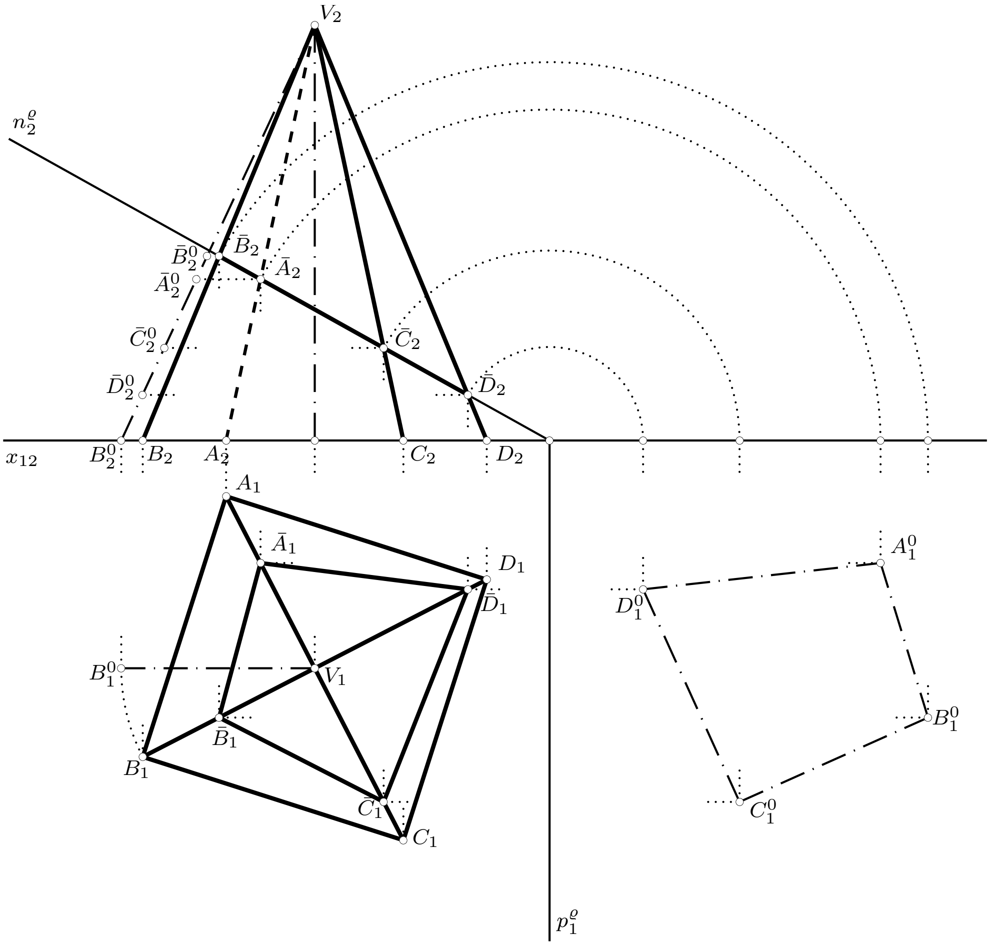
Zobrazení jehlanu má obecně tyto základní konstrukční kroky:

1. Zobrazení podstavy.
2. Zobrazení vrcholu.
3. Zobrazení bočních stěn.
4. Určení viditelnosti.

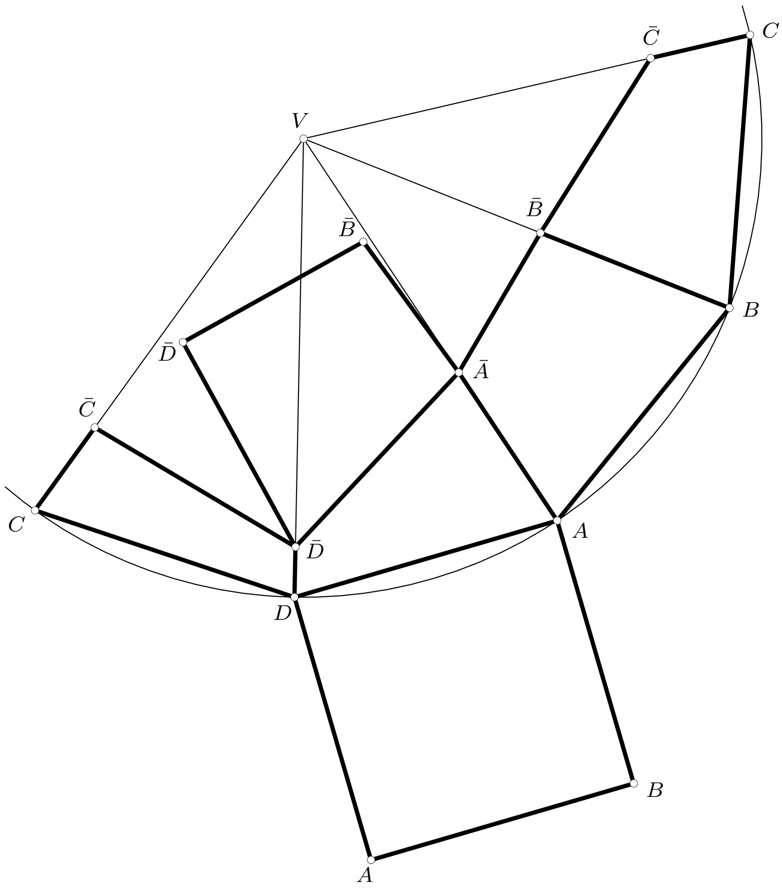
Příklady zobrazení různých jehlanů viz obrázek 5.33. Při jejich zobrazení používáme jednoduchých konstrukcí z předchozích částí.

Řez jehlanu rovinou je mnohoúhelník, jehož vrcholy leží na hranách jehlanu a strany ve stěnách, případně podstavě, jehlanu. Vrcholy řezu sestrojíme jako průsečíky roviny řezu s přímkami, které obsahují hrany jehlanu. Konstrukci řezu na jehlanu ovlivní jak poloha roviny vzhledem k průmětnám, tak i to, zda-li je a nebo není rovina řezu vrcholová. V některých případech můžeme pro konstrukci řezu použít kolineaci.

Příklad 5.22. Zobrazte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou v půdorysně rovinou ϱ danou stopami a kolmou k nárysně. Sestrojte síť seříznutého tělesa.



Obrázek 5.34: Řešení příklad 5.22



Obrázek 5.35: Síť seříznutého jehlanu z příkladu 5.22

Řešení. Půdorysem jehlanu je čtverec $A_1B_1C_1D_1$, přičemž do jeho středu se promítá vrchol jehlanu, viz obrázek 5.34. V nárysе vidíme skutečnou výšku jehlanu a jeho nárysem je trojúhelník $B_2D_2V_2$.

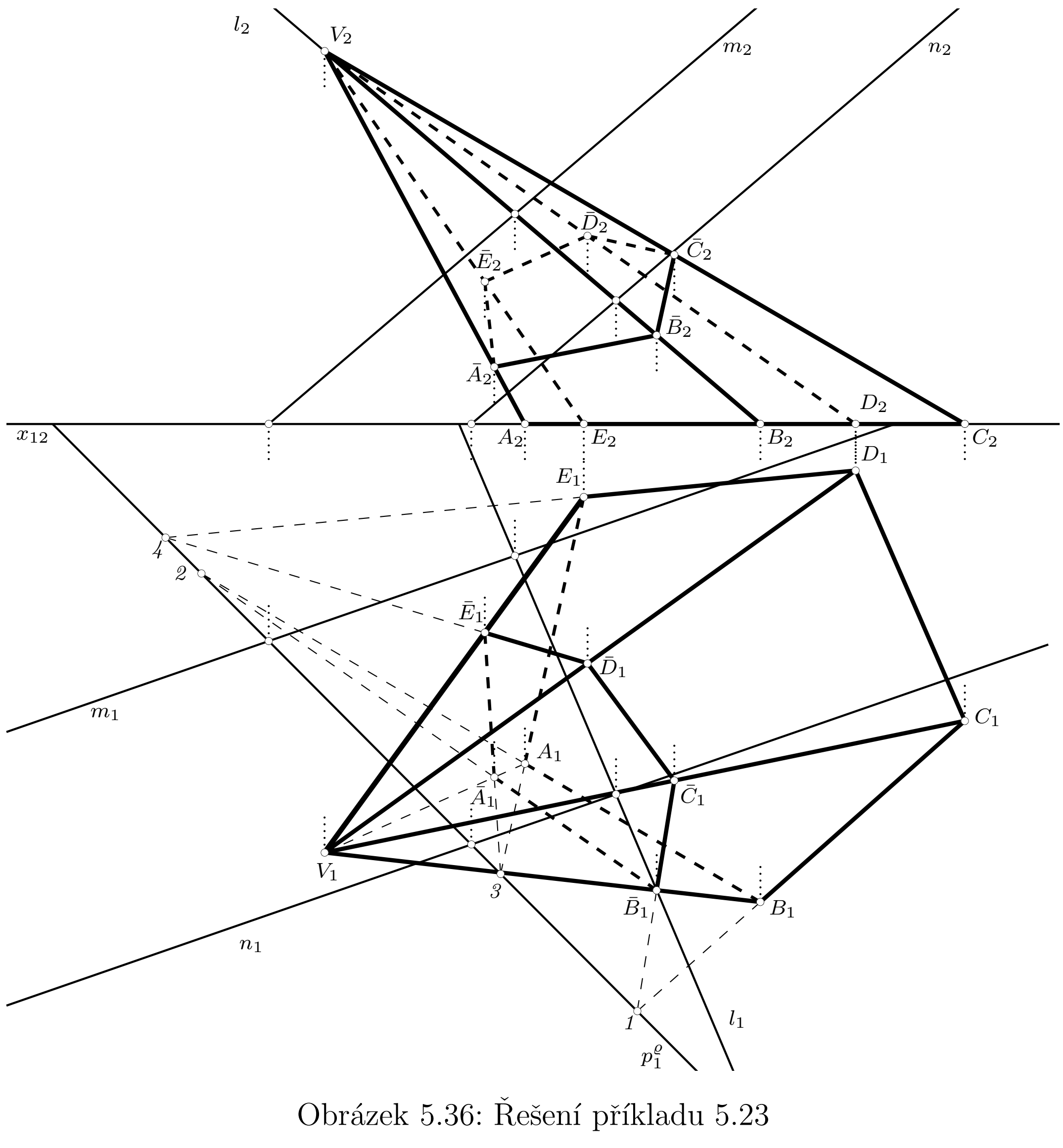
Řezem jehlanu je čtyřúhelník $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. Jelikož je rovina řezu ϱ kolmá k nárysně, leží průsečíky hran jehlanu s touto rovinou přímo na nárysné stopě a průmět řezu do nárysny je úsečka $\bar{B}_2\bar{D}_2$ ležící na nárysné stopě roviny ϱ. K odvození řezu do půdorysny použijeme ordinály.

Pro sestrojení sítě seříznuté části jehlanu musíme rozvinout plášť jehlanu. Jelikož je jehlan pravidelný a čtyřboký, je jeho síť tvořena čtyřmi rovnoramennými trojúhelníky. Velikost jejich podstav je rovna délce strany podstavy jehlanu a můžeme ji přímo doměřit z půdorysu. Skutečnou velikost bočních hran jehlanu určíme otočením těchto hran kolem přímky SV do polohy rovnoběžné s nárysnou. Na obrázku je otočena přímka BV, skutečnou velikost úsečky BV vidíme v nárysе a platí $|BV| = |B_0^2V_2|$. Do stejné polohy můžeme otočit i další boční hrany jehlanu, čímž navíc získáme i vzdálenosti bodů řezu od hlavního vrcholu jehlanu. Součástí sítě je i podstava hranolu (její skutečnou velikost vidíme v půdoryse) a řez. Skutečnou velikost řezu získáme otočením roviny ϱ do půdorysny. Celý řez je na obrázku 5.35. □

Příklad 5.23. Zobrazte řez kosého jehlanu $ABCDEV$ rovinou ϱ danou rovnoběžkami m a n. Podstava jehlanu je pravidelný pětiúhelník v půdorysně o straně AB, dále je zadán hlavní vrchol jehlanu V.

Řešení. Nejdříve zobrazíme jehlan, tj. sestrojíme pravidelný pětiúhelník, zobrazíme jeho hlavní vrchol, boční hrany a určíme viditelnost, viz obrázek 5.36.

Řezem jehlanu bude pětiúhelník. Jeden bod řezu určíme jako průsečík boční hrany jehlanu s rovinou ϱ. Sestrojíme například bod $\bar{B}$, jako průsečík hrany VB s rovinou ϱ. Použijeme k tomu krycí přímku l, jejíž nárys l_2 splývá s přímkou B_2V_2. Půdorys l_1 odvodíme pomocí průsečíků s přímkami m_2 a n_2.



Obrázek 5.36: Řešení příkladu 5.23

Platí, že půdorys hledaného řezu je ve vztahu kolineace s podstavou jehlanu, kde osou kolineace je stopa roviny řezu a středem je průmět V_1 hlavního vrcholu jehlanu. Abychom mohli této kolineace využít k určení dalších vrcholů řezu, sestrojíme tedy stopu roviny ϱ. K tomu použijeme půdorysné stopníky přímek m a n.

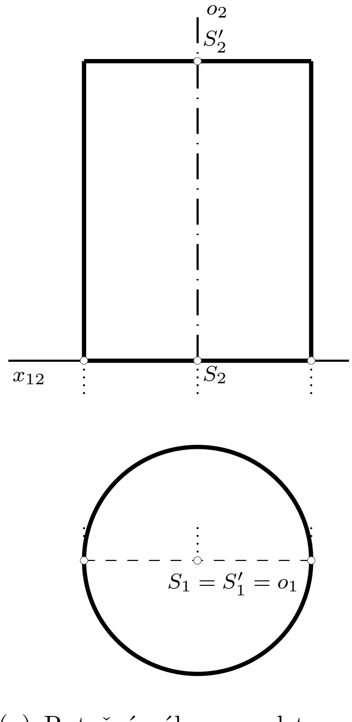
Vzhledem k tomu, že již máme jeden pár odpovídajících si bodů B_1 a $\bar{B}_1$, využijeme jich k sestrojení zbylých bodů řezu. Například bod $\bar{C}_1$ je průsečík přímky C_1V_1 s přímkou $\bar{B}_1 1$, kde bod *1* je průsečík přímky B_1C_1 a stopy p_1^{ϱ}. Konstrukce dalších bodů plyne z obrázku. Nárys řezu odvodíme pomocí ordinál. □

5.5.3 Zobrazení válce a jeho řezy

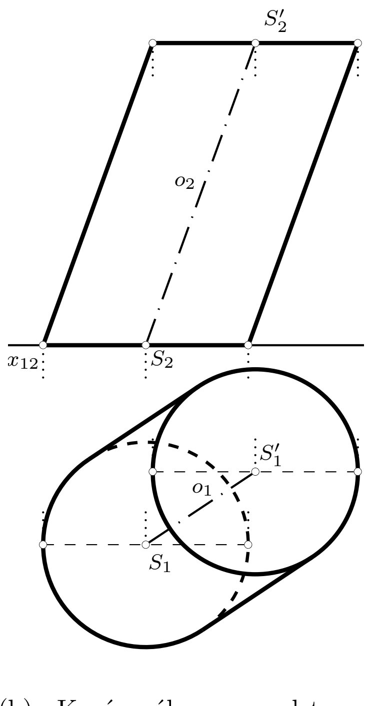
Kruhová válcová plocha (stručně jen *válcová plocha*) je množina všech přímek daného směru, které protínají tzv. *řídící kružnici* (přičemž platí, že tato kružnice musí ležet v rovině různoběžné se směrem přímek). Každá přímka procházející obvodem kružnice se nazývá *povrchová přímka* (stručně *površka*) válcové plochy.

Válec je část prostoru ohraničená válcovou plochou a dvěma shodnými podstavami, které leží v rovinách rovnoběžných s rovinou řídící kružnice.

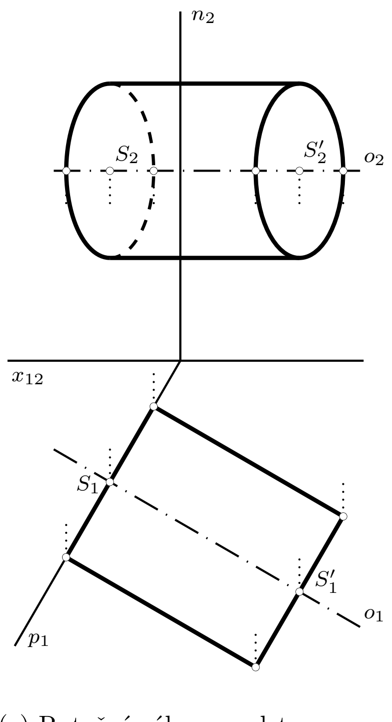
Válcová plocha (válec) může být *kolmá* (površky plochy jsou kolmé k rovině řídící kružnice) nebo *kosá*. V případě kolmé válcové plochy (válce) hovoříme vždy spíše o *rotační válcové ploše* (*rotačním válci*), jelikož tato plocha vznikne rotací přímky p kolem přímky o s ní rovnoběžné. O přímce o pak mluvíme jako o *ose* válcové plochy (válce). V případě kosého válce se jako přímka o označuje spojnice středů podstav a nazývá se *středná*. Části povrchových přímek omezené rovinami podstav válce se nazývají *strany* válce a tvoří jeho *plášť*.



(a) Rotační válec s podstavou v půdorysně



(b) Kosý válec s podstavou v půdorysně



(c) Rotační válec s podstavou v rovině kolmé k půdorysně

Obrázek 5.37: Příklady zobrazení válců

Zobrazení válce má obecně tyto základní konstrukční kroky:

1. Zobrazení jedné podstavy.

2. Zobrazení druhé podstavy.
3. Zobrazení obrysových stran.
4. Určení viditelnosti.

Příklady zobrazení válců viz obrázek 5.37. Není-li rovina podstavy válce rovnoběžná ani kolmá k průmětně, zobrazí se podstava jako elipsa, viz úloha 5.18 na zobrazení kružnice. Obrysové strany jsou (pokud se nejedná o speciální polohu, kdy se válec zobrazuje v průmětu jako obdélník) společné tečny kružnic (elips) rovnoběžné se směrem osy (středné).

Rovina rovnoběžná se střednou kosé válcové plochy (neboli tzv. *směrová*, případně *vrcholová*, rovina) protíná kosou válcovou plochu ve dvou povrchových přímkách, nebo se jí dotýká v jedné povrchové přímce, případně s ní nemá žádný společný bod. Řez kosého válce touto rovinou je obdélník (tento řez budeme později využívat k určení průsečíku přímky s plochou). Rovina rovnoběžná s rovinou řídící kružnice kosé válcové plochy protíná válcovou plochu v kružnici, podobně protíná tuto plochu i rovina, která je symetrická s řídící rovinou podle roviny kolmé ke středné. Ostatní roviny protínají kosou válcovou plochu v elipse. My se dále zaměříme na situaci na rotační válcové ploše (válci). Základem pro řez rotačního válce je řez válcové plochy. Mohou nastat celkem tři případy.

Rovina řezu je kolmá k ose válcové plochy. V tomto případě je řezem povrchová kružnice. Rotační válec protíná tato rovina v kruhu, nebo nemá s válcem žádný společný bod.

Rovina řezu je rovnoběžná s osou válcové plochy. Takováto rovina protíná válcovou plochu ve dvou površkách, nebo se jí dotýká podél jedné površky, nebo s ní nemá žádný společný bod. Rotační válec protíná v obdélníku, nebo se ho dotýká v jedné straně, nebo s ním nemá žádný společný bod.

Rovina kosá k ose válcové plochy protíná plochu v elipse. Je to přímý důsledek afinity mezi rovinou řídící kružnice a rovinou řezu.

Vlastnosti elipsy, která je řezem válcové plochy rovinou, můžeme popsat větou, kterou nezávisle na sobě odvodili dva Belgičané Lambert Adolphe Quételet (1796–1874) a Germinal Pierre Dandelin (1794–1847).

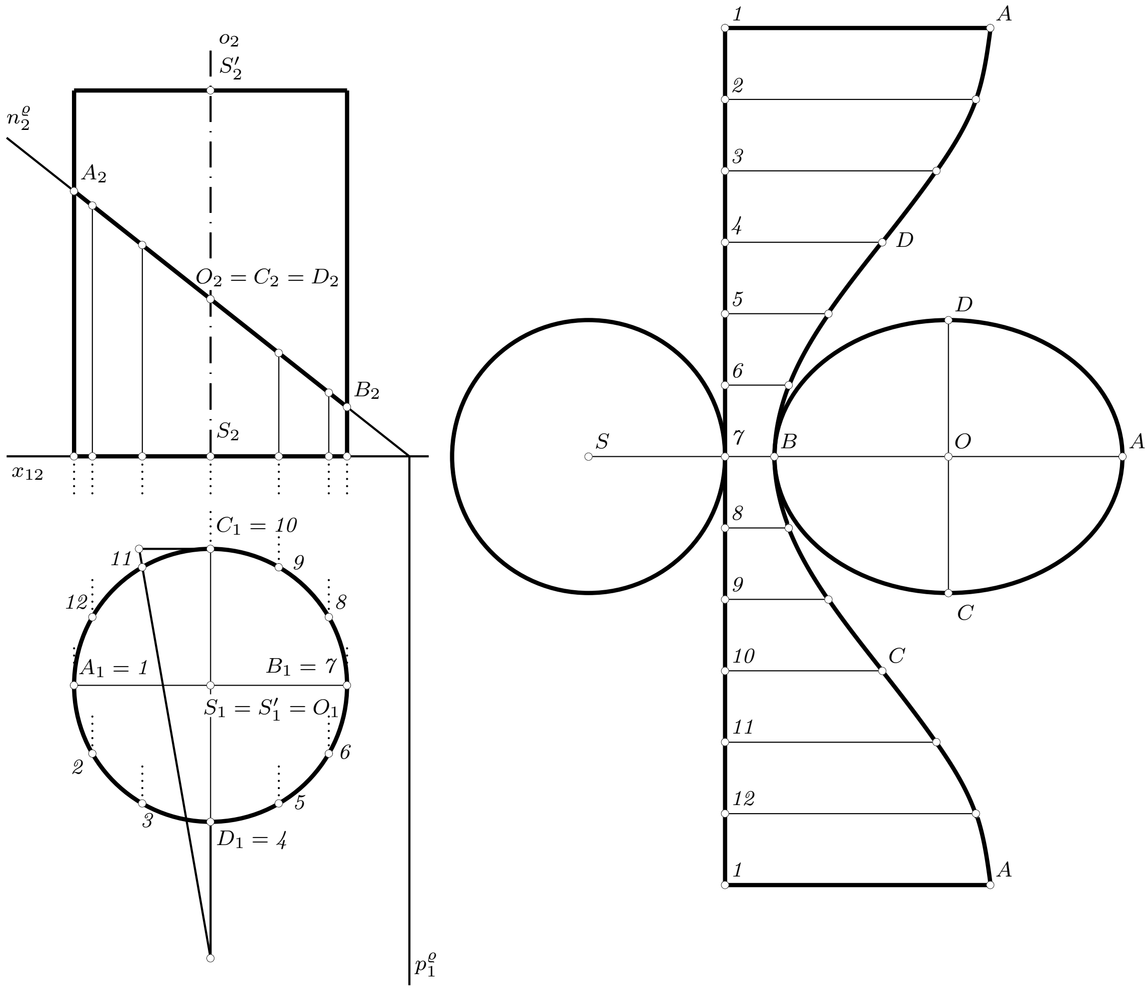
Věta 5.24. *Řezem rotační válcové plochy rovinou, která je kosá k ose plochy, je elipsa. Jejími ohnisky jsou dotykové body kulových ploch vepsaných válcové ploše tak, že se dotýkají roviny řezu. Střed elipsy leží na ose válcové plochy, délka její vedlejší poloosy je rovna poloměru válcové plochy.*

Pro řešení úloh na konstrukci řezu rotační válcové plochy bude důležitý následující důsledek Quételet-Dandelinovy věty.

Důsledek 5.25. *Hlavní osa elipsy řezu je průsečnicí roviny řezu a roviny, která prochází osou válce a je kolmá k rovině řezu.*

Příklad 5.26. Zobrazte řez rotačního válce s podstavou o středu S a poloměru r v půdorysně rovinou ϱ kolmou k nárysně. Výška válce je v. Sestrojte síť seříznutého válce.

Řešení. Nejprve zobrazíme válec a stopy roviny, viz obrázek 5.38. Půdorysem válce je kruh o středu S_1 a poloměru r, jeho nárysem je obdélník s jednou stranou na ose x_{12}. Střed této strany je bod S_2, její délka je $2r$, druhá strana má délku v.



Obrázek 5.38: Řez a síť válce z příkladu 5.26

Jelikož je rovina řezu ϱ kosá vzhledem k ose válce a nemá s podstavami válce žádné společné body, bude řezem pláště válce elipsa. Pokud by rovina řezu protínala podstavy válce, řez válce by byl ohraničen oblouky elipsy a tětivami, které na podstavách vytínají průsečnice roviny řezu a rovin podstav.

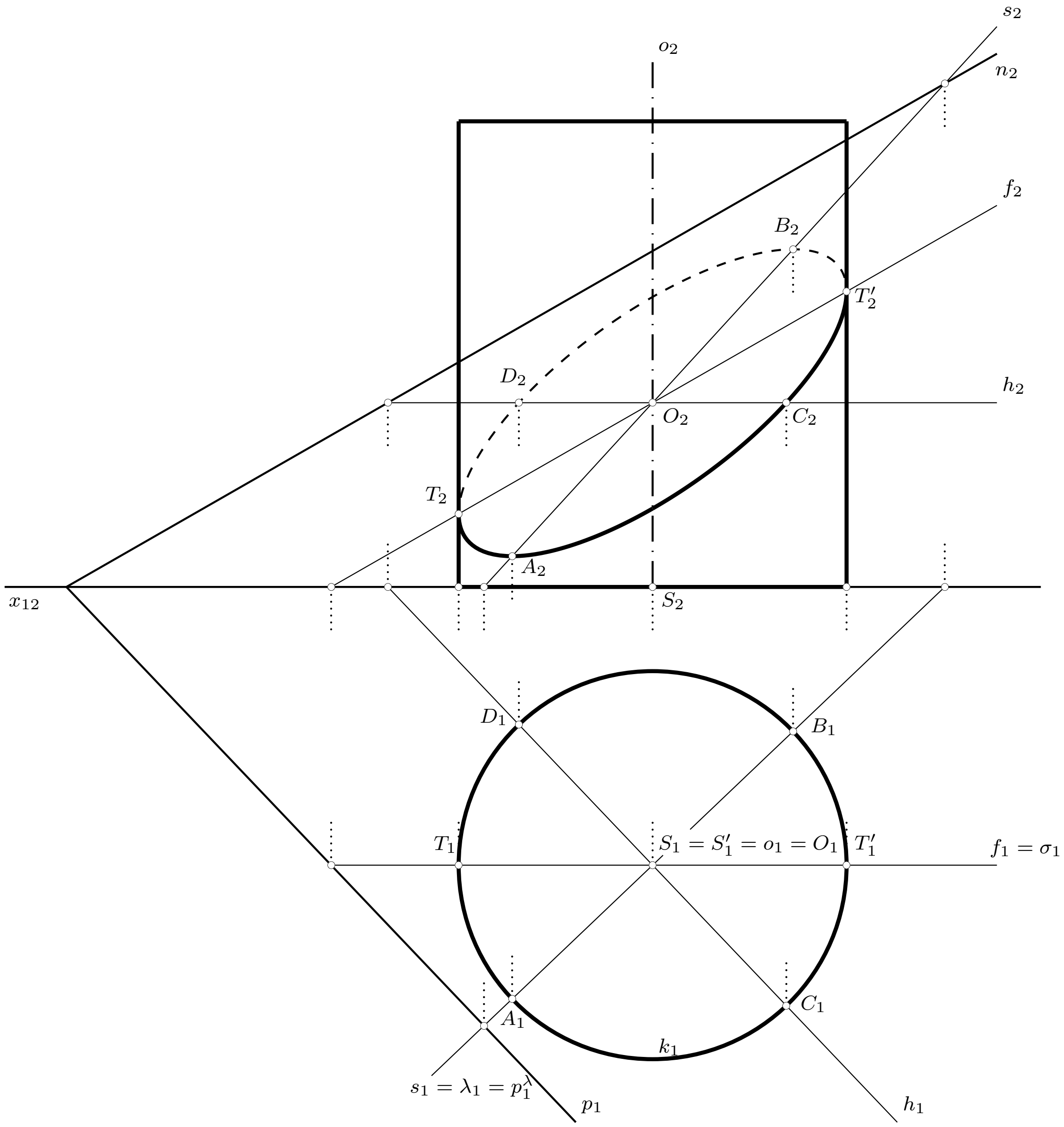
Protože je rovina řezu kolmá k nárysně, je nárysem řezu úsečka A_2B_2 a jeho půdorys splývá s půdorysem válce. Podle předchozího důsledku odpovídá úsečka AB hlavní ose elipsy a její délku vidíme v náryse. Úsečka CD, která je na ní kolmá, odpovídá vedlejší ose elipsy a její skutečné rozměry vidíme v půdoryse (tato úsečka leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou). Můžeme tak sestrojit skutečnou velikost řezu.

Pro sestrojení sítě seříznutého válce musíme rozvinout jeho plášť. Kružnici, která tvoří půdorysný průmět válce, rozdělíme na dvanáct shodných dílů pomocí bodů *1*, *2*, …, *12*. Délku jedné dvanáctiny kružnice přibližně zjistíme pomocí Sobotkovy rektifikace. Kružnice přejde v rozvinutí v úsečku, která je rovna dvanáctinásobku zjištěné délky. Délky stran seříznutého válce v bodech *1*, *2*, …, *12* odměříme z nárysu. Pokud bychom chtěli více bodů pro křivku, která vznikne rozvinutím elipsy a tvoří jednu hranici pláště, museli bychom kružnici rozdělit na více částí.

K rozvinutému plášti připojíme skutečnou velikost řezu a podstavný kruh válce. □

Příklad 5.27. Zobrazte řez rotačního válce s podstavou v půdorysně obecnou rovinou ϱ.

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladě zobrazíme zadaný válec, viz obrázek 5.39. Rovina řezu je kosá vzhledem k ose válce, proto hranicí řezu bude elipsa.



Obrázek 5.39: Řešení příkladu 5.27

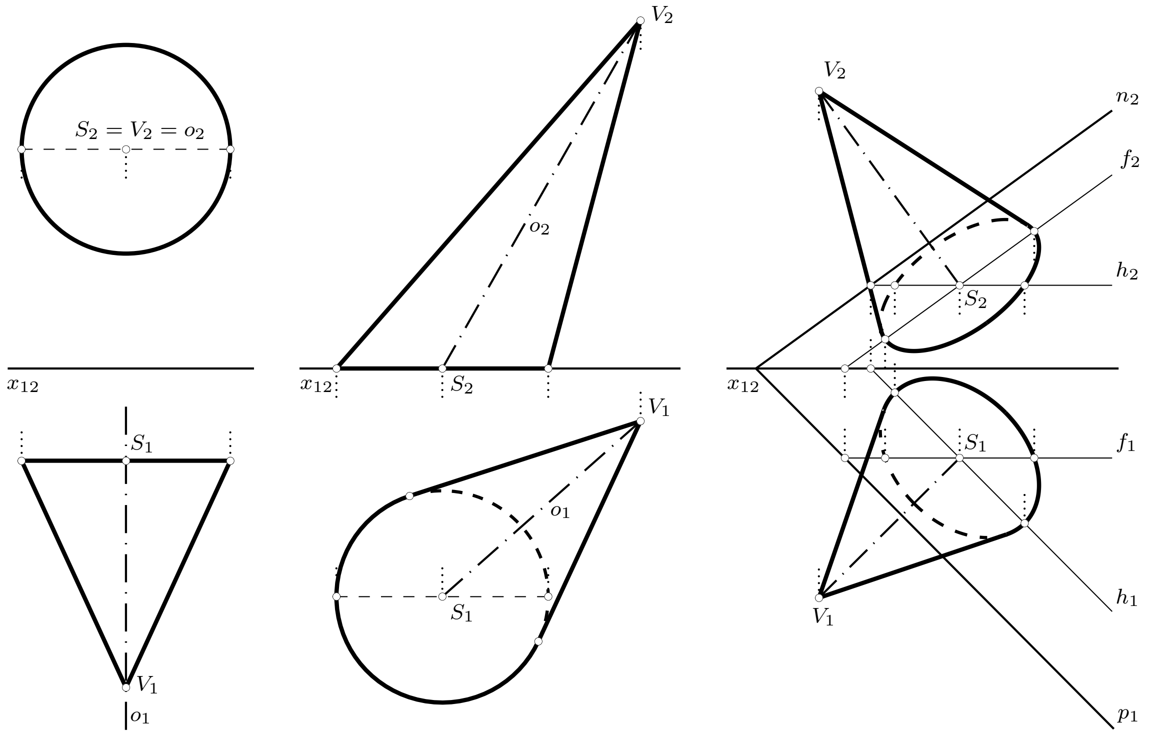
Pro určení této elipsy využijeme důsledku Quételet-Dandelinovy věty. Proložme osou o válce rovinu λ kolmou k rovině ϱ. Jelikož osa o je kolmá k půdorysně, je i rovina λ k půdorysně kolmá a platí $p_1^\varrho \perp p_1^\lambda = \lambda_1$, $o_1 \in p_1^\lambda$. Průsečnice s rovin ϱ a λ je spádová přímka roviny ϱ a je pro elipsu řezu hlavní osou. Přímka s protíná osu o ve středu elipsy O a plášť válce v bodech A a B, které jsou hlavní vrcholy elipsy. Vedlejší osa elipsy leží v rovině ϱ na přímce h, která prochází bodem O a je kolmá k přímce s. Přímka h je tak horizontální hlavní přímka roviny ϱ a protíná plášť válce ve vedlejších vrcholech elipsy. Průmět této elipsy do půdorysny splývá s kružnicí k_1 ohraničující podstavu válce a její průmět do nárysny je elipsa, pro kterou jsou úsečky A_2B_2 a C_2D_2 sdružené průměry.

Body A_1, B_1, C_1 a D_1 nalezneme jako průsečíky přímek h_1 a s_1 s kružnicí k_1. Jejich nárysy získáme pomocí druhých průmětů s_2 a h_2 přímek s a h. Nárysy A_2B_2 a C_2D_2 jsou nárysy os elipsy řezu a jsou to tedy hledané sdružené průměry průmětu elipsy do nárysu. Tuto elipsu tak můžeme vyrýsovat pomocí příčkové konstrukce.

Pro nárys elipsy ještě zjistíme body T_2 a T_2', ve kterých se nárys elipsy dotýká obrysu válce v nárysu a ve kterých se tedy mění viditelnost řezu. Tyto body leží v rovině σ rovnoběžné s nárysnou a procházející osou válce. V půdoryse je tak vidíme jako průsečíky frontální hlavní přímky f_1 roviny ϱ s kružnicí k_1. V náryse jsou to průsečíky přímky f_2 a obdélníku, který je nárysem válcové plochy. □

5.5.4 Zobrazení kužele a jeho řezy

Kuželová plocha je množina všech přímek jdoucích pevným bodem V a protínající kružnici k, která neleží ve stejné rovině jako bod V. Bod V se nazývá *vrchol* kužele a kružnice k se nazývá *řídící kružnice*. Přímky plochy se nazývají *povrchové přímky* (*površky*). *Kužel* je část prostoru omezená kuželovou plochou a rovinou rovnoběžnou s rovinou řídící kružnice.



(a) Rotační kužel s podstavou v nárysně

(b) Kosý kužel s podstavou v půdorysně

(c) Rotační kužel s podstavou v obecné rovině

Obrázek 5.40: Příklady zobrazení kužele

Spojnice vrcholu a středu řídící kružnice se nazývá *středná*. Je-li středná kolmá (kosá) k rovině řídící kružnice, kuželová plocha je *kolmá* (*kosá*). Pro označení kolmé kuželové plochy se častěji používá názvu *rotační kuželová plocha*, jelikož tato plocha vznikne rotací přímky, která je různoběžná s osou rotace. V případě rotační kuželové plochy se střední nazývá *osa*. Podobně se tyto pojmy zavedou i pro kužel, kde máme navíc pojmy *podstava*, *plášť* a *strana*, které se zavedou analogicky jako u předchozích těles. *Výškou* kužele rozumíme vzdálenost vrcholu od roviny podstavy.

Postup zobrazení kužele můžeme rozdělit do těchto kroků:

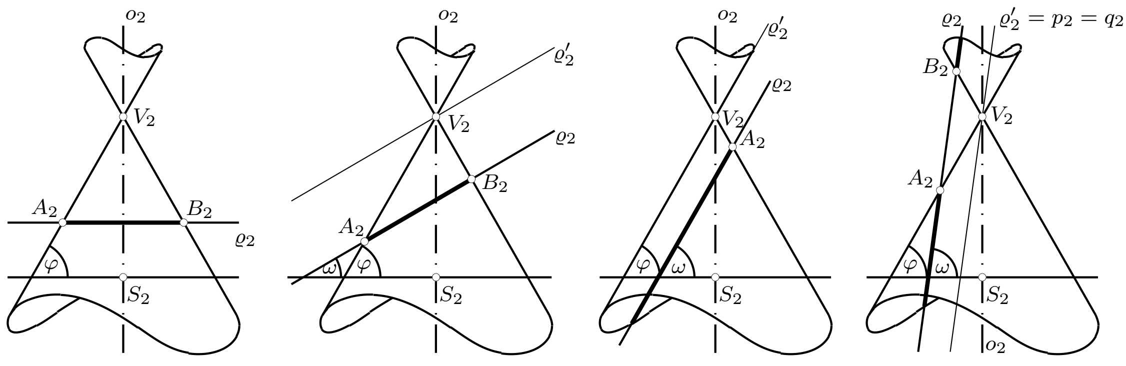
1. Zobrazení podstavy.
2. Zobrazení vrcholu.
3. Zobrazení obrysových stran.
4. Určení viditelnosti.

Příklady zobrazení kužele viz obrázek 5.40. Není-li rovina podstavy kužele rovnoběžná ani kolmá k průmětně, zobrazí se podstava jako elipsa. Průměty obrysových stran jsou obecně tečny k elipse (průmětu podstavy) z bodu (průmětu vrcholu).

Při určení řezu kuželové plochy musíme rozlišit, zda-li rovina řezu prochází, či neprochází vrcholem. Rovina procházející vrcholem, tzv. *vrcholová rovina*, buď protíná kuželovou plochu ve dvou povrchových přímkách, nebo se jí dotýká v jedné povrchové přímce, nebo má s kuželovou plochou společný právě jeden bod (její vrchol).

Obecná rovina neprocházející vrcholem protíná kuželovou plochu v kuželosečce. Druh této kuželosečky závisí na porovnání odchylky ω roviny řezu a odchylky φ povrchových přímek kuželové plochy od roviny řídící kružnice, viz obrázek 5.41. Pro řez mohou nastat tyto možnosti:

1. Je-li $\omega = 0°$, tj. rovina řezu je rovnoběžná s rovinou řídící kružnice, je řezem kružnice.
2. Je-li $0 < \omega < \varphi$, je řezem elipsa.
3. Je-li $\omega = \varphi$, je řezem parabola.
4. Je-li $\omega > \varphi$, je řezem hyperbola.



(a) Kružnice (b) Elipsa (c) Parabola (d) Hyperbola

Obrázek 5.41: Vliv úhlu ω na druh kuželosečky

Typ řezu můžeme určit i pomocí vrcholové roviny ϱ', která je s rovinou řezu ϱ rovnoběžná. V případě eliptického řezu má vrcholová rovina ϱ' s kuželovou plochou společný právě její vrchol. V případě parabolického řezu se vrcholová rovina ϱ' dotýká kuželové plochy podél jedné povrchové přímky (rovina řezu ϱ je s touto přímkou rovnoběžná) a v případě hyperbolického řezu protíná vrcholová rovina ϱ' kuželovou plochu ve dvojici různoběžek (rovina řezu ϱ je s těmito přímkami rovnoběžná).

Vlastnosti řezů kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové, popisuje (podobně jako u eliptických řezů na válci) Quételet-Dandelinova věta.

Věta 5.28. *Řezy rotační kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové, jsou kuželosečky s ohnisky v dotykových bodech kulových ploch vepsaných kuželové ploše a dotýkajících se roviny řezu.*

Při řešení úloh využijeme hlavně důsledků této věty, které se dají pro jednotlivé řezy zformulovat následujícím způsobem.

Důsledek 5.29. *Kolmý průmět eliptického (hyperbolického) řezu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k její ose je elipsa (hyperbola), která má jedno ohnisko v průmětu vrcholu do této roviny. Hlavní osa kuželosečky je průsečnicí roviny řezu a roviny, která prochází osu kužele a je kolmá k rovině řezu.*

Důsledek 5.30. *Kolmý průmět parabolického řezu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k její ose je parabola, která má ohnisko v průmětu vrcholu plochy a vrchol této paraboly je v průmětu vrcholu průsečné paraboly.*

Příklad 5.31. Zobrazte eliptický řez rotačního kužele s podstavou o středu S a poloměru r v půdorysně rovinou ϱ kolmou k nárysně. Výška kužele je v.

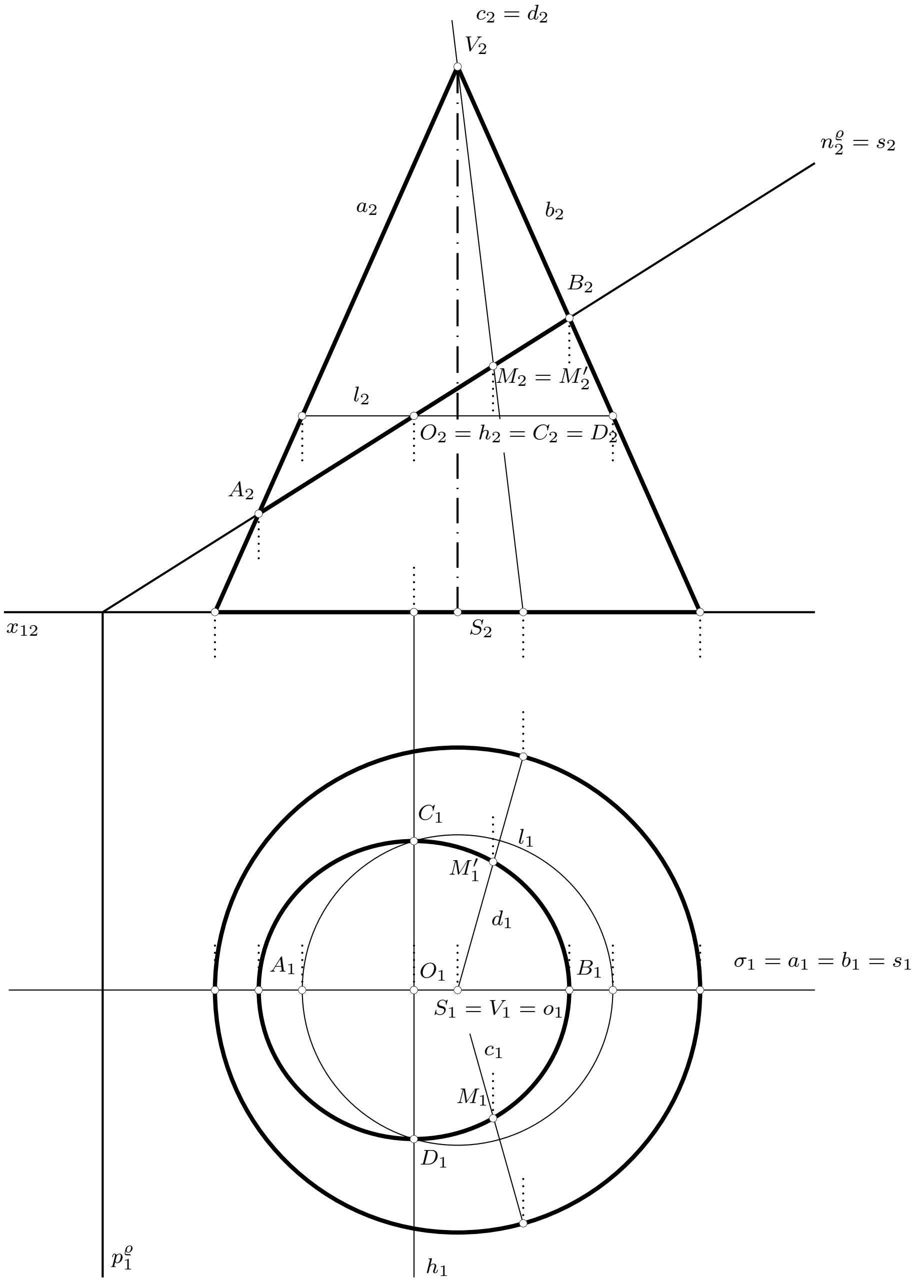
Řešení. Nejdříve zobrazíme kužel a stopy roviny, viz obrázek 5.42. Půdorysem kužele je kruh o středu $S_1 = V_1$ (do středu podstavy se promítá i vrchol kužele) a s poloměrem r. Nárysem kužele je rovnoramenný trojúhelník s výškou v. Odchylka nárysné stopy roviny ϱ od osy x_{12} je menší než odchylka površek a_2, b_2, které tvoří obrys kužele v nárysu, od osy x_{12}.

Dle zadaní bude řezem pláště elipsa. Podle důsledku 5.29 je hlavní osa elipsy průsečnicí roviny σ rovnoběžné s nárysnou a procházející osou kužele s rovinou řezu ϱ. Rovina σ protíná rovinu ϱ v její spádové přímce s a kuželovou plochu v površkách a, b. Přímka s je hlavní osa elipsy řezu, platí $s_1 \parallel x_{12}$, $S_1 \in s_1$, $s_2 = n_2^{\varrho}$. Průsečíky A, B přímky s s kuželem jsou hlavní vrcholy elipsy (jedná se o průsečíky přímek a, b s přímkou s). Střed O úsečky AB je středem elipsy a vedlejší vrcholy elipsy jsou průsečíky kuželové plochy s hlavní přímkou h roviny ϱ procházející bodem O.

Jelikož je rovina řezu kolmá k nárysně, je nárysem řezu úsečka A_2B_2. Půdorysem řezu pláště je elipsa. Úsečka A_1B_1 je její hlavní osou a C_1D_1 je vedlejší osou. Body C_1D_1 odvodíme z nárysu pomocí kružnice l, která leží na povrchu kužele. Nárysem této kružnice je úsečka l_2 a jejím půdorysem je kružnice l_1 se středem S_1 a poloměrem, který můžeme odvodit z nárysu.

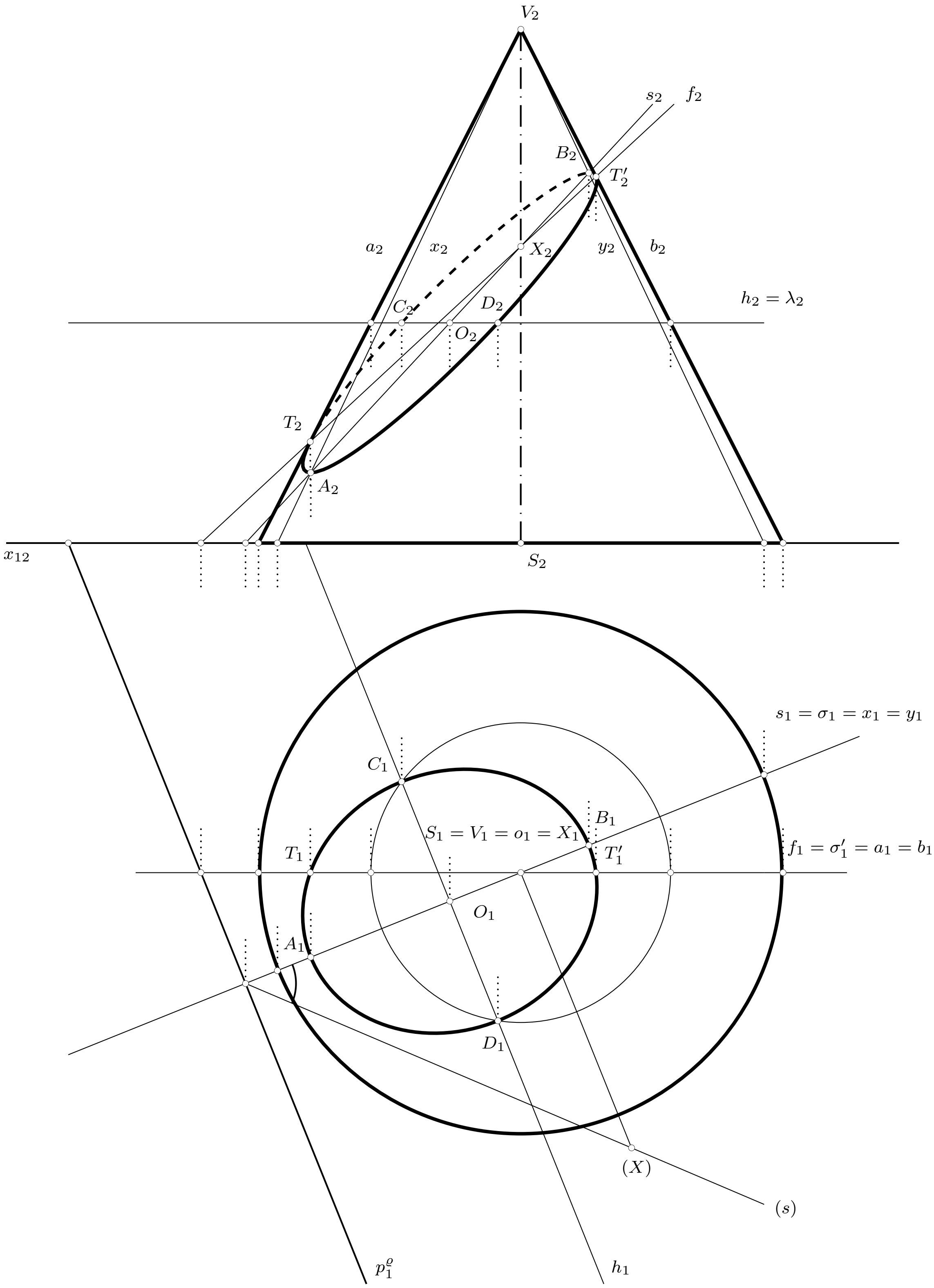
Snadno můžeme najít další body řezu pomocí povrchových přímek kuželové plochy. V obrázku jsou tak nalezeny body M a M' pomocí povrchových přímek c a d. □

Příklad 5.32. Zobrazte eliptický řez rotačního kužele s podstavou o středu S a poloměru r v půdorysně rovinou ϱ kolmou k nárysně. Rovina ϱ je dána půdorysnou stopou a odchylkou $\omega = 45°$ od půdorysny. Pro odchylku φ površek kužele od půdorysny platí $\varphi > \omega$.



Obrázek 5.42: Řešení příkladu 5.5.4

Řešení. Nejprve zobrazíme kužel (viz předchozí příklad) a rovinu, viz obrázek 5.43. Jelikož rovinu máme zadánu pomocí stopy a odchylky, bude nejvýhodnější určit spádovou přímku s roviny (známe totiž vlastně její odchylku od půdorysny). Zvolme tedy spádovou přímku první osnovy (tj. $s_1 \perp p_1^\varrho$), přičemž bude nejvýhodnější (viz dále) zvolit spádovou přímku různoběžnou s osou kužele (tj. $o_1 \in s_1$). Přímku s_1 sklopíme s využitím faktu, že odchylka přímky s_1 a sklopené přímky (s) je $\omega = 45°$. Na přímce s_1 najdeme libovolný bod X_1 (nejvýhodnější bude zvolit takový bod, který zároveň leží na ose o) a pomocí tohoto bodu určíme druhý průmět s_2 spádové přímky.



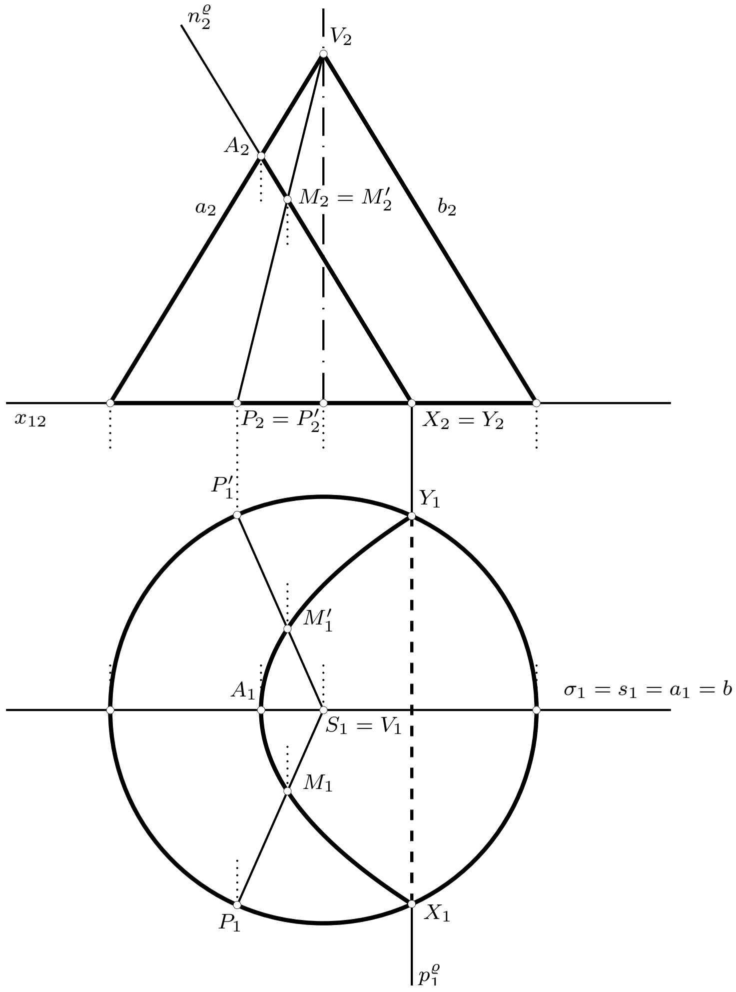
Obrázek 5.43: Řešení příkladu 5.32

Dle zadání ($\varphi > \omega$) bude řezem pláště elipsa. Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu. Osou o kužele vedeme rovinu σ, $\sigma \perp \varrho$. Rovina σ protíná rovinu ϱ v její spádové přímce s a kužel v površkách x a y. Průsečíky A, B přímky s s površkami x a y jsou průsečíky přímky s a kuželové plochy a jedná se o hlavní vrcholy hledané elipsy. Hlavní přímka h, která prochází středem O úsečky AB protíná kuželovou plochu v bodech C, D, které jsou vedlejší vrcholy elipsy.

Jelikož je rovina ϱ v obecné poloze vzhledem k průmětnám, jsou půdorysem a nárysem řezu elipsy e_1 a e_2. Elipsa e_1 má hlavní osu A_1B_1 a vedlejší osu C_1D_1. Body C_1 a D_1 nalezneme pomocí povrchové kružnice, tj. řezu kuželové plochy rovinou λ, $\lambda \perp o$, $h \subset \lambda$.

Úsečky A_2B_2 a C_2D_2 jsou sdružené průměry elipsy e_2, kterou můžeme sestrojit příčkovou konstrukcí. Pro tuto elipsu ještě určíme body T_2 a T_2', které jsou body přechodu viditelnosti řezu. Zavedeme rovinu σ' rovnoběžnou s nárysnou a procházející osou o kužele. Tato rovina protíná kužel v obrysových površkách a, b a rovinu ϱ v hlavní přímce f. Průsečíky přímky f s přímkami a, b jsou hledané body T a T'. □

Příklad 5.33. Zobrazte parabolický řez rotačního kužele s podstavou o středu S a poloměru r v půdorysně rovinou ϱ kolmou k nárysně. Výška kužele je v.



Obrázek 5.44: Řešení příkladu 5.33

Řešení. Podobně jako v předchozích příkladech zobrazíme zadaný kužel a rovinu řezu, viz obrázek 5.44. Nárysná stopa roviny řezu je rovnoběžná s jednou z obrysových površek kužele.

Osou o kužele proložíme rovinu σ kolmou k rovině ϱ, tj. $o_1 \in \sigma_1$, $\sigma_1 \perp p_1^{\varrho}$. Rovina σ protne kužel v površkách a, b a rovinu ϱ ve spádové přímce s. Spádová přímka s je osou a průsečík A přímek s a a je vrcholem paraboly, jejíž část tvoří řez pláště kužele.

Nárysem řezu je úsečka A_2X_2. Půdorysem řezu pláště je podle důsledku 5.30 část paraboly, jejíž vrcholem je bod A_1 a ohnisko bod S_1. Libovolný bod řezu M můžeme snadno odvodit z nárysu pomocí površek kužele. Součástí průmětu řezu je i úsečka X_1Y_1, ve které rovina řezu protíná podstavu kužele. □

Příklad 5.34. Sestrojte hyperbolický řez rotačního dvojkužele s jednou z podstav v půdorysně rovinou ϱ kolmou k nárysně.

Řešení. Zobrazíme rotační dvojkužel a stopy roviny ϱ. Odchylka nárysné stopy od osy x_{12} je větší než odchylka obrysových površek kužele od osy x_{12}.

K sestrojení řezu využijeme důsledku 5.29 a postupujeme obdobně jako v předchozích příkladech. Osou kužele proložíme rovinu σ kolmou k rovině ϱ. Tato rovina protne plášť dvojkužele v obrysových površkách a, b a rovinu ϱ v její spádové přímce. Spádová přímka s je osa a body A, B, které jsou průsečíky přímky s s površkami a a b, jsou hlavní vrcholy hyperboly, jejíž část je řezem pláště. Střed O této hyperboly je střed úsečky AB.

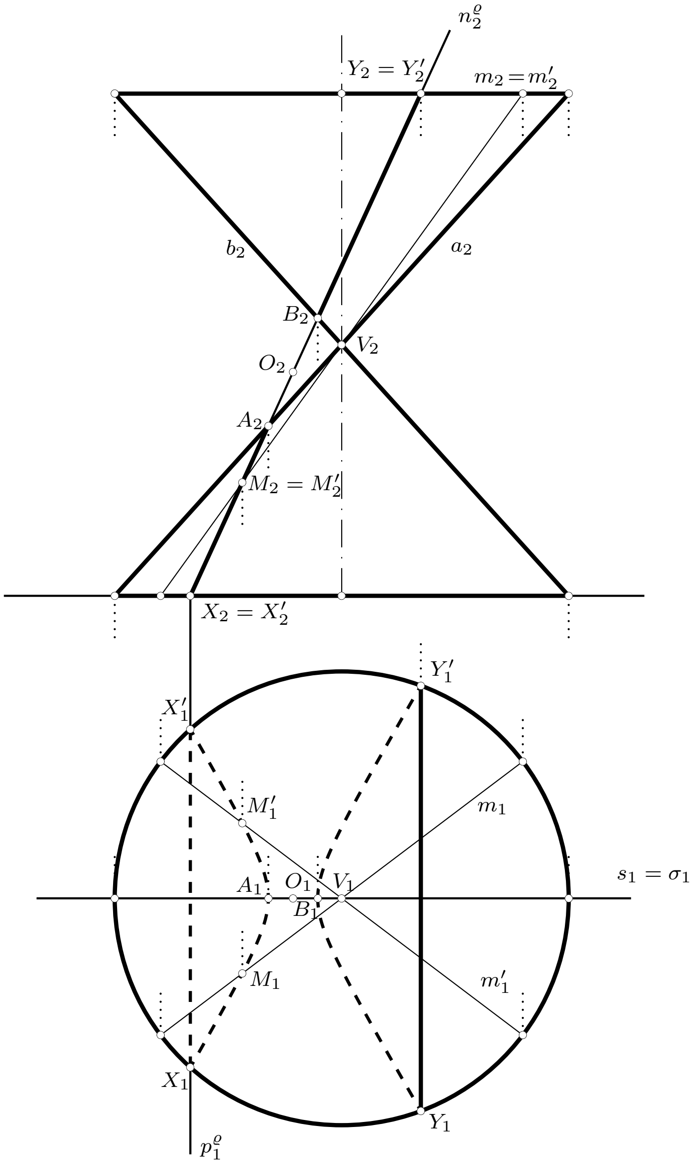
Nárysem řezu je dvojice úseček A_2X_2 a B_2Y_2. Půdorysem řezu pláště je část hyperboly, jejíž hlavní vrcholy jsou body A_1 a B_1, střed je bod O_1 a jedno ohnisko je bod V_1. Hyperbola je tedy dostatečně určena a můžeme sestrojit její asymptoty, oskulační kružnice a další body. Součástí půdorysu řezu je i dvojice úseček X_1X_1' a Y_1Y_1', ve kterých rovina řezu protíná podstavy dvojkužele.

Libovolný bod půdorysného průmětu řezu pláště můžeme odvodit z nárysu pomocí površek kužele, viz například body M a M'. Asymptoty hyperboly můžeme získat i následujícím způsobem (konstrukce již v obrázku není). Vedeme-li vrcholem kužele rovinu ϱ' rovnoběžnou s rovinou řezu, protne tato rovina kužel ve dvojici površek, které jsou rovnoběžné s asymptotami hyperboly, která tvoří řez pláště. □

Poznámka 5.35. Podobně jako jsme sestrojili parabolické a hyperbolické řezy kužele rovinami kolmými k nárysně, bychom mohli sestrojit i řezy obecnými rovinami, tj. rovinami, které k nárysně kolmé nejsou. Druhým průmětem řezu pláště by pak byla část kuželosečky stejného typu jako řez a pro určení této kuželosečky bychom potřebovali další speciální konstrukce.

5.6 Průsečík přímky s tělesem

Přímka protíná povrch tělesa v bodech, které budeme nazývat *průsečíky přímky s tělesem.* Počet průsečíků závisí na vzájemné poloze přímky a tělesa. Přímka může mít s povrchem hranolu (válce) nebo jehlanu (kužele) společnou úsečku bodů (přímka leží na plášti nebo v rovině podstavy), dva body, jeden bod a nebo žádný bod. Úlohu o nalezení průsečíků přímky s tělesem později využijeme při určování průniků těles.

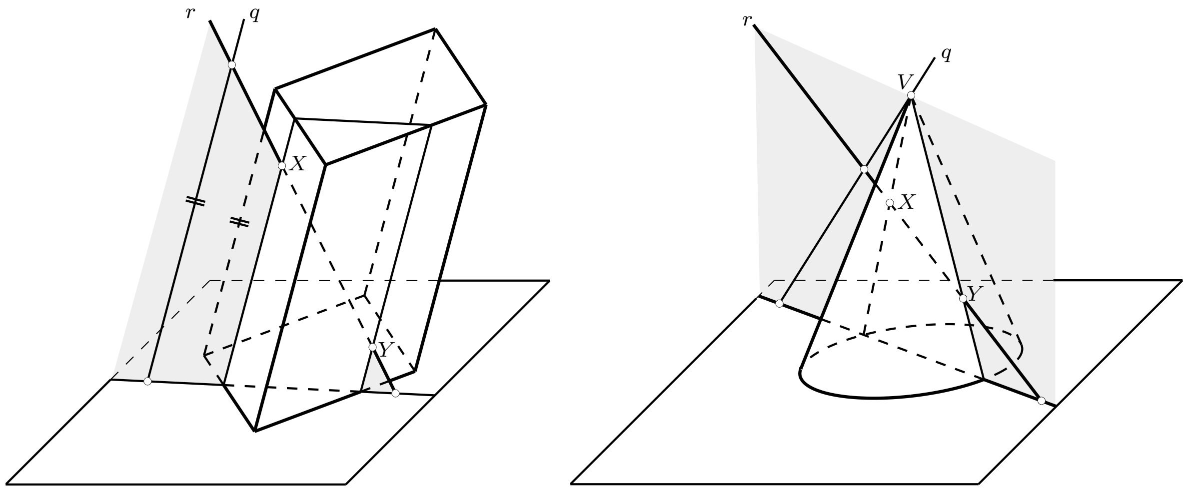


Obrázek 5.45: Řešení příkladu 5.34

Základní myšlenka pro konstrukci průsečíků přímky s tělesem je následující. Sestrojíme-li řez tělesa pomocnou rovinou, která obsahuje danou přímku, pak společné body obvodu řezu a přímky jsou hledané průsečíky přímky s tělesem.

Pomocnou rovinu vždy volíme tak, aby řez byl co nejjednodušší. Je-li daným tělesem hranol nebo válec, volíme rovinu, která je rovnoběžná s površkami tělesa. Řezem bude v tomto případě rovnoběžník. V Mongeově promítání můžeme v případě hranolu volit i rovinu kolmou k některé z průměten, jelikož pak bude v jednom průmětu řez zobrazen jako úsečka. V případě jehlanu a kužele volíme rovinu, která je vrcholová, tj. je určena danou přímkou a vrcholem tělesa. V tomto případě bude řezem tělesa trojúhelník.

Příklad 5.36. Určete průsečíky přímky r s pravidelným kolmým hranolem $ABCDEFGH$ s podstavou v půdorysně.



(a) S hranolem (b) S kuželem

Obrázek 5.46: Průsečíky přímky s tělesem

Řešení. Jelikož se jedná o kolmý hranol, který má podstavu v půdorysně, bude vhodné volit rovinu ϱ, která prochází přímkou r a je kolmá k půdorysně, viz obrázek 5.47. Půdorysná stopa této roviny splývá s průmětem přímky r_1. Jelikož je rovina kolmá k půdorysně, vidíme v půdorysu řez jako úsečku, která je společná přímce r_1 a podstavě hranolu. Průsečíky X_1, Y_1 přímky r_1 s podstavou jsou hledané průsečíky přímky s tělesem. Tyto průsečíky odvedeme po ordinálách na přímku r_2 a získáme tak body X_2 a Y_2. V obrázku je zobrazen i příslušný řez. □

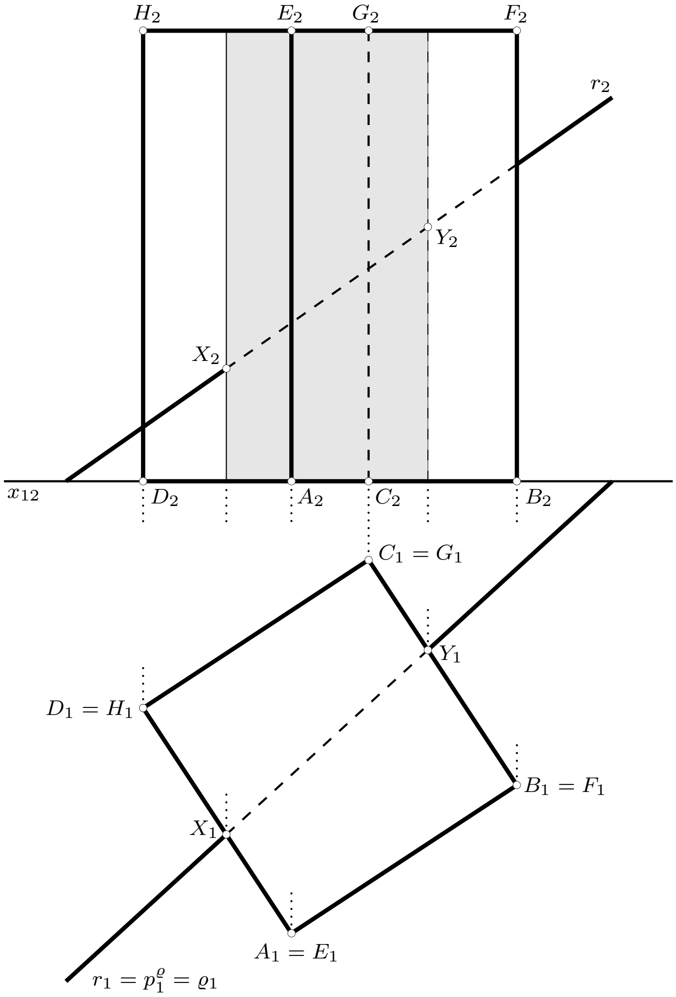
Příklad 5.37. Určete průsečíky přímky r se šikmým hranolem $ABCDEFGH$ s podstavou v půdorysně.

Řešení. Ukážeme si dvě možná řešení. V obrázku 5.48 volíme rovinu ϱ, která prochází přímkou r a je kolmá k nárysně. Nárysná stopa této roviny splývá s přímkou r_2 a celá rovina se promítá do své stopy. Řezem hranolu touto rovinou je rovnoběžník, který v náryse vidíme jako úsečku, která je společná přímce r_2 a mnohoúhelníku, který je obrysem hranolu. Jednotlivé vrcholy A_2', B_2', C_2', D_2' řezu jsou průsečíky hran s přímkou r_2. První průměty těchto bodů získáme na ordinálách na odpovídajících hranách v půdoryse.

První průměty X_1 a Y_1 průsečíků přímky r_1 s tělesem jsou pak společné body řezu a přímky r_1. Body X_2 a Y_2 leží na přímce r_2 a na příslušných ordinálách.

V obrázku 5.49 zvolíme rovinu ϱ, která prochází přímkou r a je rovnoběžná s hranami hranolu. Připomeňme, že rovina je rovnoběžná s přímkou právě tehdy, když obsahuje přímku, která je s danou přímou rovnoběžná. Rovinu ϱ tak určíme pomocí dvou různoběžek. Jedna z nich bude přímka r a druhá bude přímka q rovnoběžná s hranami daného hranolu.

Zvolíme na přímce r libovolný bod R a jím vedeme přímku q, která je rovnoběžná s hranami hranolu, tj. $q_1 \parallel A_1E_1$ a $q_2 \parallel A_2E_2$. Určíme půdorysné stopníky P_1 a P_1' přímek r a q, čímž dostaneme stopu p_1^ϱ roviny ϱ. Tato stopa protne podstavu hranolu v úsečce 12, která je části řezu. Jelikož víme, že řezem bude rovnoběžník, jehož dvě strany jsou rovnoběžné s hranami hranolu, můžeme daný řez sestrojit.



Obrázek 5.47: Řešení příkladu 5.36

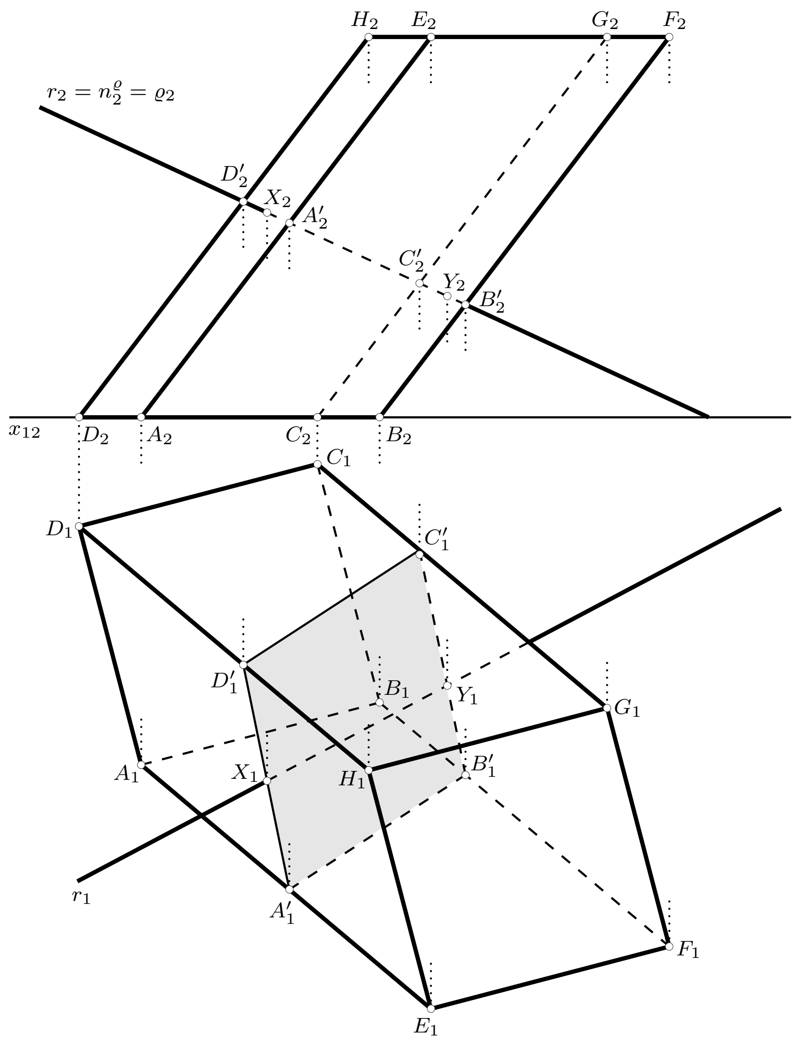
Společné body X_1 a Y_1 nalezeného řezu a přímky r_1 jsou hledané průsečíky přímky s tělesem. Jejich druhé průměty získáme na přímce r_2 a na příslušných ordinálách. V obrázku je sestrojen i nárys řezu, který k samotné konstrukci průsečíků není nutný.

□

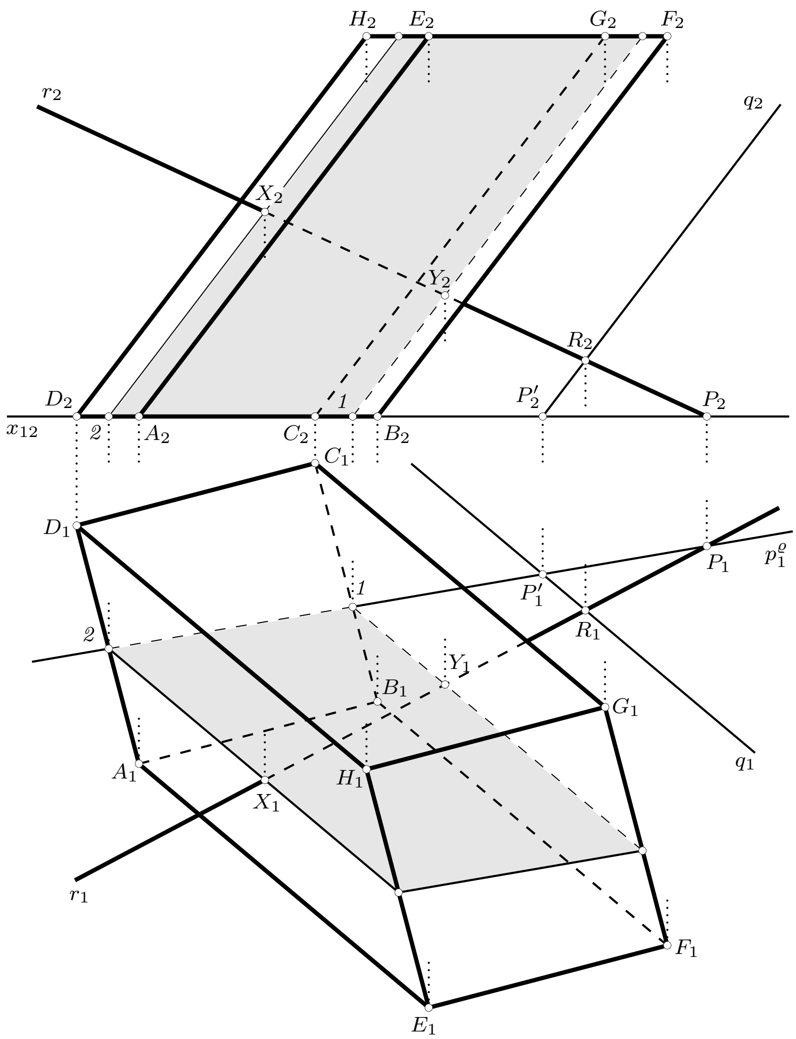
Příklad 5.38. Určete průsečíky přímky r s kosým válcem s podstavou v půdorysně.

Řešení. V případě šikmého válce má smysl prokládat přímkou r pouze rovinu ϱ, která je rovnoběžná s osou válce, jelikož obecně by řezem pláště válce rovinou kolmou k některé z průměten byla elipsa nebo její část.

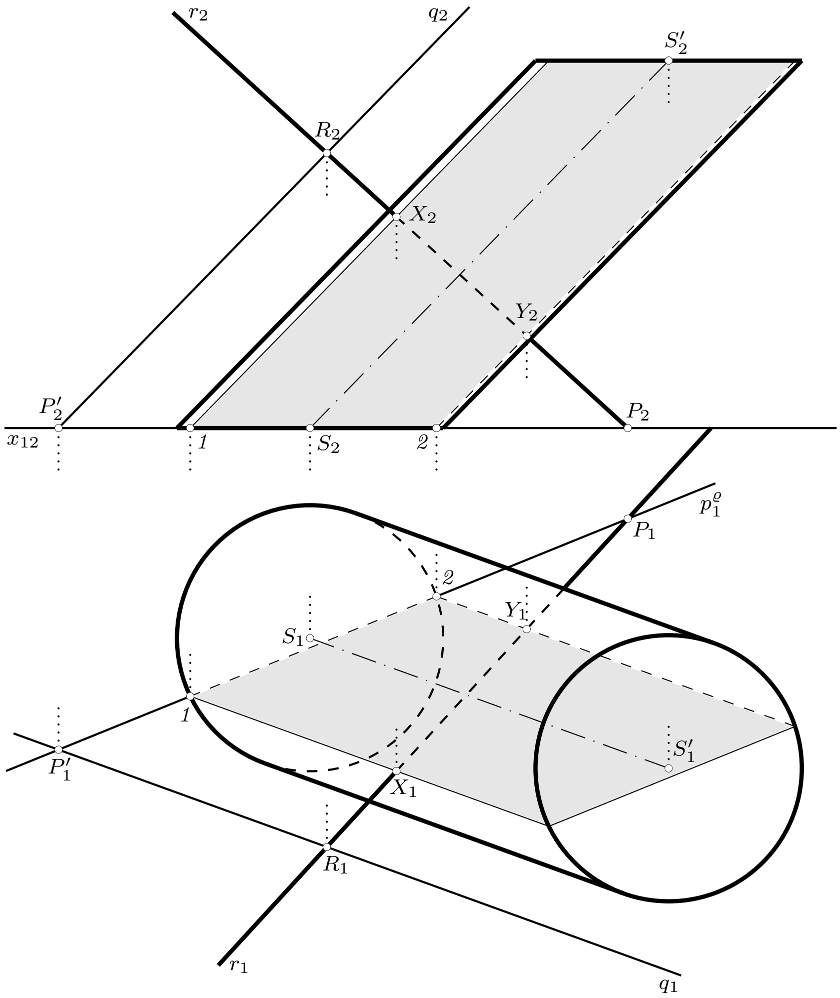
Zvolme tedy na přímce r bod R a jím veďme přímku q, která je rovnoběžná s osou válce, tj. $q_1 \parallel S_1S_1'$ a $q_2 \parallel S_2S_2'$, viz obrázek 5.50. Pomocí půdorysných stopníků P_1 a P_1' přímek r a q určíme půdorysnou stopu p_1^ϱ roviny ϱ. Tato stopa protne podstavu válce v úsečce 12, která je části řezu. Řezem bude rovnoběžník, jehož dvě strany jsou rovnoběžné s osou válce a řez tak můžeme sestrojit.



Obrázek 5.48: Řešení příkladu 5.37 pomocí roviny kolmé k nárysně



Obrázek 5.49: Řešení příkladu 5.37 pomocí roviny rovnoběžné s hranami



Obrázek 5.50: Řešení příkladu 5.38 pomocí roviny rovnoběžné s osou

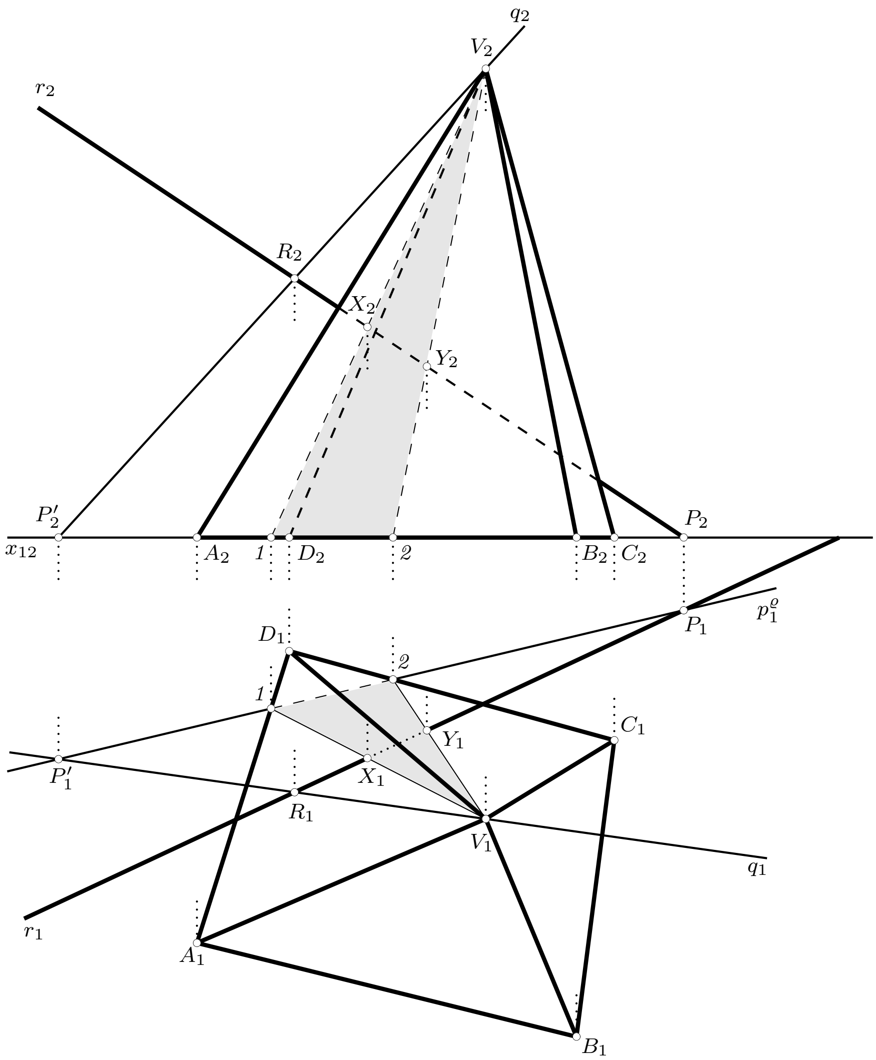
Společné body X_1 a Y_1 nalezeného řezu a přímky r_1 jsou hledané průsečíky přímky s válcem. Jejich druhé průměty X_2 a Y_2 leží na přímce r_2 a příslušných ordinálách. V obrázku je sestrojen i nárys řezu, který ale k samotné konstrukci průsečíků není potřeba. □

Příklad 5.39. Určete průsečíky přímky r se šikmým jehlanem $ABCDV$ s podstavou v půdorysně.

Řešení. V případě jehlanu je vhodná taková rovina, která obsahuje danou přímku r a vrchol jehlanu V. Řezem touto rovinu bude trojúhelník s jedním vrcholem V.

Zvolme tedy rovinu ϱ určenou přímkou r a bodem V, viz obrázek 5.51. Zvolíme-li na přímce r libovolný bod R, určují body V a R přímku q, která je různoběžná s přímkou r a rovina ϱ je tak určena dvojicí různoběžek r a q.

Určíme stopníky P_1 a P_1' přímek r a q. Tyto stopníky určují půdorysnou stopu p_1^ϱ roviny ϱ. Body 1 a 2, v kterých stopa p_1^ϱ protíná obvod podstavy, jsou dva zbývají vrcholy hledaného řezu.



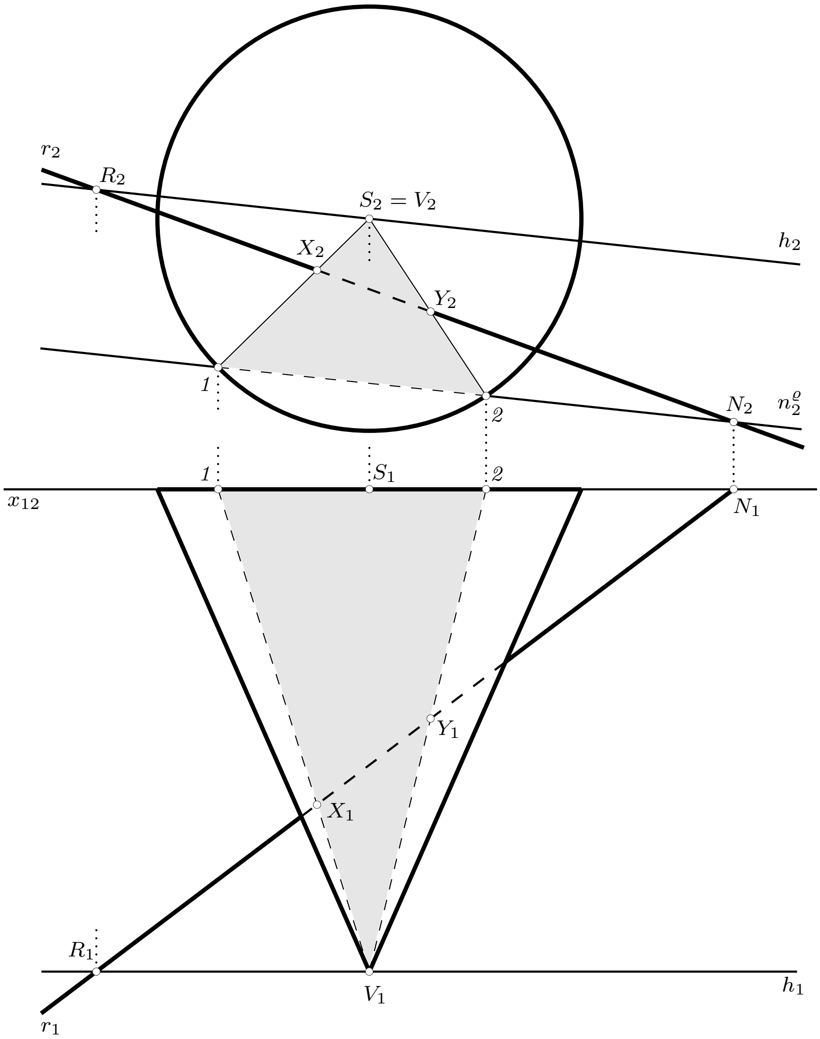
Obrázek 5.51: Řešení příkladu 5.39 pomocí roviny rovnoběžné s hranami

Body X_1 a Y_1, které jsou společné přímce r_1 a obvodu trojúhelníka $V_1 12$ jsou hledané průsečíky přímky s tělesem. Jejich druhé průměty X_2 a Y_2 leží na přímce r_2 na příslušných ordinálách. V obrázku je navíc sestrojen i nárys řezu, který ke konstrukci průsečíků není potřeba. □

Příklad 5.40. Určete průsečíky přímky r s rotačním kuželem s podstavou v nárysně.

Řešení. Hledáme-li průsečíky přímky s kuželem, postupujeme podobně jako v případě, kdy hledáme průsečíky přímky s jehlanem. Volíme tedy rovinu ϱ, která obsahuje přímku r a vrchol kužele V, viz obrázek 5.52. Řez kužele touto rovinu bude trojúhelník, jehož jeden vrchol je bod V.

Místo bodu na přímce r, jako jsme volili v předchozím příkladě, zvolme přímku h_1, $h_1 \parallel x_1 2$, $V_1 \in h_1$ a předpokládejme, že h_1 je průmět přímky h, která je různoběžná s přímkou r, tj. získáme tak bod $R_1 \in h_1 \cap r_1$. Druhý průmět h_2 přímky h je tak určen



Obrázek 5.52: Řešení příkladu 5.40

pomocí bodů V_2 a R_2 (leží na přímce r_2 a na ordinále procházející bodem R_1). Rovina ϱ je tedy určena pomocí přímek r a h, přičemž h je její horizontální hlavní přímka.

Pro nárysnou stopu n_2^ϱ roviny ϱ platí, že $n_2^\varrho \parallel h_2$ a $N_2 \in n_2^\varrho$, kde N_2 je nárysný stopník přímky r. Společné body 1 a 2 stopy n_2^ϱ a obvodu podstavy kužele jsou vrcholy hledaného řezu.

Společné body X_2 a Y_2 obvodu trojúhelníku $V_2 12$ a přímky r_2 jsou hledané průsečíky přímky s tělesem. Jejich druhé průměty X_1 a Y_1 leží na přímce r_1 na příslušných ordinálách. V obrázku je navíc sestrojen i půdorys řezu, který ke konstrukci průsečíků není potřeba. ☐

5.7 Průniky těles

Průnikem dvou těles je část prostoru ohraničená povrchy obou těles, tedy opět těleso, které je oběma daným tělesům společné[2]. Nás bude především zajímat množina všech bodů, které leží současně na povrchu obou těles. Množina těchto bodů se nazývá *průniková čára* nebo také *průnik ploch.* I když to není správné, užívá se i pro tuto čáru běžně termín „průnik těles“.

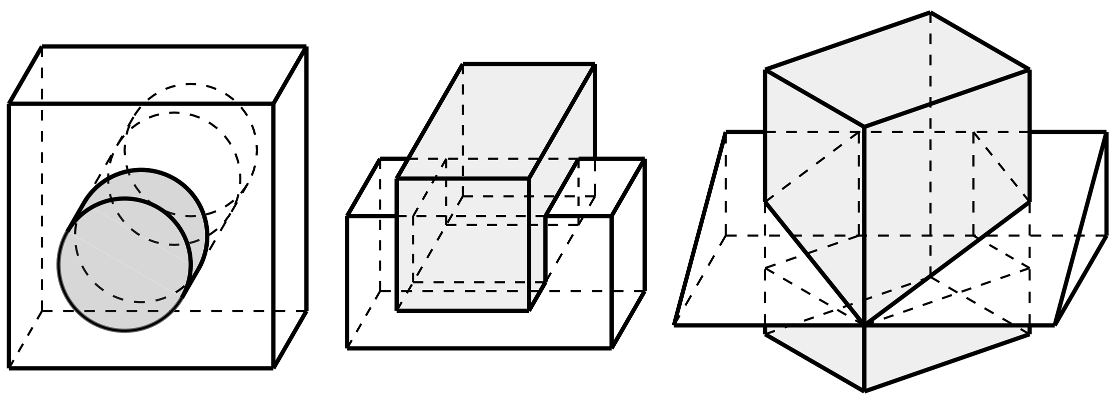
Tvar čáry průniku závisí na tvaru jednotlivých povrchů tělesa a jejich vzájemné poloze. Průnikem povrchů dvou těles může být:

i) prázdná množina – tělesa nemají žádné společné body,
ii) bod – povrchy těles se dotýkají v jednom bodě,
iii) úsečka – povrchy těles mají společnou jednu površku,
iv) křivka nebo křivky.

U základních těles může nastat průnik dvojího typu. Buď je průniková čára tvořena jednou uzavřenou křivkou, nebo je složena ze dvou uzavřených křivek. Podle toho rozlišujeme dva typy průniků:

a) *úplný průnik* – průsečná čára je tvořena dvěma uzavřenými křivkami, jednou částí průsečné křivky jedno těleso vstupuje do druhého a další částí křivky z něj vystupuje, tj. na jednom tělese neexistuje površka, která by neprotínala druhé těleso, neboli můžeme říci, že jedno těleso je „prostrčeno“ druhým tělesem, viz obrázek 5.53a),
b) *částečný průnik* – průsečná čára je tvořena jednou uzavřenou křivkou, každá plocha prostupuje druhou plochou jen zčásti, tj. na každé ploše existuje alespoň jedna hrana, která neprotíná druhou plochu, neboli můžeme říci, že jedno těleso je „zaklíněno“ do druhého, viz obrázek 5.53b).

Speciálním případem úplného průniku je situace na obrázku 5.53c), kde hrana jednoho hranolu protíná druhý hranol právě ve hraně. Takovémuto bodu říkáme *dvojný bod.*



(a) Úplný průnik (b) Částečný průnik (c) Průnik s dvojným bodem

Obrázek 5.53: Průniky těles

Části tělesa, které se nepodílí na průniku, se nazývají *liché části.* Jsou-li liché části na jednom tělese, máme úplný průnik; jsou-li liché části na dvou různých tělesech, jedná se

[2]Podobně bychom mohli definovat i průnik více než dvou těles.

o částečný průnik. Jedna nebo obě liché části se mohou zredukovat na bod, průnik pak má jeden nebo dva dvojné body.

5.7.1 Průniky hranatých těles

Při vyšetřování průniku dvou hranatých těles zjišťujeme průsečíky všech hran jednoho tělesa s povrchem druhého tělesa a zároveň také průsečíky všech hran druhého tělesa s povrchem prvního tělesa.

Základní úlohou při řešení průniků je určení průsečíku přímky s tělesem, přičemž víme, že při této úloze těleso řežeme vhodnou rovinou a poté určujeme společné body tohoto řezu a zadané přímky. Klíčem k řešení bude tedy vhodná volba rovin, které budeme prokládat jednotlivými hranami, přičemž cílem je, abychom mohli snadno sestrojovat řezy zadaných těles. V případě hranolů a jehlanů můžeme vhodné volby shrnout následujícím způsobem:

i) průnik dvou hranolů – roviny volíme tak, aby byly rovnoběžné s hranami obou hranolů,
ii) průnik dvou jehlanů – roviny volíme tak, aby procházely oběma vrcholy jehlanů,
iii) průnik jehlanu a hranolu – roviny volíme tak, že prochází vrcholem jehlanu a jsou rovnoběžné s hranami hranolu.

Při určování viditelnosti průsečné čáry využíváme toho, že průsečná čára je v průmětu viditelná, je-li průsečnicí dvou stěn v tomto průmětu viditelných, nebo je-li obrysová.

Postup řešení si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 5.41. Určete průnik kolmého trojbokého jehlanu $ABCV$ a pravidelného čtyřbokého jehlanu $EFGHU$. Oba jehlany mají podstavy v půdorysně.

Řešení. V tomto případě máme zvláštní polohu částečného průniku.

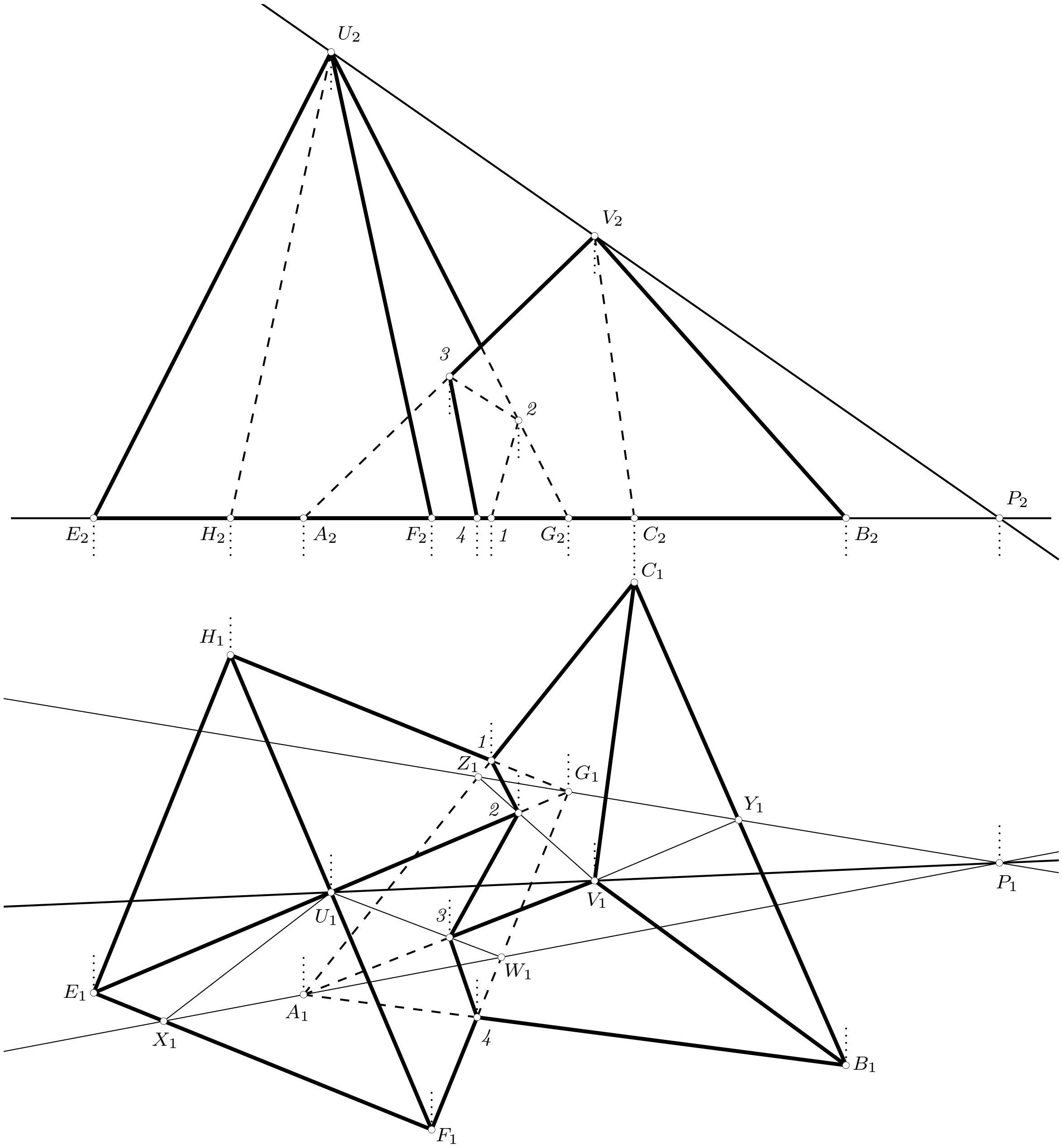
Budeme hledat průsečíky hran jehlanu $ABCV$ s povrchem jehlanu $EFGHU$ a obráceně, viz obrázek 5.54. Jelikož obě podstavy jsou v půdorysně, již ze zadání můžeme určit body *1* a *4*, kde bod *1* je průsečík hrany AC s hranou GH a bod *4* je průsečík hrany AB s hranou FG. Jimi určená úsečka *14*, je průsečnice podstav obou jehlanů.

Každou boční hranou jehlanu $ABCV$ proložíme vrcholovou rovinu takovou, která zároveň obsahuje vrchol U druhého jehlanu. Půdorysné stopy takovýchto rovin procházejí bodem P, který je stopníkem přímky UV. Každá takováto rovina protíná oba zadané jehlany v trojúhelníku.

Rovina obsahující hranu AV má jako svou půdorysnou stopu přímku A_1P_1, která protíná podstavu jehlanu $EFGHU$ v bodech W_1 a X_1. Řezem jehlanu $EFGHU$ je tak trojúhelník UWX. Společný bod *3* hrany AV a obvodu trojúhelníka UWX je bodem průnikové křivky. Hrany BV a CV se na průniku zřejmě nepodílí, jelikož půdorysné stopy P_1B_1 a P_1C_1 rovin obsahující tyto hrany (v obrázku nejsou zakresleny) neprotínají půdorys jehlanu $EFGHU$.

Nyní proložíme každou boční hranou jehlanu $EFGHU$ vrcholovou rovinu takovou, že zároveň obsahuje vrchol V druhého jehlanu. Půdorysné stopy těchto rovin opět procházejí bodem P. Rovina obsahující hranu GU má přímku P_1G_1 jako svou půdorysnou stopu. Přímka P_1G_1 protíná podstavu jehlanu $ABCV$ v bodech Y_1 a Z_1. Proto je řezem jehlanu $ABCV$ trojúhelník VYZ. Společný bod *2* hrany GU a trojúhelníku VYZ je bodem průsečné křivky. Hrany EU, FU a HU se na průniku nepodílejí. Jejich půdorysné stopy sice podstavu jehlanu $ABCV$ protínají, ale příslušné trojúhelníky řezů nemají s danými hranami společné body (pro přehlednost nejsou tyto řezy v obrázku zakresleny).

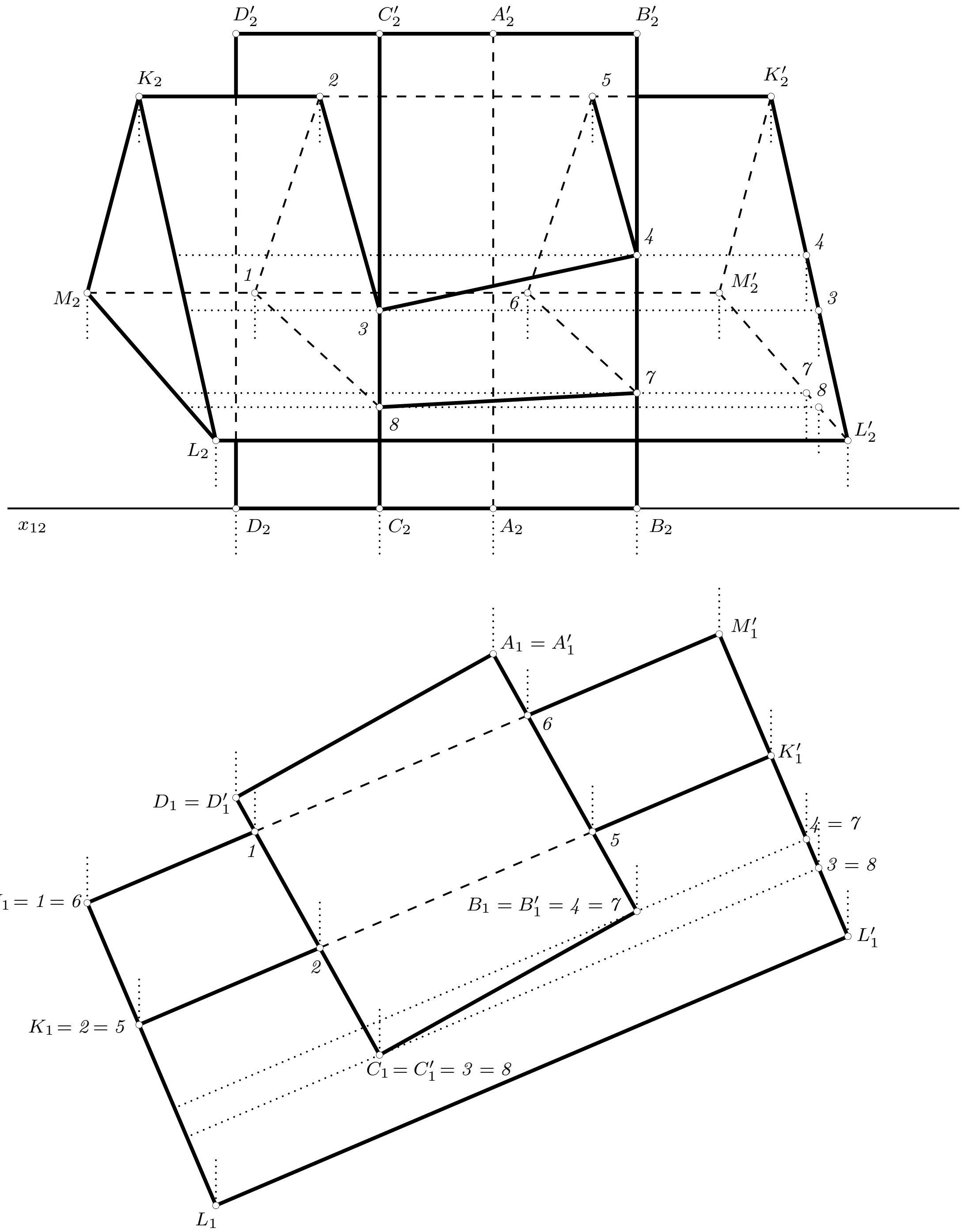
Jelikož žádné další průsečíky hran s tělesem neexistují, můžeme sestrojit průsečnou křivku a určit její viditelnost. □



Obrázek 5.54: Průnik dvou jehlanů

Příklad 5.42. Zobrazte průnik pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ s podstavou v půdorysně a kolmého trojbokého hranolu $KLMK'L'M'$, který má podstavu v rovině kolmé k půdorysně.

Řešení. Již ze zadání, viz obrázek 5.55, si můžeme povšimnout, že se jedná o částečný průnik. Hrany AA' a DD' totiž určitě nemají žádný průnik s hranolem $KLMK'L'M'$, je tak k nim přilehlá jedna lichá část, podobně hrana LL' nemá zřejmě žádný průnik s hranolem $ABCDA'B'C'D'$, a je k ní proto přilehlá druhá lichá část.



Obrázek 5.55: Průnik dvou hranolů

Jednotlivými hranami obou těles, které se podílí na průniku, budeme prokládat roviny kolmé k půdorysně a rovnoběžné s bočními hranami hranolu $KLMK'L'M'$. Takto zvolené roviny protínají oba hranoly v obdélnících, případně přímo v jejich hranách.

Abychom v průnikových bodech neměli zmatek a hlavně abychom se neztratili v pořadí, v jakém máme body spojit, zavedeme vhodné číslování.

S číslováním začneme od liché části příslušné hraně DD'. Stejné číslo vždy přiřadíme

i) průmětu vrcholu podstavy, kterým prochází vyšetřovaná hrana,
ii) jednomu z bodů, ve kterých protne stopa použité roviny obrazec podstavy druhého tělesa,
iii) průnikovému bodu sledované hrany se stranou řezového obdélníku na druhém tělese.

V tomto případě začneme číslovat od liché části při hraně DD'. Jedničku jsme přiřadili bodu M_1, což je vrchol podstavy, kterým prochází vyšetřovaná hrana M_1M_1', a bodu ve kterém zvolená rovina protíná hranu C_1D_1 podstavy hranolu, tento bod je zároveň bodem, v kterém hrana M_1M_1' protíná řez hranolu $ABCDA'B'C'D'$ zvolenou rovinou.

Pokračujeme dále směrem k hraně KK' (mohli jsme si zvolit i směr ke hraně LL') a ve stejném duchu provedeme označení bodu *2*. Další hranou v pořadí je hrana CC'. Trojkou označíme jak bod C_1, který je průmětem vrcholu podstavy, jímž prochází vyšetřovaná hrana, tak bod, ve kterém řez hranolu $KLMK'L'M'$ (zobrazuje se jako úsečka rovnoběžná s bočními hranami) protíná podstavu. Tohoto bodu využijeme později k sestrojení nárysu. Při označování je nutné si uvědomovat, kde se právě nacházím, jelikož jsme šli v pořadí hran MM', KK', nachází se bod *3* ve stěně $KK'L'L$, tj. jedná se o „horní “ průsečík hrany CC' s hranolem $KLMK'L'M'$.

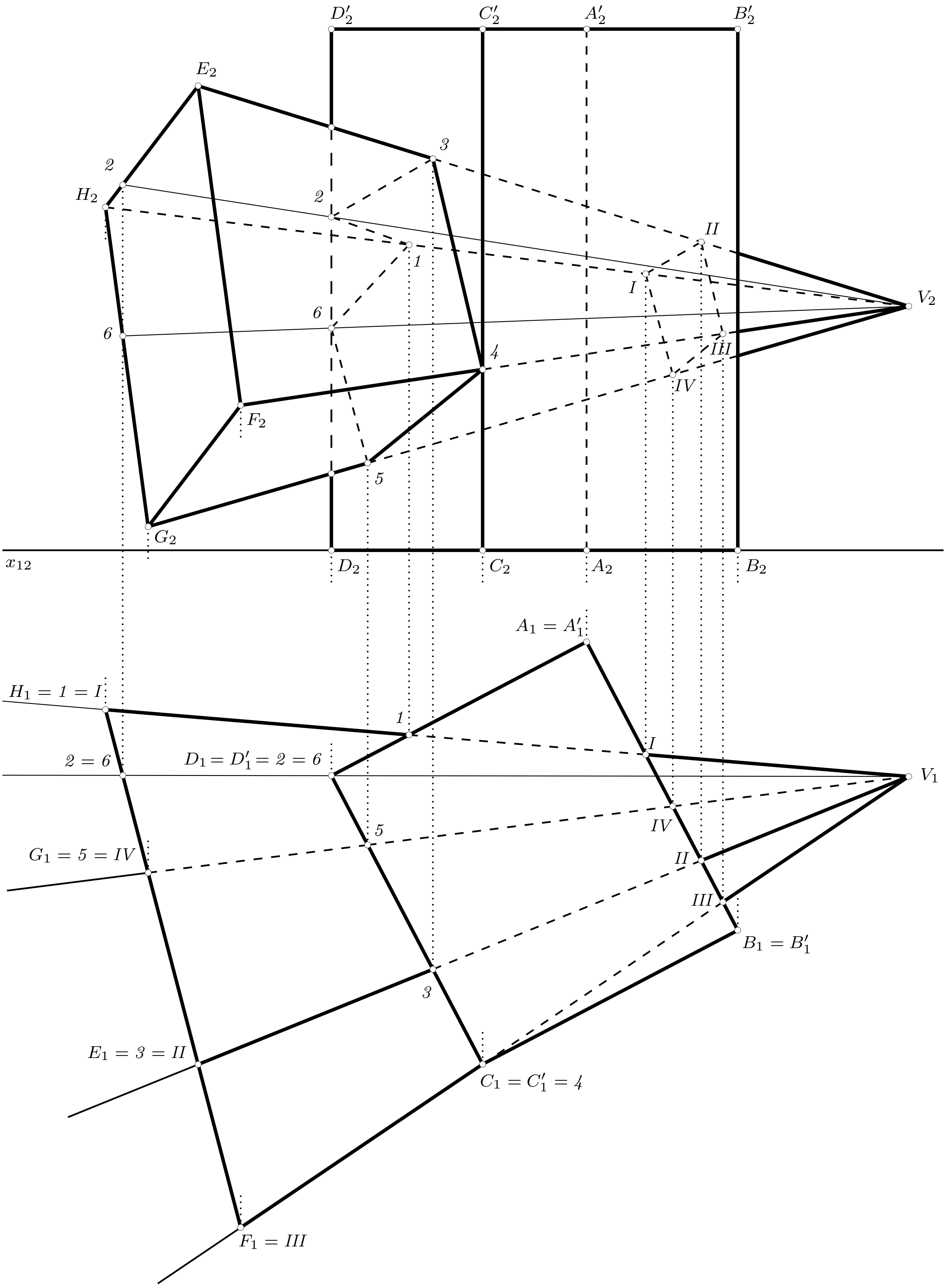
Pokračujeme dále a označíme body *4* (jelikož jsme nepřešli přes žádnou jinou hranu je i bod *4* „horní“ průsečík hrany BB' s hranolem $KLMK'L'M'$), *5* a *6*, čímž se dostaneme opět na lichou část a vracíme se zpět. Sedmičkou opět označíme bod B_1, přičemž, jelikož poslední hrana byla MM', je bod *7* ve stěně $LMM'L'$. Podobně označíme bod *8*, který leží ve stejné stěně, body *7* a *8* jsou tedy „spodní“ průsečíky hran BB' a CC' s hranolem $KLMK'L'M'$. V dalším kroku se již dostaneme zpět na začátek do bodu *1* a jsme tedy hotovi.

Přenesení bodů do nárysu se dá odvodit pomocí obrázku. Využívá se k tomu buď jen ordinál (body *1*, *2*, *5* a *6*) a nebo označených bodů, ve kterých použité roviny proťaly podstavu tělesa, což nám umožní sestrojit průměty příslušných řezů v nárysе (body *3*, *4*, *7* a *8*). Tedy například bod *3*, který leží na hraně $K_1'L_1'$ odvedeme po ordinále na hranu $K_2'L_2'$. Jelikož rovina řezu je rovnoběžná s bočními hranami hranolu $KLMK'L'M'$, promítá se část řezu ve stěně $LL'M'M$ jako úsečka rovnoběžná s hranami. Průsečík této úsečky a hrany CC' je hledaný průmět bodu *3* do nárysu.

Vzhledem k tomu, že se jedná o částečný průnik, je průniková čára jediná uzavřená křivka, která vznikne spojením bodu v daném pořadí, tj. *123456781*. □

Příklad 5.43. Zobrazte průnik kolmého čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ s podstavou v půdorysně a pravidelného čtyřbokého jehlanu $EFGHV$ s podstavou v rovině kolmé k půdorysně.

Řešení. Ze vzájemné polohy těles, viz obrázek 5.56, vidíme, že v tomto případě se jedná o úplný průnik. Obě liché části jsou totiž na hranolu. Jedna lichá část je u hrany AA' a druhá část je u hrany BB'. Průniková čára se tedy bude skládat ze dvou prostorových křivek.



Obrázek 5.56: Průnik jehlanu s hranolem

Postupujeme obdobně jako v předchozích příkladech. Pro určení průsečíku hran jednoho tělesa s povrchem druhého tělesa budeme používat rovin, které jsou kolmé k půdorysně (a tedy i rovnoběžné s bočními hranami hranolu) a procházejí vrcholem V jehlanu. Tyto roviny protínají hranol v obdélnících a jehlan v trojúhelnících, případně přímo v hranách těchto těles. Všechny tyto řezy se do půdorysu promítají jako úsečky.

S číslováním začneme u liché části příslušné hraně AA'. Zvolíme si směr, ve kterém se budeme pohybovat, tj. zda-li jdeme od hrany HV k hraně EV nebo k hraně GV, a postupně očíslujeme body *1*, *2*, *3* a *4*. V obrázku jsme zvolili směr od hrany HV k hraně EV, čili jsme se pohybovali v „horní“ části jehlanu. U bodu *4* se zastavíme, jelikož jsme dorazili k druhé liché části a půjdeme zpět, čímž získáme body *5* a *6*, které jsou v „dolní“ části jehlanu.

Nyní se budeme věnovat druhé části průniku, pro kterou použijeme (pro přehlednost) římské číslice. Opět začneme u liché části příslušné k hraně AA'. Postupně označíme body *I*, *II* a *III* (v „horní“ části), čímž se dostaneme na druhou lichou část a při cestě zpět označíme bod *IV* (v „dolní“ části).

Podobně jako v předchozím příkladě odvedeme body do nárysu a získáme tak druhé průměty průnikových křivek. Úsečky spojující body *3*, *4* a *5* leží jako jediné na viditelných stěnách a jsou tedy vidět. Ostatní hrany průnikových čar jsou neviditelné. □

5.7.2 Průnik oblých těles

Určení průniku dvou oblých těles, v případě, kdy ani jedno z nich není koule, bychom mohli řešit číslovací metodou podobně jako jsme to dělali při hledání průniku hranatých těles. Na každém tělese bychom si zvolili dostatečný počet površek a vyšetřovali bychom průsečíky povrchových přímek jednoho tělesa s druhým a naopak. Pro určení lichých částí bychom použili tzv. tečné roviny, tj. roviny, které se daných těles dotýkají. Tento postup by byl ovšem technicky velmi náročný a nepřehledný. Existuji sice i příklady, kdy jiný postup nelze použít, ale těmi se nebudeme zabývat.

K sestrojování průniků oblých těles budeme používat vhodně zvolené plochy. Za pomocné plochy budeme volit roviny (jako jsme již zvyklí z předchozí části) nebo kulové plochy. Speciální a zároveň nejčastější kategorii tvoří rotační tělesa. Při určovaní jejich průniků hraje roli vzájemná poloha jejich os. V závislosti na této poloze můžeme úlohy rozdělit na tři kategorie:

a) *Osy rotačních těles jsou rovnoběžné*
V tomto případě volíme jako pomocné plochy roviny, které jsou kolmé ke směru os daných těles. Takto zvolené roviny protínají pláště obou těles v kružnicích.

b) *Osy rotačních těles jsou různoběžné*
Jako pomocné plochy volíme kulové plochy se středem v průsečíku os daných těles. Proto má kulová plocha společnou osu s oběma tělesy a průnik kulové plochy a pláště tělesa je kružnice.

c) *Osy rotačních těles jsou mimoběžné*
V tomto případě neexistuje žádná univerzální metoda, záleží vždy na konkrétním zadání. Často se volí roviny, které jsou kolmé k jedné ose, nebo roviny, které jsou rovnoběžné s oběma osami.

Navíc můžeme někdy použít i následujícího faktu. Máme-li dány dvě základní rotační tělesa[3] (válec, kužel, koule), jejichž osy jsou různoběžné (tyto osy určují tzv. *rovinu symetrie*, podle které jsou obě tělesa symetrická), pak jejich průnikem je prostorová křivka, jejíž průmět do roviny rovnoběžné s jejich rovinou symetrie je dvojná křivka, která se zobrazí jako kuželosečka. V případech, kdy se dá oběma plochám vepsat společná kulová plocha, se tato dvojná křivka rozpadne do dvou kuželoseček, které se do roviny symetrie promítají jako dvě úsečky.

Příklad 5.44. Zobrazte průnik rotačního válce s podstavou v půdorysně a koule, zadaní viz obrázek 5.57

Řešení. Jelikož mají tělesa rovnoběžné osy, budeme ke zjišťování jednotlivých bodů průnikové křivky používat pomocných rovin, které jsou kolmé k ose válce. Navíc, jelikož se tělesa dotýkají v bodě U, bude tento bod dvojným bodem průnikové křivky. Nejprve si ukážeme konstrukci obecného bodu této křivky.

Zvolme libovolnou rovinu ${}^1\varrho$, která je kolmá na osu válce. Tato rovina protíná povrch válce i koule v kružnicích, které se v nárysе zobrazují jako úsečky o délce průměru těchto kružnic. V půdoryse řez pláště válce splývá s průmětem válce a řez kulové plochy se promítá jako kružnice ${}^1k_1$. Do této kružnice se zároveň promítá i řez kulové plochy rovinou ${}^1\varrho'$, která je symetrická s rovinou ${}^1\varrho$ podle středu kulové plochy. Poloměr těchto kružnic odměříme z nárysu.

Společné body $\mathit{1}$, $\mathit{1}'$ a $\mathit{2}$, $\mathit{2}'$ kružnice ${}^1k_1 = {}^1k_1'$ s průmětem pláště válce jsou hledané body průnikové čáry. Do nárysu tyto body přeneseme po ordinálách. Opakováním tohoto postupu si můžeme vyrobit dostatečný počet bodů pro konstrukci průnikové čáry.

Nyní najdeme body, ve kterých se průniková křivka dotýká obrysu válcové plochy. Tyto body budou navíc i body přechodu viditelnosti. Jelikož mají ležet na obrysu válce, musí ležet v rovině σ, která prochází osou válce a je rovnoběžná s nárysnou. V půdoryse tyto body $3 = 3'$ a $4 = 4'$ vidíme jako průsečíky roviny σ s obvodem průmětu válce. K jejich odvození do nárysu použijeme opačný postup k tomu, jak jsme získali obecný bod řezu.

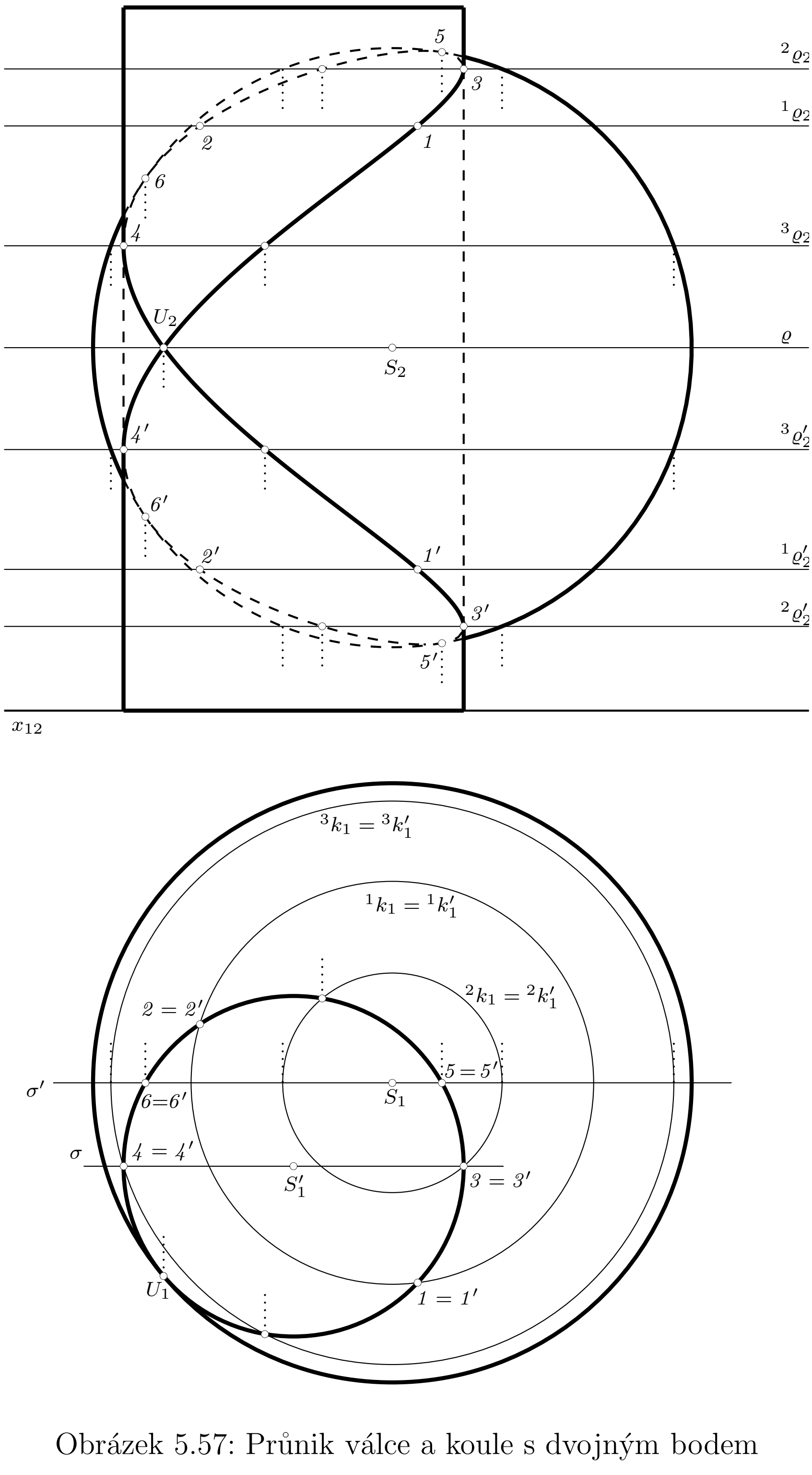
Bodem $\mathit{3} = \mathit{3}'$ prochází kružnice ${}^2k_1 = {}^2k_1'$, která odpovídá řezům kulové plochy rovinami ${}^2\varrho$ a ${}^2\varrho'$, odvodíme-li tyto řezy do nárysu, kde se zobrazují jako úsečky, dostaneme tak nárysy bodů $\mathit{3}$ a $\mathit{3}'$, které leží na těchto úsečkách a na ordinále. Podobně získáme i body $\mathit{4}$ a $\mathit{4}'$ pomocí odvození řezů, které odpovídají kružnici ${}^2k_1 = {}^2k_1'$.

Navíc ještě určíme body, kde se průniková křivka dotýká obrysu kulové plochy. V půdoryse tyto body $\mathit{5} = \mathit{5}'$ a $\mathit{6} = \mathit{6}'$ leží v rovině σ', která prochází středem kulové plochy a je rovnoběžná s nárysnou, a na obvodu průmětu válce. Do nárysu je odvodíme po ordinálách.

Pokud jsme si vyrobili dostatečný počet obecných bodů, můžeme nyní všechny body spojit a dostaneme tak průnikovou křivku. □

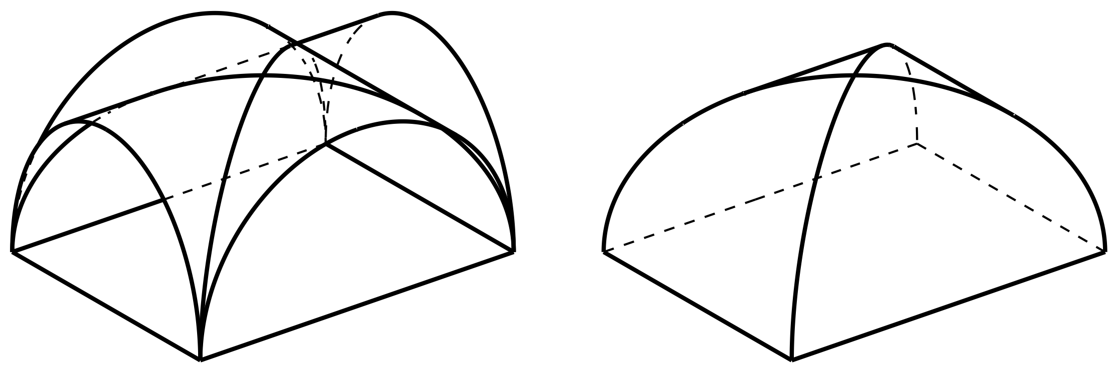
Nyní se zaměříme na průnik dvou válcových ploch, který má významné uplatnění v technické praxi. Máme-li dvě rotační válcové plochy o stejném poloměru, jejichž osy jsou různoběžné, pak jim jistě lze vepsat společnou kulovou plochu. Tento fakt znamená, že jejich průniková čára se rozpadne na dvě kuželosečky, v tomto případě jimi budou elipsy.

[3]Tvrzení platí i pro obecnější skupinu těles, tzv. rotační kvadratické plochy, tj. tělesa, která vzniknou rotací kuželosečky kolem nějaké její osy.



Obrázek 5.57: Průnik válce a koule s dvojným bodem

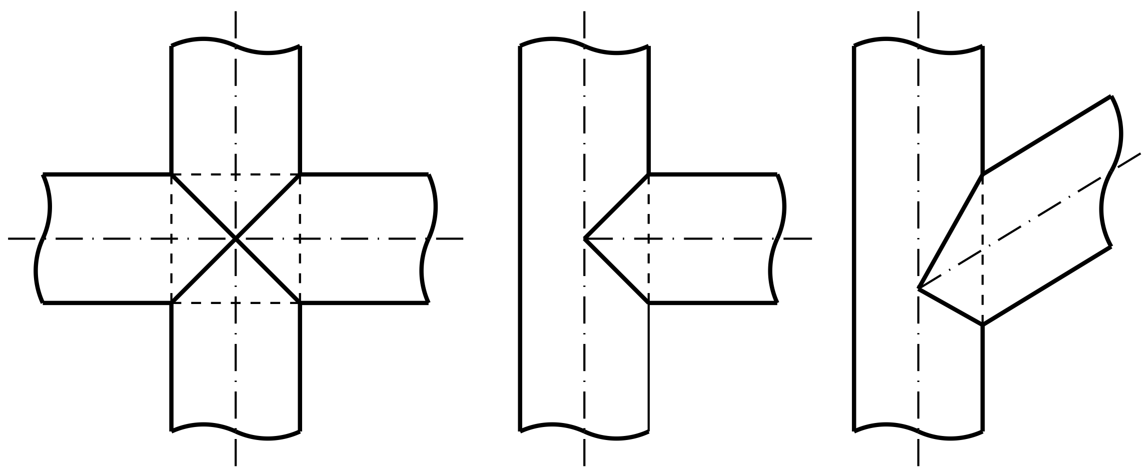
Tento případ je nejdůležitější, můžeme jej spatřit například v historických budovách jako klenbu dvou kolmo se křižujících chodeb s valeným stropem, viz obrázek 5.58a). Jestliže budeme uvažovat část průniku, která je společná dvěma takovýmto válcům, pak jeho povrch je tzv. klášterní klenba, kterou je možnost spatřit jako strop na kapli a jiných historických místnostech, viz obrázek 5.58b).



(a) Křížová klenba (b) Klášterní klenba

Obrázek 5.58: Uplatnění průniků rotačních válcových ploch

Další aplikací průniku dvou válcových ploch je spojování potrubí, viz obrázek 5.59, kde jsou zobrazeny situace, které nastanou při průniku potrubí o stejném průměru. Případ, kdy je jedno potrubí menšího průměru, si ukážeme v následujícím příkladě.

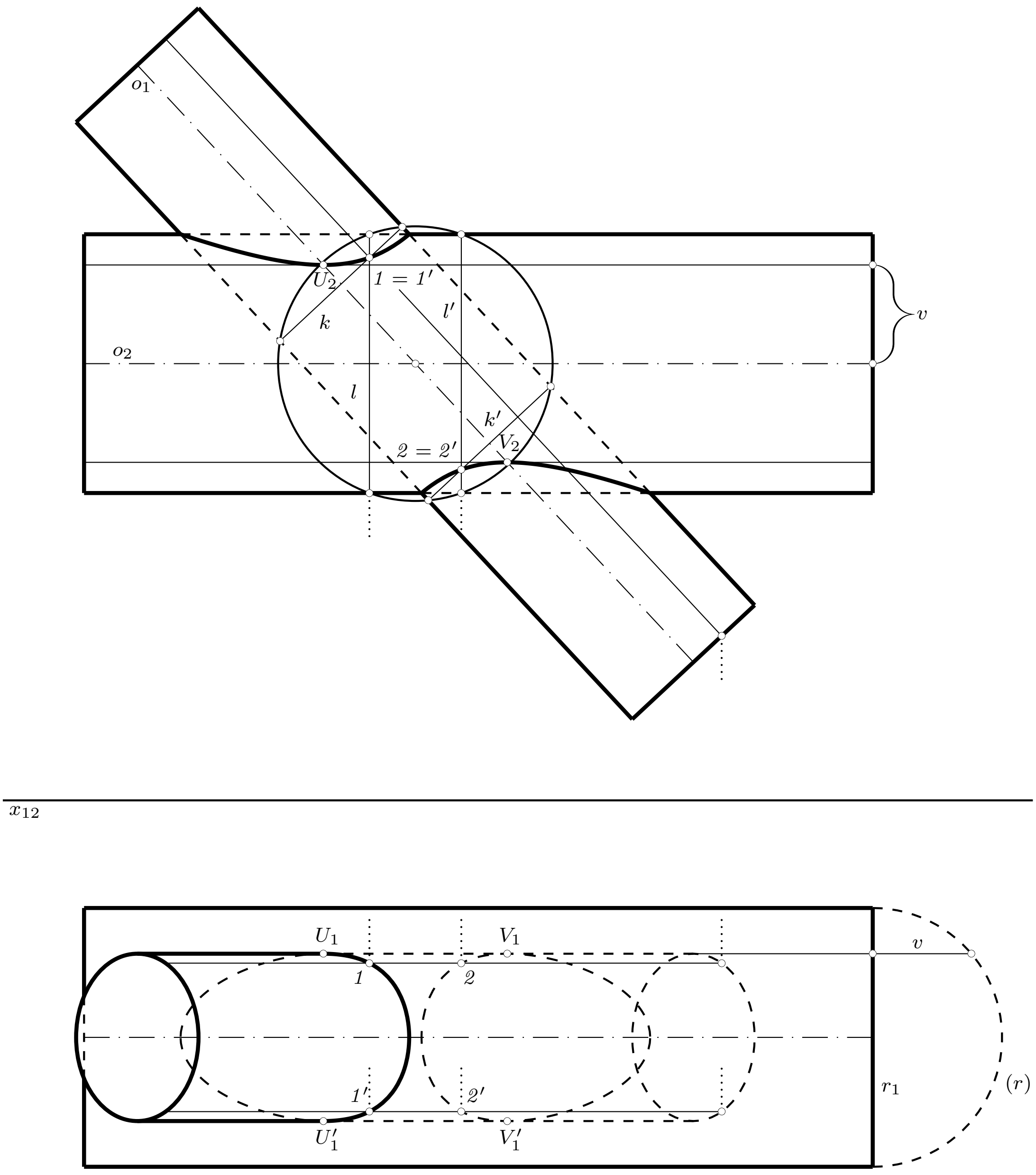


(a) křížový kus (b) T-kus (c) odbočka

Obrázek 5.59: Válcové potrubí

Příklad 5.45. Zobrazte průnik dvou rotačních válců $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ s poloměry podstav $r_1 < r_2$ a osami ${}^1o \parallel \nu$ a ${}^2o \parallel x_{12}$, které jsou různoběžné.

Řešení. Jelikož mají válce různoběžné osy, použijeme k určování bodů průnikové čáry kulové plochy, které mají svůj střed v průsečíku os válců, viz obrázek 5.60.



Obrázek 5.60: Průnik dvou válců

Průnik kulové plochy s každým se zadaných válců je dvojice kružnic, která se (díky tomu, že válce mají osy rovnoběžné s nárysnou) do nárysu zobrazí jako dvojice rovnoběžných úseček. Krajní body těchto úseček jsou průsečíky obrysu kulové plochy s obrysy jednotlivých válců. Každý průsečík takto vzniklých úseček, v našem obrázku jsou to body $1 = 1'$ a $2 = 2'$, odpovídá dvojici splývajících bodů průnikové křivky.

Do půdorysu odvedeme tyto body pomocí površek na válci $\mathcal{V}_1$, který není vzhledem k půdorysně ve speciální poloze. U těchto površek můžeme totiž snadno odvodit bod, který mají společný s podstavou válce.

Kromě obecný bodů průnikové křivky, kterých můžeme předchozím způsobem vyrobit libovolný počet, najdeme ještě přesně body v kterých se průniková křivka dotýká obrysu válce $\mathcal{V}_1$. Tyto body získáme jako průsečíky obrysových površek půdorysu válce $\mathcal{V}_1$ s pláštěm válce $\mathcal{V}_2$.

S půdorysným průmětem obrysové površky půdorysu válce $\mathcal{V}_1$ splývá i půdorys dvojice površek na válci $\mathcal{V}_2$. Abychom určili nárys těchto površek válce $\mathcal{V}_2$, sklopíme jeho podstavu do půdorysny. V tomto sklopení vidíme vzdálenost v daných površek od osy válce ve skutečné velikosti. Můžeme tak zobrazit nárysy těchto površek jako úsečky rovnoběžné s nárysem osy ${}^2o$ ve vzdálenosti v. Nárys obrysových površek půdorysu válce $\mathcal{V}_1$ splývá s nárysem osy ${}^1o$.

Jako průsečíky získaných površek dostáváme body U_2 a V_2, které jsou v nárysе „nejnižším“ a „nejvyšším“ bodem průmětu průnikové křivky. Odvozením těchto bodů do půdorysu (pomocí ordinál) získáme body U_1, U_1' a V_1, V_1', v nichž se průniková křivka dotýká obrysu válce $\mathcal{V}_1$. Body U_1 a U_1' jsou zároveň body přechodu viditelnosti. □

V předchozích dvou příkladech jsme ilustrovali konkrétní využití dvou obecných postupů při hledání průnikových křivek rotačních těles. Na závěr této části si ukážeme, jak se dá postupovat v případě, kdy jsou osy těles mimoběžné.

Příklad 5.46. Zobrazte průnik dvou rotačních kuželů $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$. Podstava kužele $\mathcal{K}_1$ leží v půdorysně a podstava kužele $\mathcal{K}_2$ leží v nárysně. Osy kuželů jsou mimoběžné.

Řešení. V tomto případě bude nejvhodnější jako pomocné plochy volit roviny, které procházejí oběma vrcholy kuželů (jedná se v podstatě o analogickou situaci jako při řešení průniku dvou jehlanů). Takto zvolené roviny budou protínat povrch každého kužele v trojúhelníku. Řešení viz obrázek 5.61

Půdorysná stopa roviny procházející vrcholy V a V' daných kuželů musí procházet půdorysným stopníkem P přímky VV'. Zvolíme-li libovolně vhodnou rovinu, protne její půdorysná stopa obvod podstavy kužele $\mathcal{K}_1$ v bodech *1* a *2*, které nám umožní sestrojit půdorys řezu pláště kužele $\mathcal{K}_1$ zvolenou rovinou. Tento řez můžeme snadno po ordinálách přenést i do nárysu.

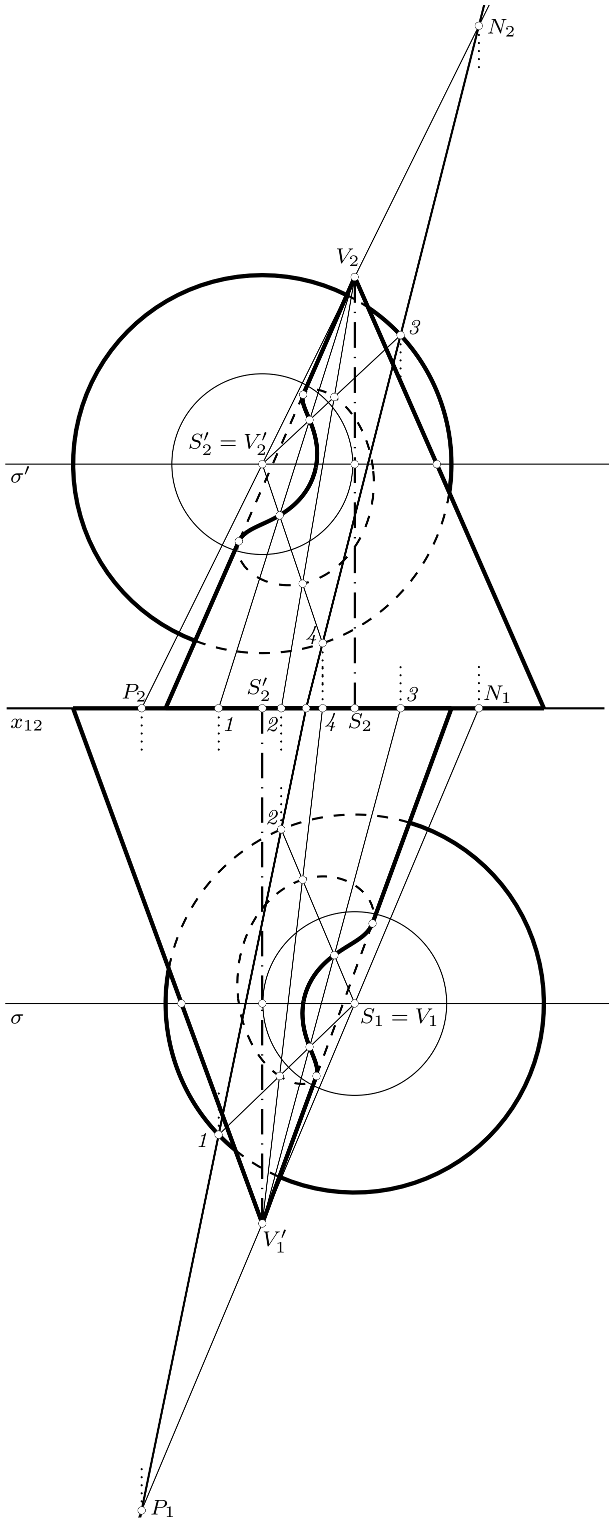
Podobně nárysná stopa zvolené roviny řezu protne obvod kužele $\mathcal{K}_2$ v bodech *3* a *4*, které určí nárys řezu pláště kužele $\mathcal{K}_2$. Půdorys tohoto řezu získáme opět s využitím ordinál.

Společné body trojúhelníků *12*V_1 a *34*V_2 jsou body průnikové čáry. Opakováním tohoto postupu získáme libovolný počet dalších bodů průnikové čáry.

Na závěr ještě určíme body, v kterých se průniková čára dotýká obrysů kuželů.

Pro určení bodů, v kterých se nárys průnikové čáry dotýká obrysu kužele $\mathcal{K}_1$, proložíme vrcholem V_1 tohoto kužele rovinu σ, která je rovnoběžná s nárysnou. Tato rovina řízne kužel $\mathcal{K}_1$ v trojúhelníku, jehož nárysem je obrys tohoto kužele. Kužel $\mathcal{K}_2$ tato rovina řízne v kružnici, která se v půdorysně zobrazí jako úsečka a v nárysе jako kružnice ve skutečné velikosti (její poloměr vidíme v půdoryse). Společné body této kružnice s obrysem kužele $\mathcal{K}_1$ jsou hledané body dotyku.

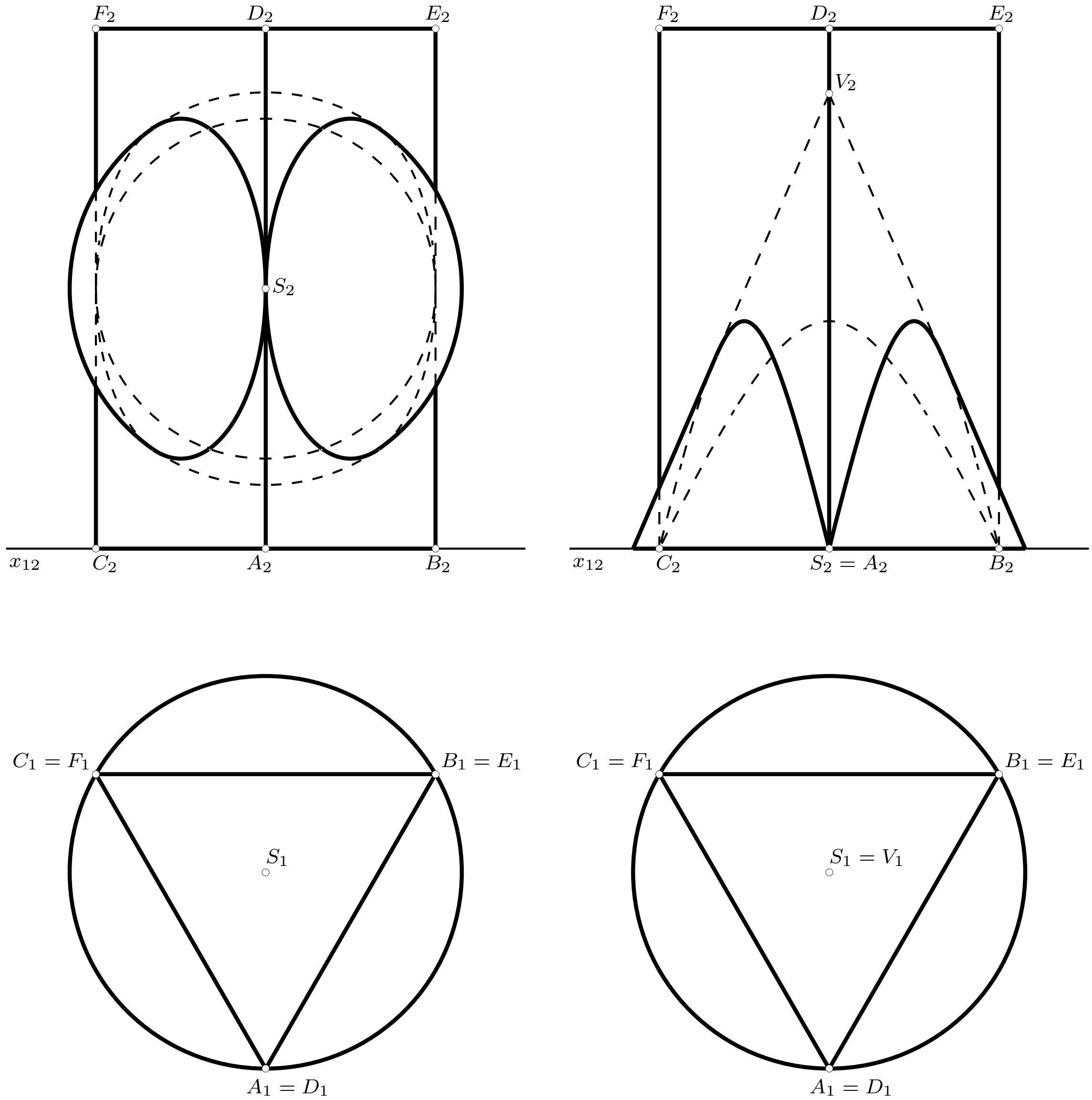
Analogickým postupem, tentokrát s rovinou σ', která prochází vrcholem V' a je rovnoběžná s půdorysnou, dostaneme body dotyku půdorysu průnikové křivky a kužele $\mathcal{K}_2$. □



Obrázek 5.61: Průnik kuželů

5.7.3 Průnik hranatého a oblého tělesa

Průnik hranatého a oblého tělesa se typicky řeší tak, že sestrojíme řezy pláště oblého tělesa rovinami stěn tělesa hranatého. Průniková čára se pak skládá z křivek, které takto získáme. Typické případy jsou zobrazeny na obrázku 5.62. Výjimečně se může stát, že průniková křivka je mnohoúhelník (například průsečná křivka při průniku válce s pravidelným hranolem, když mají rovnoběžné osy).



(a) Průnik koule a trojbokého hranolu

(b) Průnik kužele a trojbokého hranolu

Obrázek 5.62: Průniky oblých a hranatých těles

Kapitola 6

Axonometrie

6.1 Základní princip zobrazení

6.1.1 Zadání axonometrie

Mějme v prostoru zadán pravoúhlý souřadný systém $\langle O, x, y, z\rangle$. Zvolme rovinu α a směr $\vec{s}$, který není s rovinou α rovnoběžný. Rovinu α nazýváme *axonometrická průmětna*. Souřadný systém $\langle O, x, y, z\rangle$ se ve směru $\vec{s}$ promítá do průmětny α do tzv. *axonometrického osového kříže* $\langle O^a, x^a, y^a, z^a\rangle$. Při tomto zobrazení se jednotková délka j na prostorových osách x, y, z promítá do *axonometrických jednotek* j_x, j_y, j_z.

Dále zvolme v prostoru bod $K[x, y, z]$. Uvažujme jeho kolmé průměty do souřadnicových rovin (= pomocných průměten):
$K_1[x, y, 0]$ je *půdorys* bodu K v půdorysně $\pi = (x, y)$.
$K_2[x, 0, z]$ je *nárys* bodu K v nárysně $\nu = (x, z)$.
$K_3[0, y, z]$ je *bokorys* bodu K v bokorysně $\mu = (y, z)$.
Tímto způsobem vytvoříme *souřadnicový kvádr* bodu K.

Bod K nyní promítneme ve směru $\vec{s}$ do axonometrické průmětny α. Tím získáme jeho *axonometrický průmět* $K^a[x^a, y^a, z^a]$ s *redukovanými souřadnicemi*

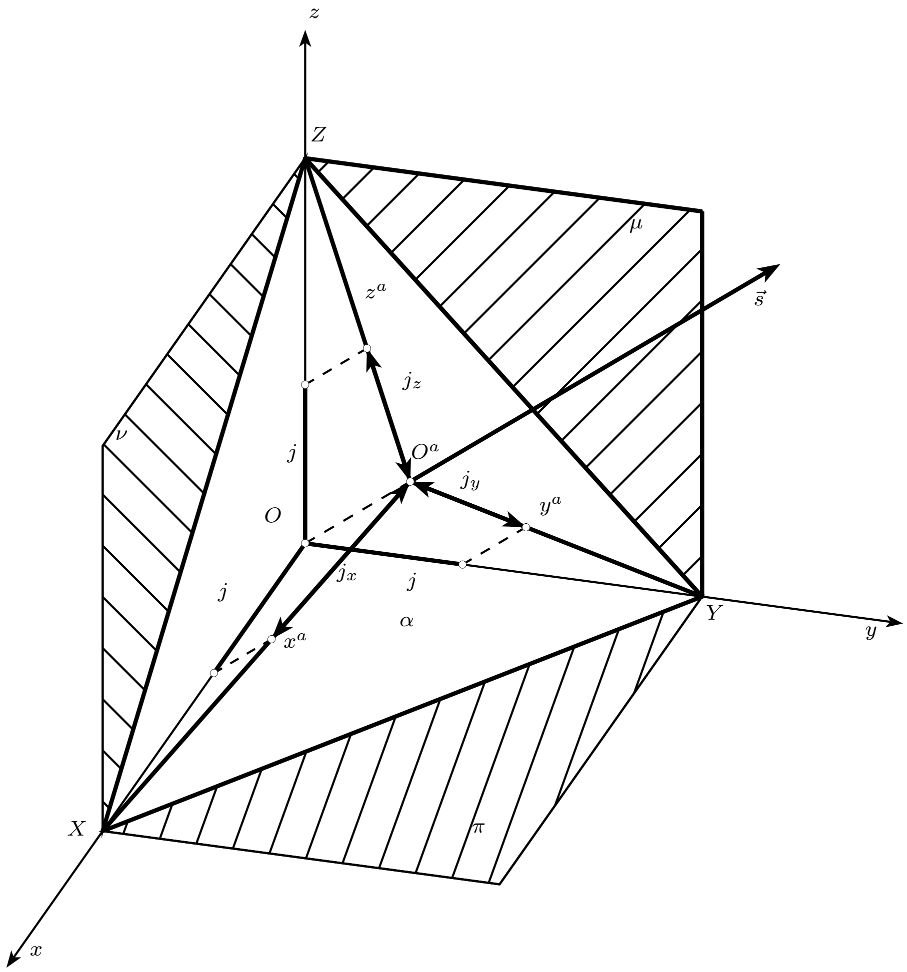
$$x^a = x \cdot \frac{j_x}{j}, \qquad y^a = y \cdot \frac{j_y}{j}, \qquad z^a = z \cdot \frac{j_z}{j}.$$

Aby bylo zobrazení mezi bodem K v prostoru a jeho průmětem K^a do axonometrické průmětny α *vzájemně jednoznačné*, je třeba určit také polohu *axonometrického půdorysu* K_1^a, kterou získáme promítnutím bodu K_1 ve směru $\vec{s}$ do průmětny α. Jejich spojnice je rovnoběžka s osou z^a a nazývá se *ordinála*.

Místo dvojice K^a a K_1^a lze zadat dvojici K^a a K_2^a(= *axonometrický nárys*), $K^aK_2^a \parallel y^a$, nebo dvojici K^a a K_3^a(= *axonometrický bokorys*), $K^aK_3^a \parallel x^a$.

Také bychom obráceně měli stanovit, jakým způsobem lze zvolit přímky x^a, y^a, z^a, abychom je mohli považovat za průměty souřadných os x, y, z v prostoru. Tuto otázku řeší **Pohlkeova věta**, která je pro zadání axonometrie zcela zásadní.

Věta 6.1 (Pohlkeova věta)**.** *Každé tři úsečky v rovině, které mají společný jeden krajní bod a které neleží v jedné přímce, jsou rovnoběžným průmětem tří vzájemně kolmých a stejně dlouhých úseček se společným jedním krajním bodem.*



Obrázek 6.1: Axonometrie

Na základě Pohlkeovy věty můžeme tvrdit, že na obrázku 6.2 je nakreslena krychle. Z Pohlkeovy věty rovněž plyne správnost *zářezové metody* pro konstrukci těles v axonometrii, kterou uvedeme později.

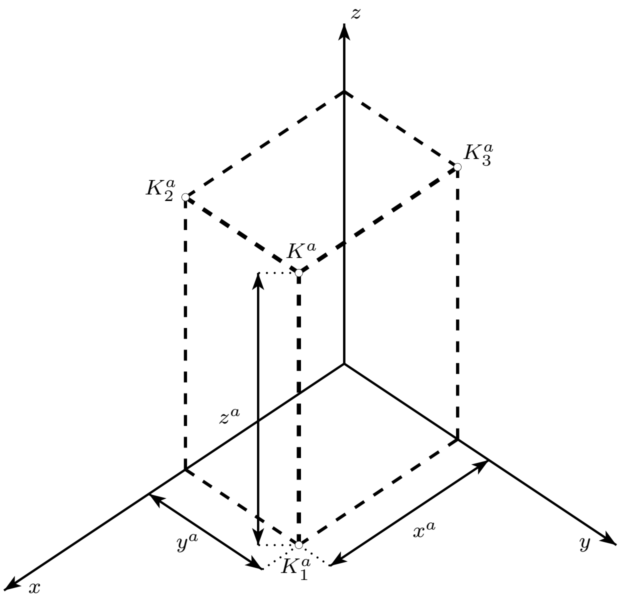
6.1.2 Typy axonometrií

Zcela zásadním kriteriem, které určuje dva typy axonometrií – *pravoúhlou* a *kosoúhlou* – je směr vektoru $\vec{s}$ vůči axonometrické průmětně α. Axonometrie je tedy:

a) **pravoúhlá**, je-li $\vec{s} \perp \alpha$
b) **kosoúhlá**, je-li $\vec{s} \not\perp \alpha$

Jak vyplývá z Pohlkeovy věty, axonometrii můžeme jednoznačně zadat souřadným systémem $\langle O^a, x^a, y^a, z^a \rangle$ a délkami axonometrických jednotek j_x, j_y a j_z na příslušných axonometrických osách. Podle poměru jejich velikostí se axonometrie nazývá:

a) **izometrie**, je-li $j_x = j_y = j_z$,
b) **dimetrie**, je-li $j_x = j_y \vee j_x = j_z \vee j_y = j_z$,



Obrázek 6.2: Souřadnicový kvádr bodu

c) **trimetrie**, je-li $j_x \neq j_y \neq j_z$.

Jestliže dále vezmeme v úvahu vzájemnou polohu souřadných os x^a, y^a, z^a, pak dostáváme tyto speciální typy kosoúhlé axonometrie:

a) **volné rovnoběžné promítání** (neboli kabinetní axonometrie, případně kosoúhlá dimetrie) – axonometrická průmětna $\alpha \parallel (y, z)$ – nárysy objektů se nezkreslují, přitom je $j_x : j_y : j_z = 0,5 : 1 : 1$
b) **kavalírní**[1] **axonometrie** (kavalírní perspektiva) – $\alpha \parallel (y, z)$ – nárysy objektů se nezkreslují, $j_x : j_y : j_z = 1 : 1 : 1$
c) **vojenská axonometrie** (vojenská perspektiva, planometrie) – $\alpha \parallel (x, y)$ – půdorysy objektů se nezkreslují, norma ČSN EN ISO 5456-3 zavádí pojem normální planometrie s poměrem délek axonometrických jednotek $j_x : j_y : j_z = 1 : 1 : 1$ a zkrácená planometrie s poměrem $j_x : j_y : j_z = 1 : 1 : 2/3$

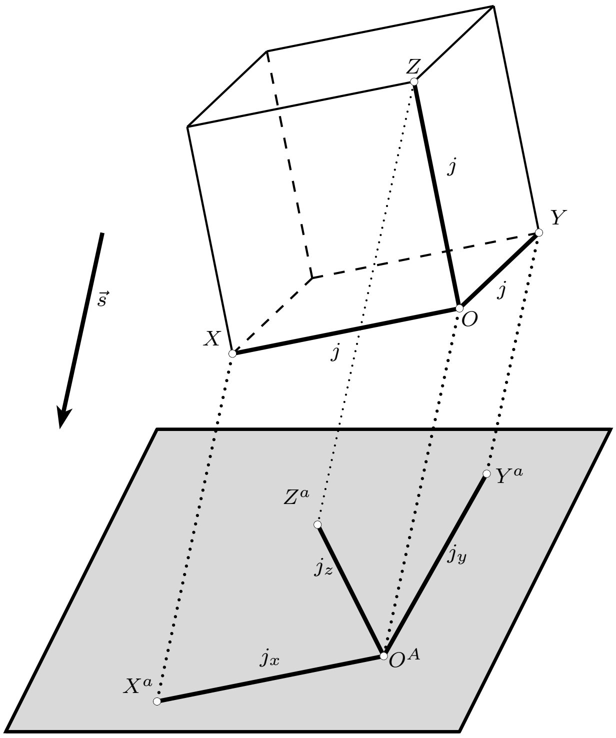
6.1.3 Pravoúhlá (kolmá) axonometrie

Pravoúhlá (kolmá) axonometrie má několik důležitých vlastností, na něž se nyní podíváme podrobněji. Nejprve zdůrazněme, že axonometrickou průmětnu α, do níž kolmo promítáme směrem $\vec{s}$, volíme tak, aby neprocházela počátkem O soustavy souřadnic a protínala každou ze souřadných os x, y, z.

Tím vzniknou průsečíky $X = x \cap \alpha$, $Y = y \cap \alpha$, $Z = z \cap \alpha$, které tvoří *axonometrický trojúhelník*. Platí přitom následující věta.

Věta 6.2. *Axonometrický trojúhelník XYZ je ostroúhlý.*

[1]kavalíry byly části opevnění renesančních měst



Obrázek 6.3: Pohlkeova věta

To tedy znamená, že všechny vnitřní úhly trojúhelníka XYZ mají velikost v rozsahu $(0°, 90°)$.

Souřadné osy x, y, z v prostoru se do průmětny α promítají do axonometrických os x^a, y^a, z^a.

Věta 6.3. *Axonometrické osy x^a, y^a, z^a jsou* výškami *axonometrického trojúhelníka XYZ.*

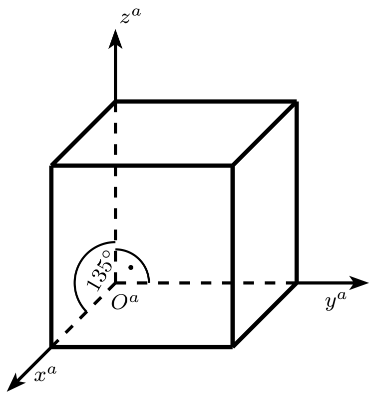
Toto důležité tvrzení si nyní zdůvodníme, přičemž budeme potřebovat větu o pravoúhlém průmětu pravého úhlu (viz 3.9).

V prostoru je osa z kolmá k půdorysně $\pi = (x, y)$, a tudíž i k úsečce $XY = \alpha \cap \pi$. Máme tedy pravý úhel mezi z a XY. Přitom $XY \in \alpha$ a $z \not\perp \alpha$. Směrem $\vec{s} \perp \alpha$ se osa z do roviny α promítne do axonometrické osy $z^a \perp XY$. Podobně je $y^a \perp XZ$ a $x^a \perp YZ$.

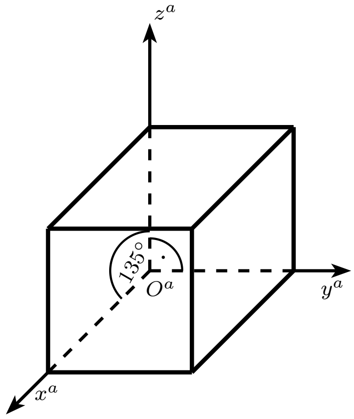
Z předchozích dvou vlastností vyplývá, že kladné směry axonometrických os x^a, y^a, z^a mezi sebou svírají *tupé* úhly.

Pravoúhlou axonometrii lze jednoznačně určit dvěma způsoby, můžeme zadat:

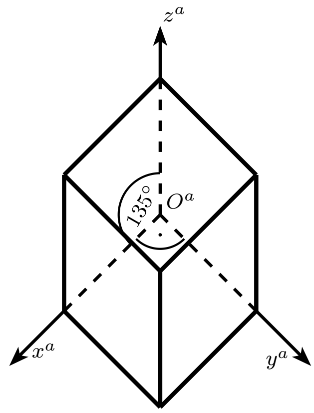
i) **axonometrický trojúhelník** XYZ –
pak axonometrický osový kříž $\langle O^a, x^a, y^a, z^a \rangle$ sestrojíme jako jeho výšky. Přitom těleso zobrazujeme v *nadhledu*, počátek O souřadného systému je z pohledu pozorovatele umístěný *za* axonometrickou průmětnou – viz. obrázek 6.5.



(a) volné rovnoběžné promítání



(b) kavalírní axonometrie



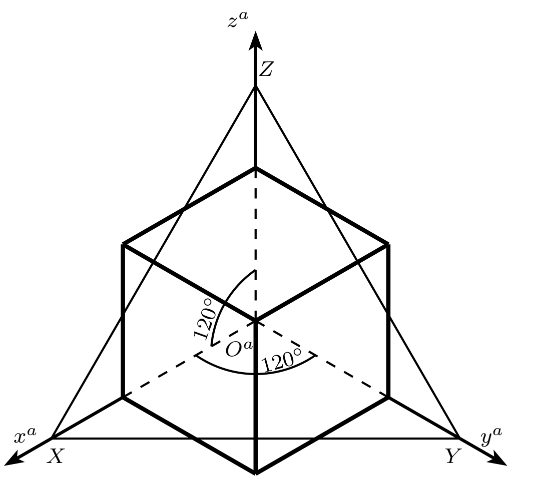
(c) vojenská axonometrie

Obrázek 6.4: Speciální typy kosoúhlých axonometrií

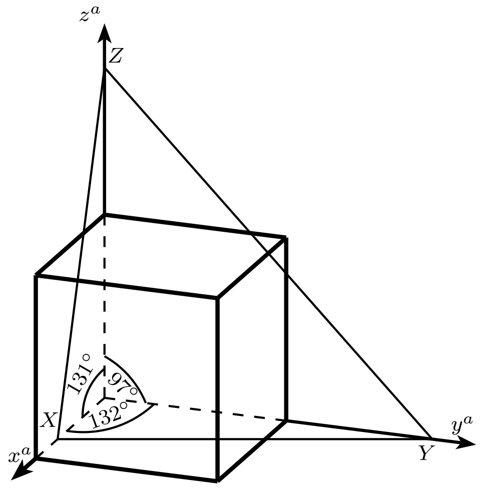
ii) **axonometrický osový kříž** $\langle O^a, x^a, y^a, z^a \rangle$ –
axonometrický trojúhelník XYZ sestrojíme tak, aby jeho strany byly kolmicemi na osy x^a, y^a, z^a. Velikost axonometrického trojúhelníka si můžeme zvolit libovolně, neboť tím pouze stanovíme vzdálenost počátku O souřadné soustavy od axonometrické průmětny. Průmět tělesa bude mít přitom stále stejný tvar i velikost.

U pravoúhlé axonometrie lze axonometrický trojúhelník XYZ jednoznačně sestrojit také z poměru $j_x : j_y : j_z$ – pomocí *Tesařova trojúhelníku*, viz. [1] – což však nebudeme provádět. Podle poměru $j_x : j_y : j_z$ existují dva speciální typy pravoúhlé axonometrie ($\vec{s} \perp \alpha$), a to:

i) **technická izometrie** – $j_x : j_y : j_z = 1 : 1 : 1$
ii) **technická dimetrie** (inženýrská axonometrie) – $j_x : j_y : j_z = 0,5 : 1 : 1$



(a) technická izometrie



(b) technická dimetrie

Obrázek 6.5: Speciální typy pravoúhlých axonometrií

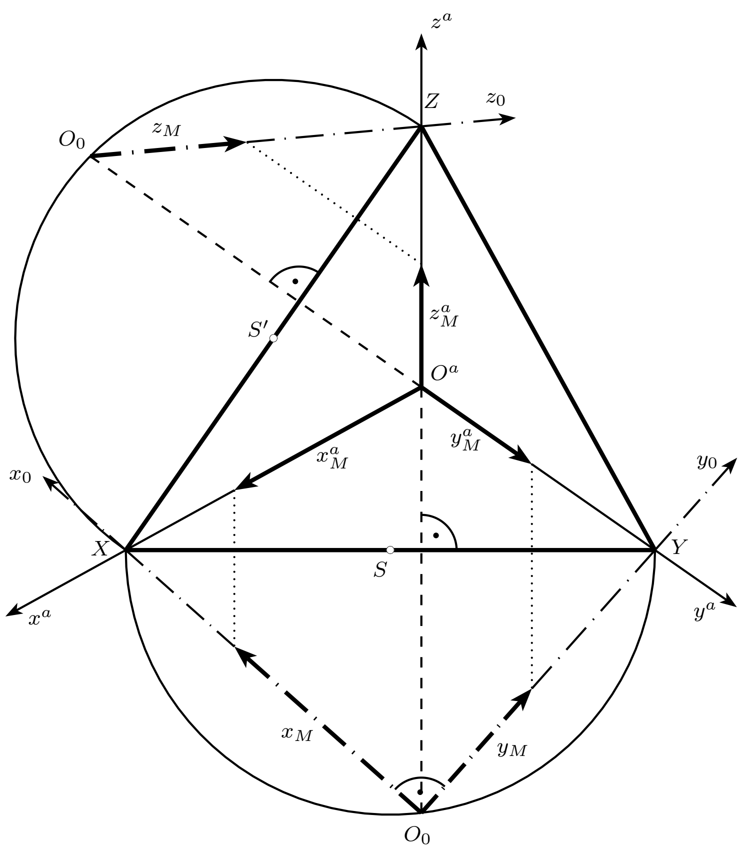
V technické izometrii je $\triangle XYZ$ rovnostranný a v technické dimetrii vychází rovnoramenný s úhly $\sphericalangle(x^a, y^a) = \sphericalangle(x^a, z^a) = 131°24{,}5'$, $\sphericalangle(y^a, z^a) = 97°11'$. Tyto úhly se v praxi normují na hodnoty:

$$\sphericalangle(x^a, y^a) = 132°, \qquad \sphericalangle(x^a, z^a) = 131°, \qquad \sphericalangle(y^a, z^a) = 97°.$$

6.2 Otáčení souřadnicových rovin do axonometrické průmětny

Následující úlohu budeme řešit v **kolmé** axonometrii. Chceme transformovat prostorové souřadnice $[x_M, y_M, z_M]$ bodu M do *redukovaných souřadnic* $[x^a_M, y^a_M, z^a_M]$ na axonometrických osách v průmětně α. Nejprve vezměme půdorysnu $\pi = (x, y)$, přičemž v prostoru je $x \perp y$. Budeme ji otáčet do roviny α kolem strany XY axonometrického trojúhelníka. Při otáčení se tento pravý úhel nezmění, takže v průmětně α bude $x_0 \perp y_0$. To znamená, že průsečík souřadných os $O_0 = x_0 \cap y_0$ musí ležet na *Thaletově kružnici* sestrojené nad přeponou XY.

Dále se bod O otáčí v rovině kolmé k XY, z čehož vyplývá, že v axonometrické průmětně α je $O^aO_0 \perp XY$. Otočené souřadné osy v průmětně α získáme jako spojnice bodů $O_0X = x_0$ a $O_0Y = y_0$. Na ně vyneseme od bodu O_0 souřadnice x_M a y_M.



Obrázek 6.6: Otáčení souřadnicových rovin do axonometrické průmětny α

Mezi půdorysnou $\pi = (x, y)$ a axonometrickou průmětnou α, do níž jsme půdorysnu π otočili kolem strany XY axonometrického trojúhelníka, existuje perspektivní afinita v prostoru. Její směr je definován tímto otáčením, při němž bodu O odpovídá bod O_0, takže $\vec{s} \parallel OO_0$.

Tato perspektivní afinita mezi rovinami π a α se nyní kolmo promítne do roviny α, čímž vznikne **osová afinita** v rovině α. Osou afinity je stále strana XY a párem odpovídajících si bodů je dvojice O^a a O_0. Tím je určen směr osové afinity kolmý k XY. Nyní v této osové afinitě převedeme kolmicemi k XY délky x_M a y_M do redukovaných souřadnic x_M^a a y_M^a na příslušné axonometrické osy x^a a y^a.

Stejným způsobem bychom do průmětny α otočili nárysnu $\nu = (x, z)$, abychom našli osu z_0, na níž naneseme délku z_M. Pomocí kolmice k XZ získáme na ose z^a redukovanou souřadnici z_M^a. Případně bychom mohli otočit bokorysnu $\mu = (y, z)$, přičemž pak pro převod souřadnice z_M na z_M^a použijeme kolmici k YZ. V obrázku 6.6 jsou všechny souřadnice bodu M kladné.

Než budeme pokračovat v dalším výkladu, zavedeme dohodu, že při popisování objektů v axonometrické průmětně α budeme z důvodu stručnosti index ^{a} vynechávat.

Příklad 6.4. Axonometrie je zadána axonometrickým $\triangle XYZ = (80, 70, 60)$. Zobrazte krychli o straně $a = 45$ s podstavou v půdorysně π, je-li $A = [30, 10, 0]$, $B \in y$. Přitom zvolte $y_B > 0$, $x_C < 0$.

Řešení. Označení $\triangle XYZ = (80, 70, 60)$ znamená, že $|XY| = 80\,\text{mm}$, $|XZ| = 70\,\text{mm}$, $|YZ| = 60\,\text{mm}$. Postup řešení sestává ze tří kroků, které postupně provedeme.

1. Narýsujeme axonometrický $\triangle XYZ$, axonometrické osy x, y, z jsou jeho **výškami**, jejich průsečíkem je bod O. Otočíme půdorysnu π a nárysnu ν do axonometrické průmětny α.

   Určíme bod O_0 jako průsečík Thaletovy kružnice sestrojené nad průměrem XY a prodloužené osy z. Stejně získáme bod $\overline{O}_0$ jakožto průsečík Thaletovy kružnice nad průměrem XZ a prodloužené osy y.

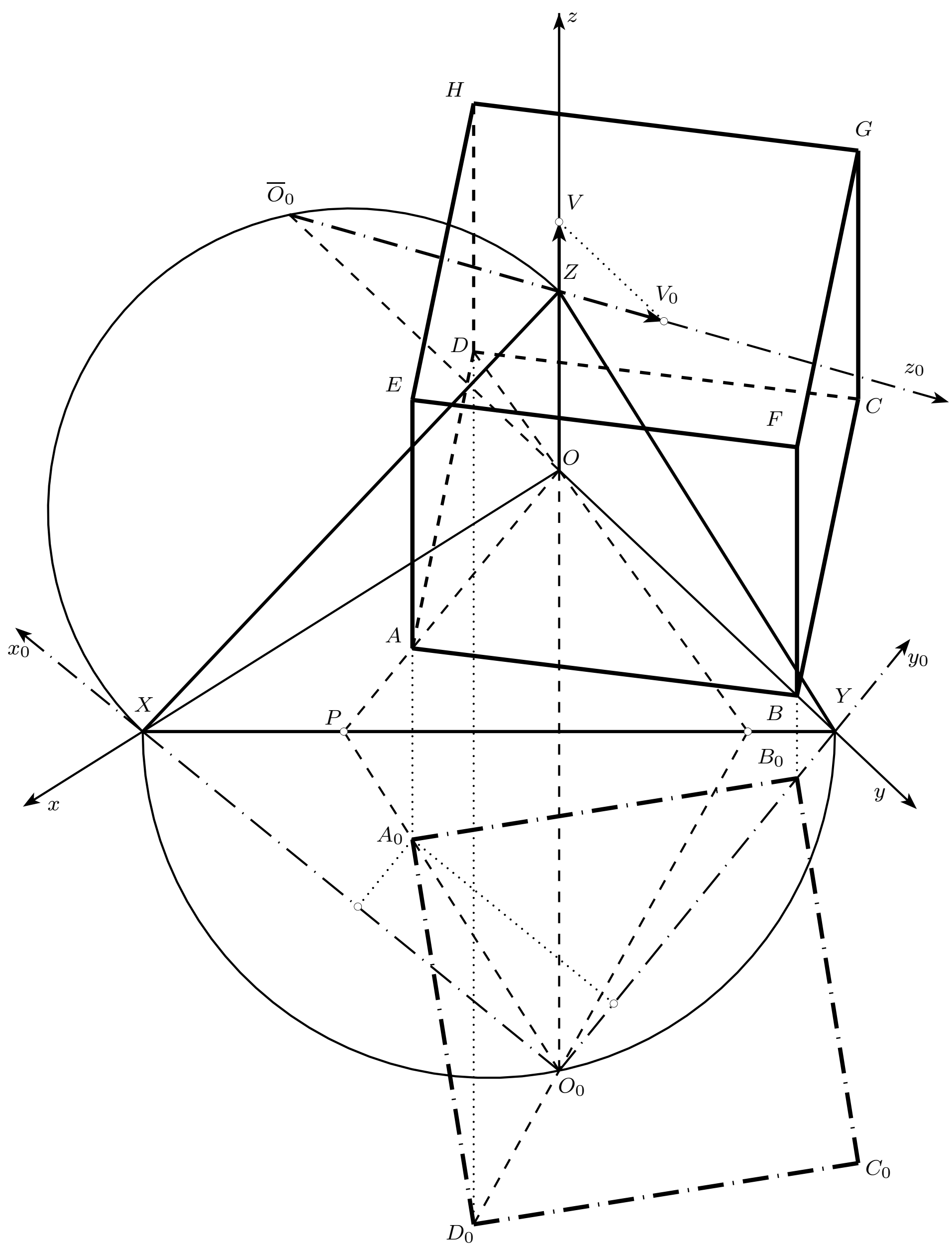
   Pak je $x_0 = O_0X$, $y_0 = O_0Y$, $z_0 = \overline{O}_0Z$.
2. V otočené půdorysně určené osami x_0 a y_0 sestrojíme čtverec $A_0B_0C_0D_0$ tak, aby byly splněny podmínky uvedené v zadání. Tím jsme našli otočenou polohu podstavy krychle, kterou musíme afinně převést do rovnoběžníku $ABCD$.

   Zopakujme, že osou afinity je spojnice XY a dvojicí odpovídajících si bodů je $O - O_0$. Přitom je $OO_0 \perp XY$.

   Konkrétní postup pro určení např. bodu A je tudíž tento: Průsečíkem $A_0O_0 \cap XY$ je samodružný bod P, který spojíme s bodem O. Bodem A_0 vedeme kolmici k XY, která protne PO v hledaném bodě A.
3. Zbývá sestrojit horní podstavu $EFGH$ krychle. Skutečnou výšku krychle 45 mm musíme *zredukovat*. Hodnotu 45 mm naneseme od bodu $\overline{O}_0$ na osu z_0, čímž získáme bod V_0. Ten afinně převedeme do bodu $V \in z$ tak, že $V_0V \perp XZ$.

   Nyní vynášíme délku $OV \in z$ na rovnoběžky s osou z vedenými body A, B, C, D dolní podstavy. Takto najdeme vrcholy E, F, G, H horní podstavy krychle.

□



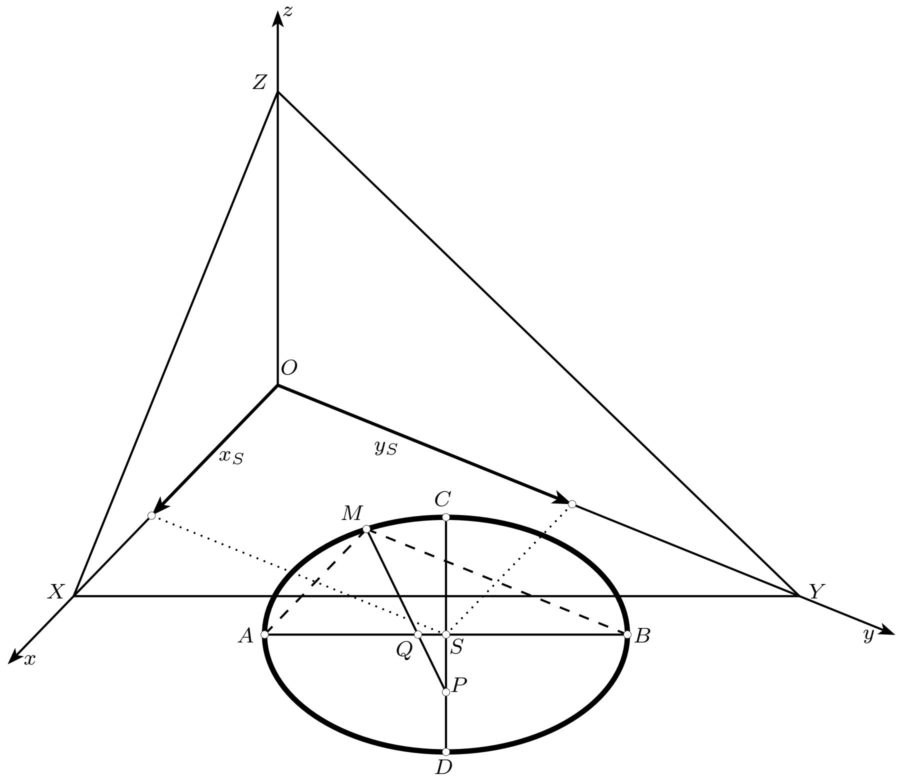
Obrázek 6.7: Zobrazení krychle v kolmé axonometrii

6.3 Zobrazení kružnice ležící v souřadnicové rovině

Příklad 6.5. Axonometrie je zadána axonometrickým $\triangle XYZ = (80, 60, 80)$. Bod S má redukované souřadnice $[20, 35, 0]$. Zobrazte kružnici k ležící v půdorysně π, která má střed S a poloměr $r = 20\,\mathrm{mm}$.

Řešení. Opět se jedná o konstrukci, kterou řešíme v **kolmé** axonometrii.

Kružnice, která leží v půdorysně π, se do roviny α promítá do elipsy e. Postup konstrukce je následující:



Obrázek 6.8: Zobrazení kružnice v půdorysně

Na axonometrické osy x a y vyneseme od počátku O redukované souřadnice x_S a y_S středu S. Hlavní osa hledané elipsy e leží na rovnoběžce s XY procházející středem S a má délku $2a = 2r = 40\,\mathrm{mm}$. Tedy $a = |AS| = |SB| = 20\,\mathrm{mm}$.

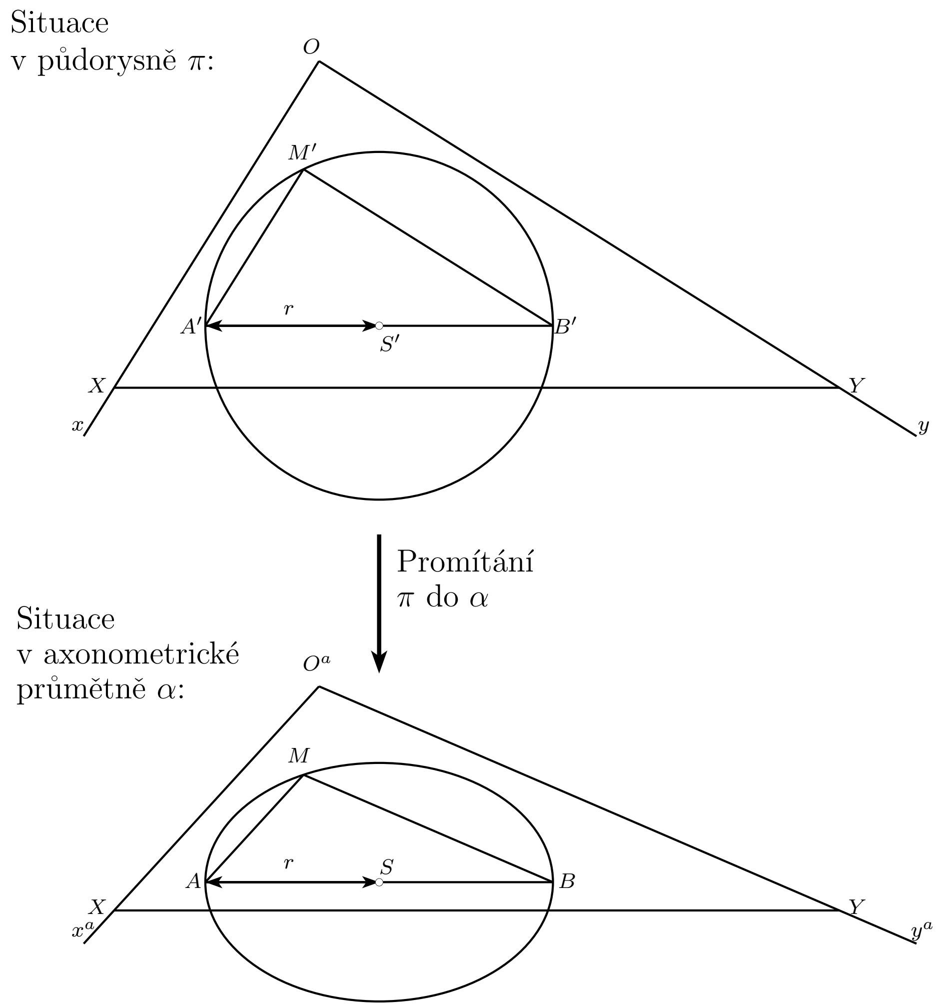
Určíme obecný bod M elipsy e tak, že body A a B vedeme rovnoběžky s osami x a y. Bod M je jejich průsečíkem.

Vedlejší osa elipsy prochází středem S a je kolmá k hlavní ose. Pro stanovení její délky použijeme *proužkovou konstrukci*. Pro přesné vyrýsování elipsy sestrojíme její *oskulační kružnice* v hlavních a vedlejších vrcholech.

□

Zdůvodnění výše uvedeného postupu spočívá v následující úvaze:
V půdorysně π zvolme průměr kružnice k rovnoběžný s XY. Jeho krajními body veďme rovnoběžky s navzájem kolmými souřadnými osami x a y. Jejich průsečíkem pak bude bod na kružnici, neboť se jedná o Thaletovu kružnici.

Rovnoběžným promítáním půdorysny π do roviny α směrem $\vec{s} \perp \alpha$ se zachovává incidence, rovnoběžnost a dělící poměr. Průměr kružnice k rovnoběžný s XY se do roviny α promítne do průměru elipsy e, který je také rovnoběžný s XY, přičemž jeho délka $2r$ se nezmění. Pro elipsu to znamená, že se jedná o její hlavní osu, která má ze všech jejích průměrů největší délku. Rovnoběžky s osami x a y v půdorysně π se zobrazí do rovnoběžek s axonometrickými osami x^a a y^a v rovině α, přičemž jejich průsečíkem bude bod M elipsy. Ze získaných bodů A, B a M lze elipsu vyrýsovat užitím proužkové konstrukce.



Obrázek 6.9: Vztah mezi kružnicí a elipsou

Pokud by kružnice k ležela v nárysně ν nebo bokorysně μ, byl by postup konstrukce analogický.

6.4 Zobrazení bodu, přímky a roviny

6.4.1 Zobrazení bodu

V axonometrii je poloha bodu K jednoznačně stanovena, pokud zadáme polohu axonometrického průmětu K^a a axonometrického půdorysu K_1^a. Přitom je spojnice $K^aK_1^a$ (=*ordinála*) rovnoběžná s osou z. Dále můžeme najít polohu axonometrického nárysu K_2^a a axonometrického bokorysu K_3^a, čímž vznikne *souřadnicový kvádr* bodu K (obrázek 6.2).

6.4.2 Zobrazení přímky

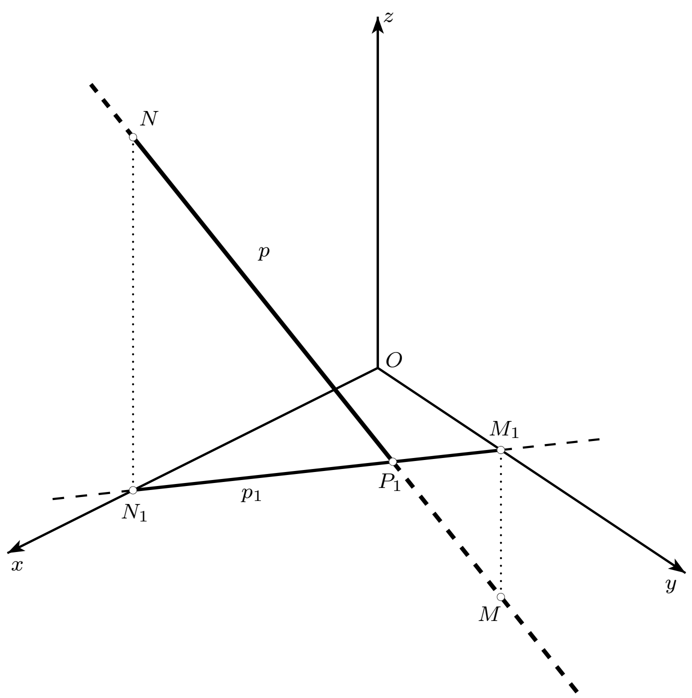
Přímka p v prostoru se do roviny α promítá do axonometrického průmětu p^a (ten je v obrázku 6.10 označen pouze jako p). Ze samotného průmětu p^a bychom však polohu prostorové přímky p nedokázali zpětně odvodit, proto musíme v rovině α zadat také polohu axonometrického půdorysu p_1^a přímky p (v obrázku 6.10 je označen pouze jako p_1). *Vzájemně jednoznačné zobrazení* prostorové přímky p do průmětny α získáme tehdy, pokud v rovině α zadáme dvojici průmětů p^a a p_1^a.

V rovině α lze dále sestrojit axonometrický nárys p_2^a přímky p (označujeme pouze p_2) a axonometrický bokorys p_3^a přímky p (označujeme pouze p_3)

Základní úlohou je najít průsečíky přímky p s jednotlivými průmětnami, tzv. *stopníky.* Platí, že

a) bod $P = P_1 \in p \cap \pi = p \cap p_1$ se nazývá půdorysný stopník přímky p,
b) bod $N = N_2 \in p \cap \nu = p \cap p_2$ se nazývá nárysný stopník přímky p,
c) bod $M = M_3 \in p \cap \mu = p \cap p_3$ se nazývá bokorysný stopník přímky p.

Příklad 6.6. Axonometrie je zadána souřadnými osami x, y, z. Je zadána přímka p a její průmět p_1. Určete stopníky přímky p.



Obrázek 6.10: Stopníky přímky

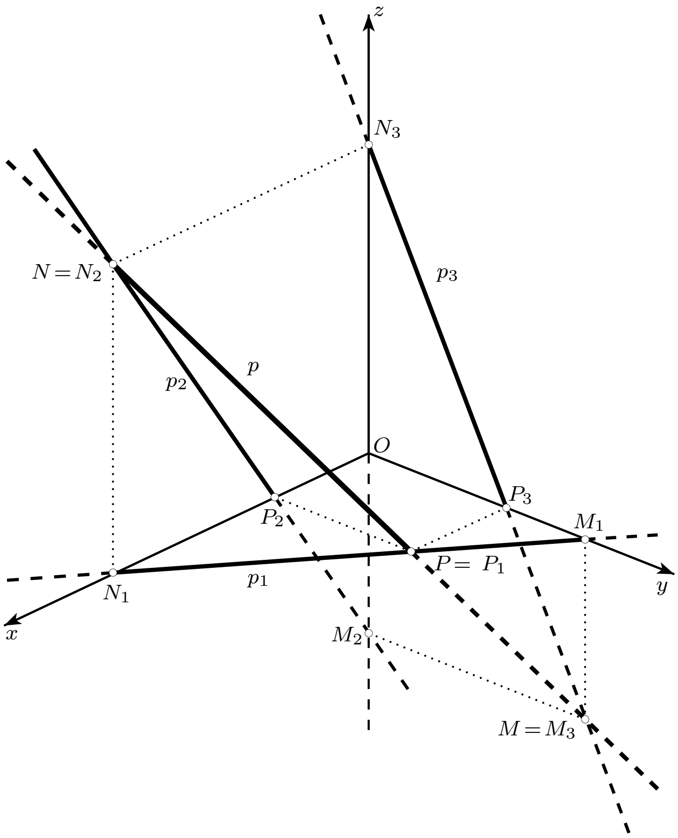
Řešení. Půdorysný stopník $P = P_1$, v němž přímka p protíná půdorysnu π, najdeme jako průsečík $p \cap p_1$.

Dále hledáme nárysný stopník $N = N_2$, v němž přímka p protíná nárysnu ν, a bokorysný stopník $M = M_3$, který je průsečíkem přímky p s bokorysnou μ.

Přímka p_1 protíná osu x v bodě N_1, což je půdorys nárysného stopníku. Nárysný stopník N potom leží jednak na ordinále vedené bodem N_1, jednak na přímce p, a je tedy jejich průsečíkem.

Podobně $M_1 \in p_1 \cap y$ je půdorys bokorysného stopníku, $M \in p$, přičemž $M_1M \parallel z$. $\square$

Příklad 6.7. V axonometrii zadané souřadnými osami x, y, z najděte zbývající průměty přímky, znáte-li její axonometrický průmět p a axonometrický půdorys p_1.



Obrázek 6.11: Průměty přímky

Řešení. Tato úloha je rozšířením předchozího příkladu. Získáme stopníky P, N a M, které dále promítneme do zbylých souřadnicových rovin.

Začněme u půdorysného stopníku $P = P_1$. Ten můžeme rovnoběžně s osou y promítnout na osu x do bodu P_2, což je nárys půdorysného stopníku, a rovnoběžně s osou x do bodu $P_3 \in y$ (bokorys půdorysného stopníku).

U nárysného stopníku $N = N_2$ už známe jeho půdorys $N_1 \in p_1 \cap x$, takže zbývá určit jeho bokorys – stopník N promítneme rovnoběžně s osou x do bodu $N_3 \in z$ ($N_3N \parallel x$).

Analogicky k bokorysnému stopníku $M = M_3$ musíme najít jeho nárys M_2 tak, že $M_2 \in z$, $M_2M \parallel y$. Půdorys bokorysného stopníku jsme našli už v přechozím příkladě: $M_1 \in p_1 \cap y$.

Zbývajícími průměty přímky p, které máme určit, je nárys p_2 a bokorys p_3 přímky p. Nárys p_2 je spojnicí bodů P_2, N_2 a M_2, které všechny musí ležet v jedné přímce. Podobně bokorys p_3 je spojnicí bodů P_3, N_3 a M_3, které opět leží v jedné přímce. □

6.4.3 Zobrazení roviny

Rovinu lze jednoznačně zadat následujícími způsoby:

i) třemi různými body, které neleží v jedné přímce
ii) přímkou a bodem, který na ní neleží
iii) dvěma různými rovnoběžkami
iv) dvěma různoběžkami

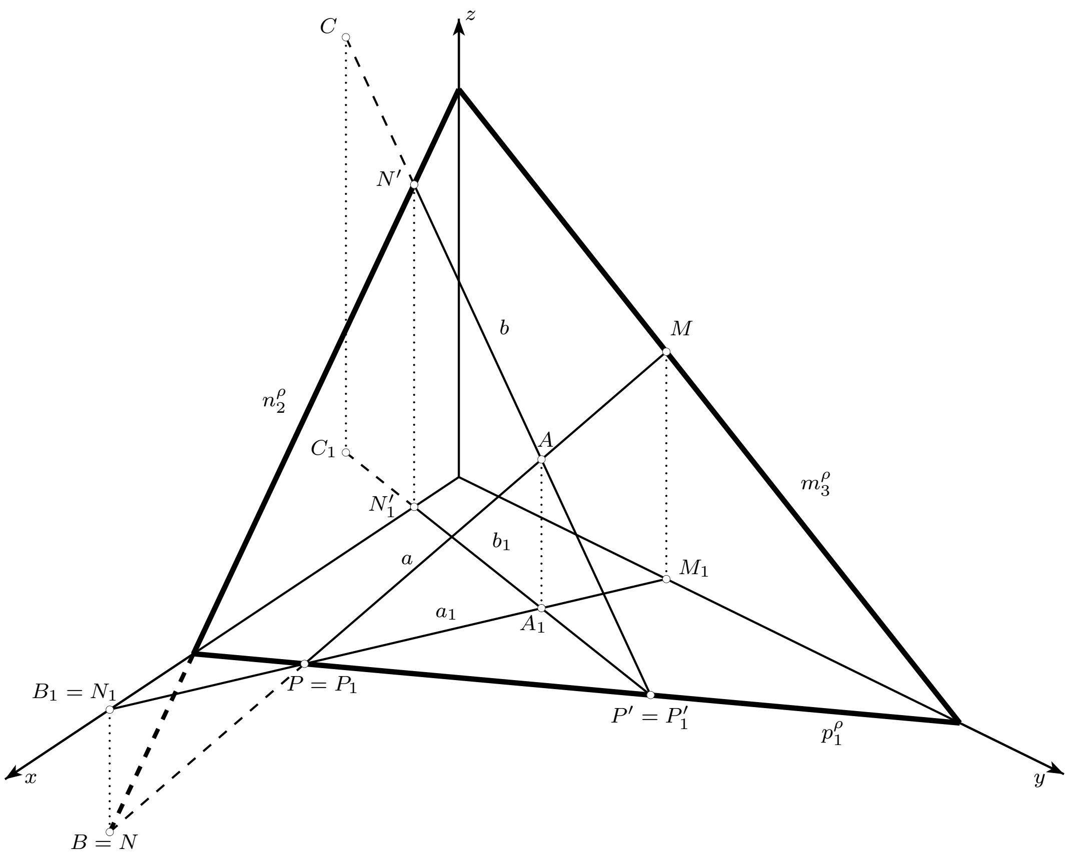
Rovinu ρ však můžeme určit také *stopami*, což jsou její průsečnice s průmětnami π, ν a μ:

i) přímka $p_1^\rho \in \rho \cap \pi$ je půdorysná stopa roviny ρ,
ii) přímka $n_2^\rho \in \rho \cap \nu$ je nárysná stopa roviny ρ,
iii) přímka $m_3^\rho \in \rho \cap \mu$ je bokorysná stopa roviny ρ.

Přitom stopy roviny se navzájem protínají na souřadných osách x, y a z.

V další textu budeme při popisování stop indexy $_1$, $_2$, $_3$ vynechávat.

Příklad 6.8. Axonometrie je zadána souřadnými osami x, y, z. Rovina ρ je určena třemi body A, B a C. Najděte její stopy.



Obrázek 6.12: Stopy roviny

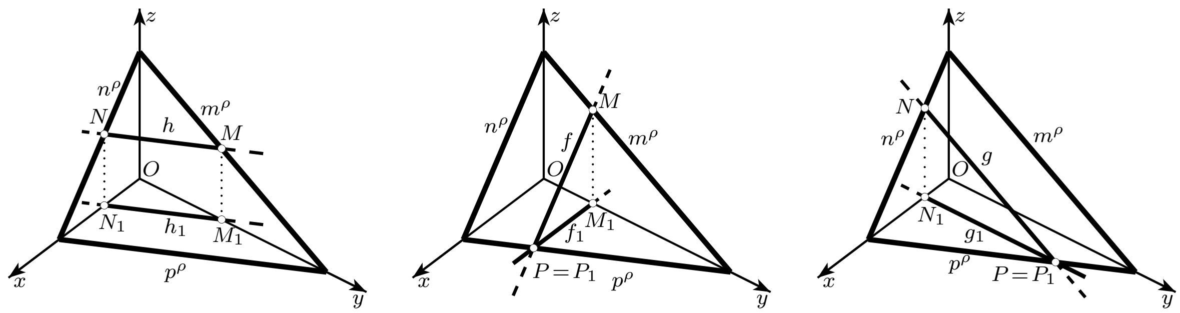
Řešení. Ze tří bodů vytvoříme dvě rovnoběžky nebo dvě různoběžky a a b. Na přímkách a a b najdeme jejich stopníky. Použijeme zřejmou vlastnost, že **přímka ležící v rovině má stopníky na stopách této roviny**. Pak bude

$$p^\rho = PP', \qquad n^\rho = NN', \qquad m^\rho = MM'.$$

Můžeme také využít toho, že se jednotlivé stopy roviny ρ protínají na souřadných osách, takže není třeba hledat všechny výše uvedené stopníky. ☐

6.4.4 Speciální polohy přímek a rovin

Důležité jsou tzv. *hlavní přímky I., II. a III. osnovy*, které jsou rovnoběžné s průmětnami.



(a) hlavní přímka I. osnovy (b) hlavní přímka II. osnovy (c) hlavní přímka III. osnovy

Obrázek 6.13: Hlavní přímky roviny

Uvažujme, že současně budou ležet v rovině ρ. Pak tyto přímky mají následující vlastnosti (za předpokladu, že uvažovaná přímka není totožná se stopou roviny):

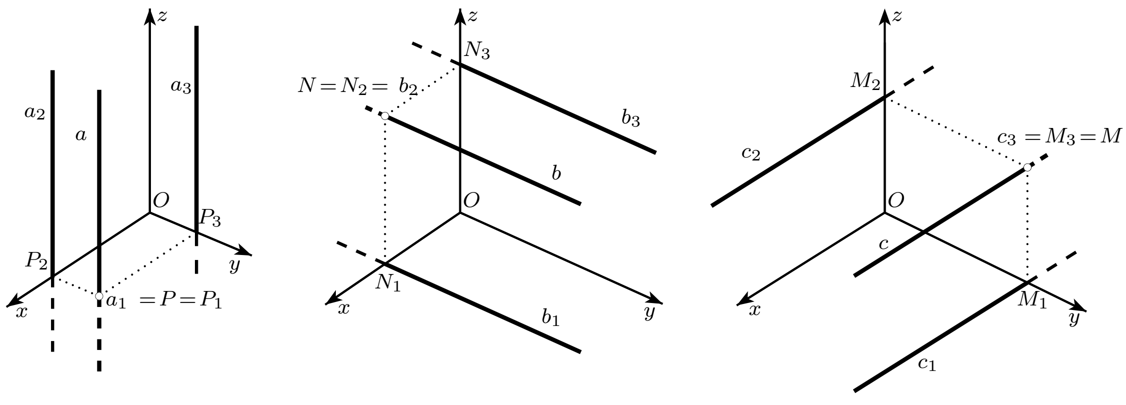
a) $h \parallel \pi \Leftrightarrow h_1 \parallel h \parallel p^\rho$, tj. h nemá půdorysný stopník P,
b) $f \parallel \nu \Leftrightarrow f_1 \parallel x$, $f \parallel n^\rho$, tj. f nemá nárysný stopník N,
c) $g \parallel \mu \Leftrightarrow g_1 \parallel y$, $g \parallel m^\rho$, tj. g nemá bokorysný stopník M.

Přímky, které jsou kolmé k některé průmětně a jsou tedy rovnoběžné s určitou souřadnou osou, mají axonometrický průmět s touto osou rovnoběžný. Jejich průmětem do roviny, k níž jsou kolmé, je pouze bod. Platí tedy (za předpokladu, že přímka neleží v žádné průmětně):

i) $a \perp \pi$, tj. $a \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel z$, průmět a_1 do půdorysny je bod, přímka nemá stopníky N, M,
ii) $b \perp \nu$, tj. $b \parallel b_1 \parallel b_3 \parallel y$, průmět b_2 do nárysny je bod, přímka nemá stopníky P, M,
iii) $c \perp \mu$, tj. $c \parallel c_1 \parallel c_2 \parallel x$, průmět c_3 do bokorysny je bod, přímka nemá stopníky P, N.

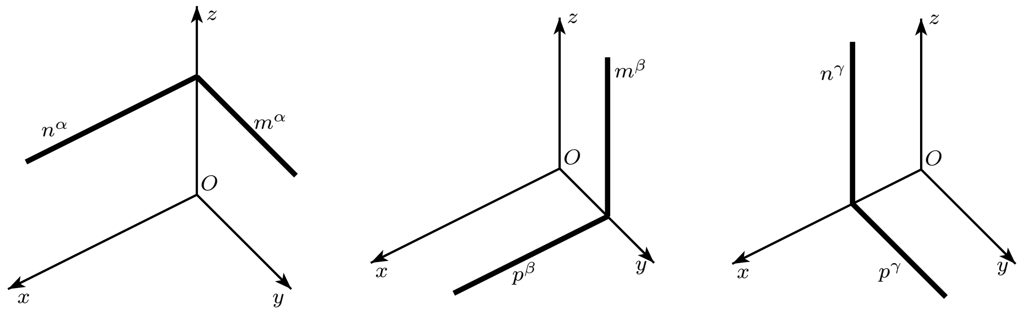
Dále uvažujme roviny rovnoběžné s některou průmětnou, které jsou zároveň kolmé k určité souřadné ose. Tyto roviny mají následující vlastnosti (za předpokladu, že uvažovaná rovina není totožná s průmětnou):

i) $\alpha \parallel \pi$, $\alpha \perp z$, $n^\alpha \parallel x$, $m^\alpha \parallel y$ a p^α neexistuje,
ii) $\beta \parallel \nu$, $\beta \perp y$, $p^\beta \parallel x$, $m^\beta \parallel z$ a n^β neexistuje,
iii) $\gamma \parallel \mu$, $\gamma \perp x$, $p^\gamma \parallel y$, $n^\gamma \parallel z$ a m^γ neexistuje.



(a) přímka kolmá k π (b) přímka kolmá k ν (c) přímka kolmá k μ

Obrázek 6.14: Přímky kolmé k průmětně

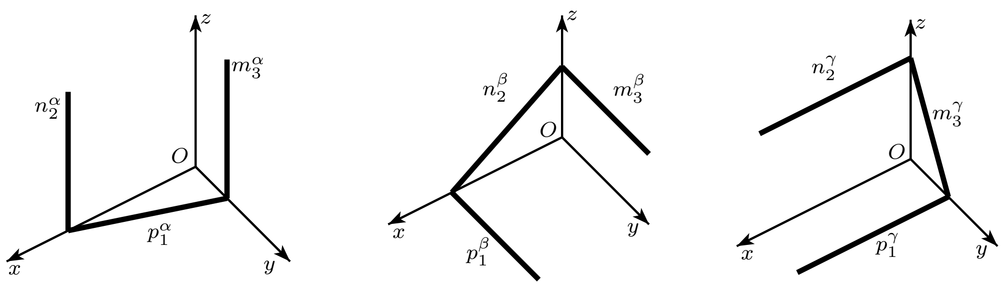


(a) rovina rovnoběžná s π (b) rovina rovnoběžná s ν (c) rovina rovnoběžná s μ

Obrázek 6.15: Roviny rovnoběžné s průmětnou

Roviny kolmé k některé průmětně jsou současně rovnoběžné s určitou souřadnou osou. Tyto roviny mají dvě stopy s touto osou rovnoběžné. Zbývající stopa má obecnou polohu. Platí (za předpokladu, že uvažovaná rovina není totožná s průmětnou):

i) $\alpha \perp \pi$, $\alpha \parallel z$, $n^\alpha \parallel m^\alpha \parallel z$ a stopa p^α je libovolná,
ii) $\beta \perp \nu$, $\beta \parallel y$, $p^\beta \parallel m^\beta \parallel y$ a stopa n^β je libovolná,
iii) $\gamma \perp \mu$, $\gamma \parallel x$, $p^\gamma \parallel n^\gamma \parallel x$ a stopa m^γ je libovolná.



(a) rovina kolmá k π (b) rovina kolmá k ν (c) rovina kolmá k μ

Obrázek 6.16: Roviny kolmé k průmětně

6.5 Polohové úlohy

V předchozím textu jsme si ukázali, jak se v axonometrii zobrazují bod, přímka a rovina. Nyní budeme vyšetřovat vzájemnou polohu těchto základních geometrických útvarů. Přitom nás bude zajímat, jaký může být vztah mezi

a) bodem a rovinou
b) dvěma přímkami
c) přímkou a rovinou
d) dvěma rovinami

V následujících úlohách už nebudeme brát v úvahu viditelnost přímek vzhledem k souřadným rovinám, bude nás pouze zajímat viditelnost přímky vůči zadané rovině případně tělesu apod.

6.5.1 Vzájemná poloha bodu a roviny

Pokud máme zadaný bod a rovinu, bude nás zajímat, zda tento bod v rovině leží nebo neleží. Řešení úlohy spočívá v tom, že jedním průmětem bodu vedeme přímku, kterou určíme tak, aby ležela v rovině (má tedy stopníky na stopách roviny). Zbývající průmět bodu pak leží/neleží na příslušném průmětu přímky.

Přímku v rovině lze volit libovolnou, ale často se užívá některá z hlavních přímek I., II. nebo III. osnovy.

Příklad 6.9. Axonometrie je určená souřadnými osami x, y, z. Najděte axonometrický průmět bodu A tak, aby ležel v rovině ρ, znáte-li jeho půdorys A_1.

Řešení. Úlohu řešíme užitím hlavní přímky III. osnovy. Půdorysem A_1 bodu A vedeme přímku $g_1 \parallel y$. Získáme stopník $P \in g_1 \cap p^\rho$ a bod $N_1 \in g_1 \cap x$. Dále stopník $N \in n^\rho$. Přímka $g = PN \parallel m^\rho$. Z půdorysu A_1 pak vedeme ordinálu, čímž na přímce g získáme axonometrický průmět bodu A. □

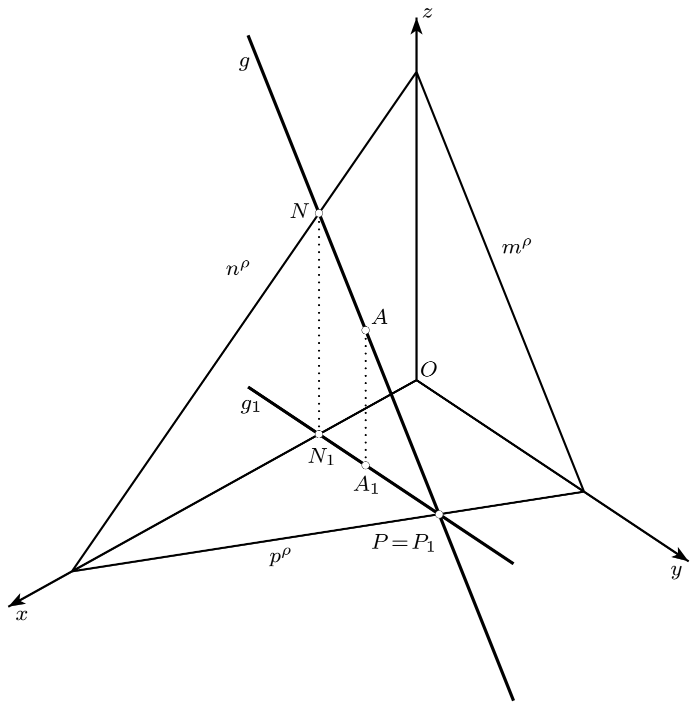
6.5.2 Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě různé přímky v prostoru mohou být vzájemně rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné.

Rovnoběžné přímky mají vzájemně rovnoběžné půdorysy ($a_1 \parallel b_1$) i axonometrické průměty ($a \parallel b$). Případně některá dvojice odpovídajících si průmětů může splývat.

Různoběžné přímky mají reálný průsečík R, což znamená, že se jejich půdorysy protínají v bodě R_1 a zároveň se axonometrické průměty protínají v bodě R. Přitom je spojnice R_1R ordinála rovnoběžná s osou z.

Mimoběžné přímky nemají reálný průsečík, odpovídající si průměty přímek se protínají pouze v tzv. *zdánlivých* průsečících. Vedeme-li průsečíkem půdorysů $a_1 \cap b_1$ ordinálu, získáme na axonometrických průmětech a a b dva různé body $A \neq B$. Podobně ordinála vedená průsečíkem $a \cap b$ určuje body $R_1 \in a_1, S_1 \in b_1, R_1 \neq S_1$.



Obrázek 6.17: Bod ležící v rovině

6.5.3 Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka a rovina mohou být vzájemně **rovnoběžné** nebo **různoběžné**.

Nejprve si ukážeme, jak sestrojit přímku rovnoběžnou se zadanou rovinou. Přitom známe jeden bod, kterým má tato přímka procházet.

Příklad 6.10. V axonometrii určené souřadnými osami x, y, z je rovina ρ zadána svými stopami. Bod A je zadán průměty A_1 a A. Sestrojte přímku a tak, abych procházela bodem A rovnoběžně s rovinou ρ. Přímka a je určena půdorysem a_1, $A_1 \in a_1$.

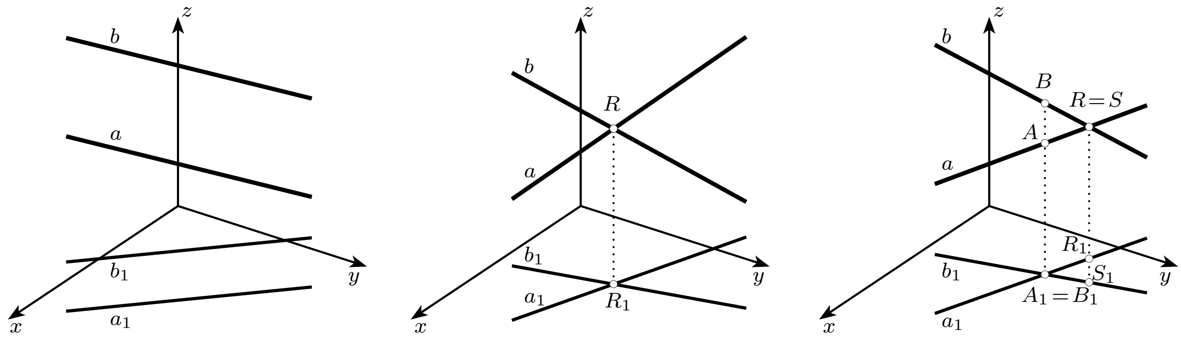
Řešení. Průmět a_1 přímky a ztotožníme s průmětem b_1 přímky b, kterou určíme tak, aby ležela v rovině ρ. Axonometrický průmět b najdeme na základě toho, že má stopníky na stopách roviny ρ. Poté vedeme bodem A přímku a rovnoběžně s přímkou b. □

Pokud je přímka s rovinou různoběžná, sestrojíme **průsečík přímky s rovinou**, což je zcela zásadní konstrukce! V axonometrii, podobně jako u jiných promítacích metod, hledáme průsečík přímky s rovinou **metodou krycí přímky**.

Nechť je dána rovina ρ a přímka p s ní různoběžná. Hledáme bod $R \in p \cap \rho$. Najdeme tzv. *krycí přímku* k, která má tyto dvě vlastnosti:

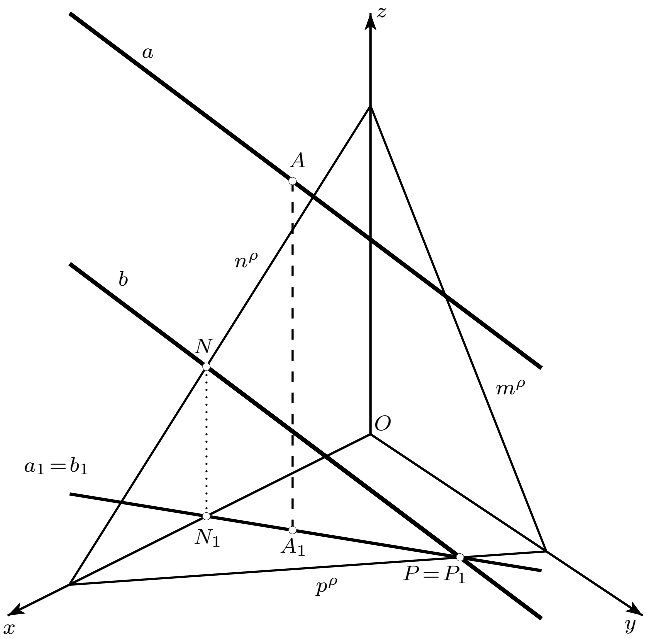
i) přímka k je různoběžná s přímkou p
ii) přímka k leží v rovině ρ

Pokud tyto dvě vlastnosti budou splněny, získáme bod R jako průsečík přímek p a k. Různoběžnost přímek k a p zajistíme ztotožněním jejich půdorysů, položíme $k_1 = p_1$. To



(a) rovnoběžky (b) různoběžky (c) mimoběžky

Obrázek 6.18: Vzájemná poloha dvou přímek



Obrázek 6.19: Přímka rovnoběžná s rovinou

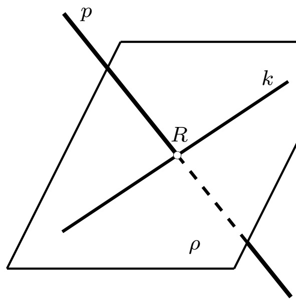
znamená, že obě přímky budou ležet ve společné promítací rovině kolmé k půdorysně π, a tedy budou různoběžné.

Nebo bychom mohli ztotožnit jejich axonometrické průměty, tedy $k = p$, pak by obě přímky ležely v rovině kolmé k axonometrické průmětně.

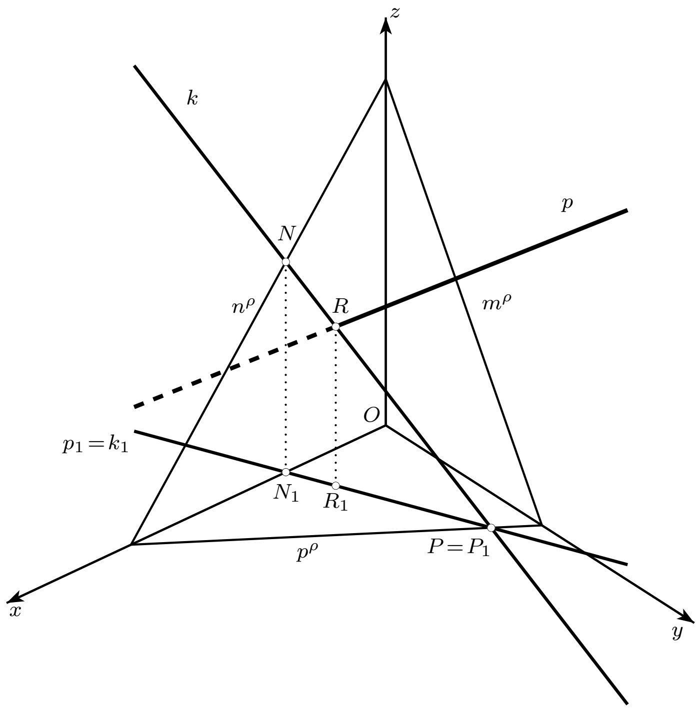
Jestliže známe půdorys k_1, najdeme axonometrický průmět krycí přímky k pomocí stopníků ležících na stopách zadané roviny ρ. Následně je $R \in p \cap k$.

Určení průsečíku přímky s rovinou je natolik důležitá úloha, že si ukážeme řešení ve dvou situacích, nejprve rovinu určíme stopami, poté rovinu zadáme pomocí dvou přímek – rovnoběžek nebo různoběžek.

Příklad 6.11. V axonometrii určené souřadnými osami x, y, z sestrojte průsečík přímky p s rovinou ρ, která je zadána svými stopami.



Obrázek 6.20: Metoda krycí přímky



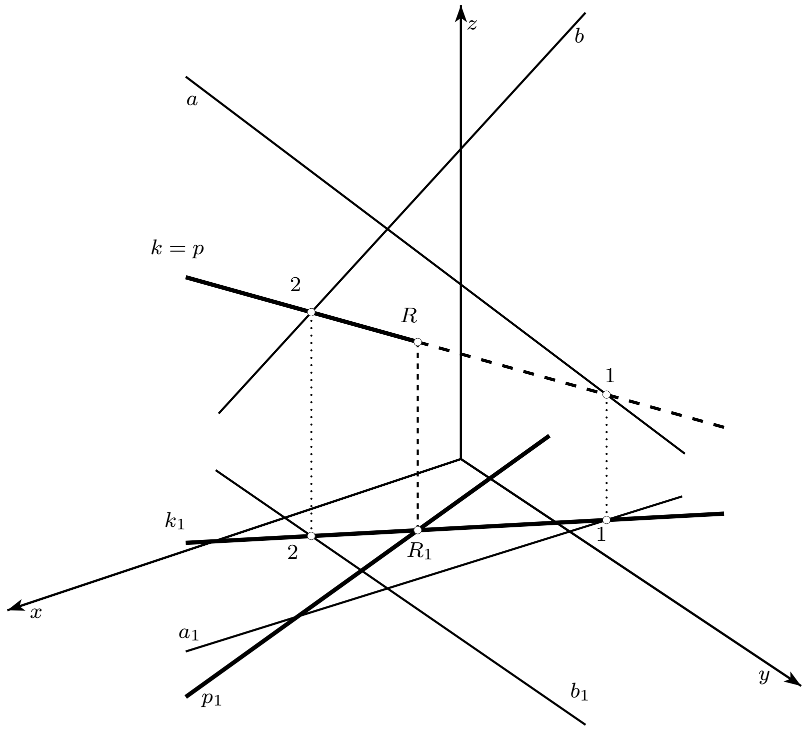
Obrázek 6.21: Průsečík přímky s rovinou

Řešení. Sestrojíme krycí přímku k, která leží v rovině ρ a je různoběžná se zadanou přímkou p. Položíme $k_1 = p_1$, čímž zajistíme různoběžnost přímek k a p. Pomocí stopníků najdeme axonometrický průmět přímky k.

Tedy $P \in k_1 \cap p^\rho$, $N_1 \in k_1 \cap x$, $N \in n^\rho$ a $k = PN$. Bod $R \in k \cap p$ je hledaný průsečík přímky p s rovinou ρ. Pomocí ordinály najdeme jeho půdorys $R_1 \in p_1 (= k_1)$.

Závěrem musíme stanovit viditelnost přímky p vzhledem k rovině ρ. To v axonometrii není velký problém, vidíme, že se část přímky p vpravo od bodu R nachází „před“ rovinou ρ, a je tedy viditelná. ☐

Příklad 6.12. V axonometrii zadané souřadnými osami x, y, z je rovina α určena dvěma různoběžkami a a b. Najděte průsečík R přímky p s rovinou α.



Obrázek 6.22: Průsečík přímky s rovinou

Řešení. Úlohu opět řešíme metodou krycí přímky k. Položme $k = p$, čímž zajistíme různoběžnost přímek k a p. Budeme hledat půdorys k_1. Protože krycí přímka k leží v rovině α, musí se protínat s přímkami a a b této roviny.

Získáme tedy průsečíky $k \cap a$ a $k \cap b$, které označíme pouze jako pomocné body 1 a 2. Dále najdeme pomocí ordinál jejich půdorysy (opět označené 1 a 2) na přímkách a_1 a b_1. Přímka k_1 je jejich spojnicí. Průsečík $R_1 \in k_1 \cap p_1$ přeneseme ordinálou do hledaného bodu $R \in p(= k)$.

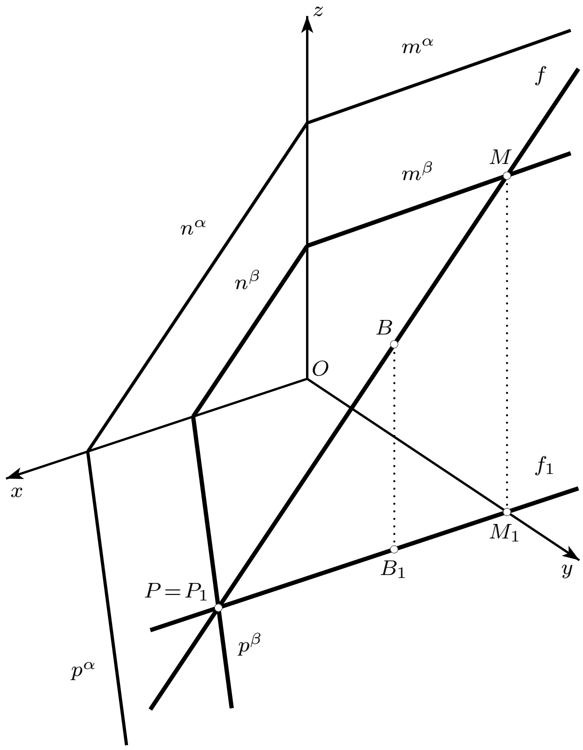
Nakonec stanovíme viditelnost přímky p vzhledem k rovině α. Porovnáme-li půdorysy přímek k_1 a p_1 vlevo od bodu R_1, vidíme, že přímka p_1 je „před“ přímkou k_1. Tedy axonometrický průmět přímky p bude viditelný vlevo od bodu R. ☐

6.5.4 Vzájemná poloha dvou rovin

Dvě různé roviny mohou být vzájemně **rovnoběžné** nebo **různoběžné**. Dvě rovnoběžné roviny mají všechny odpovídající si stopy vzájemně rovnoběžné. U dvou různoběžných rovin budeme hledat jejich průsečnici.

Příklad 6.13. V axonometrii určené osami x, y, z je zadána rovina α svými stopami a dále známe bod B. Veďte bodem B rovinu β rovnoběžnou s rovinou α.

Řešení. Obecný postup by spočíval v tom, že v rovině α zvolíme libovolnou přímku a, bodem B vedeme přímku b rovnoběžnou s přímkou a. Poté pomocí stopníků najdeme stopy roviny β, o nichž víme, že jsou rovnoběžné se stopami roviny α.



Obrázek 6.23: Dvě rovnoběžné roviny

V tomto příkladě však můžeme s výhodou využít některé z hlavních přímek I., II. nebo III. osnovy. Protože známe polohu jejího půdorysu a axonometrického průmětu, proložíme ji přímo bodem B a najdeme stopy roviny β.

Konkrétně tedy $B_1 \in f_1 \parallel x$, $B \in f \parallel n^\alpha$. Pak je $P \in f_1 \cap f$, $M_1 \in f_1 \cap y$, $M \in f$. Nakonec $P \in p^\beta \parallel p^\alpha$, $n^\beta \parallel n^\alpha$, $M \in m^\beta \parallel m^\alpha$. □

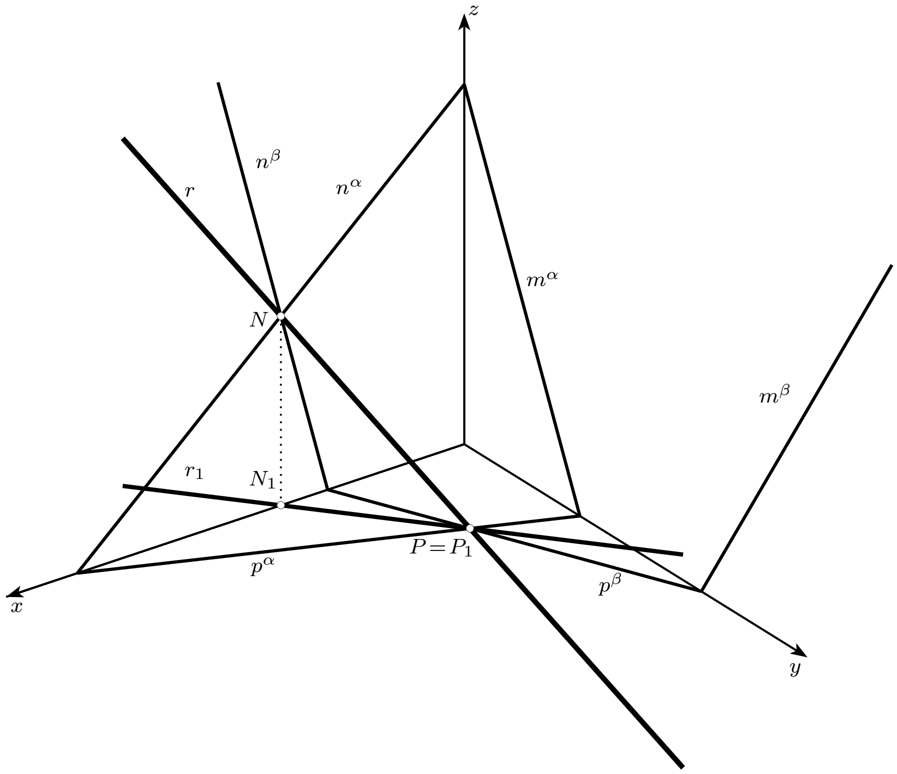
Pokud máme dvě **různoběžné** roviny α a β zadány stopami, průsečnice r, která leží současně v obou dvou rovinách, má stopníky na stopách obou rovin, tedy $P \in p^\alpha \cap p^\beta$, $N \in n^\alpha \cap n^\beta$, $M \in m^\alpha \cap m^\beta$. Pomocí stopníků získáme průměty r_1 a r hledané průsečnice – obrázek 6.24.

Je-li rovina α zadána stopami a rovina β dvojicí rovnoběžek nebo různoběžek p a q, najdeme metodou krycí přímky průsečíky $P \in p \cap \alpha$, $Q \in q \cap \alpha$. Pak $r = PQ$.

Každou z rovin lze také zadat dvěma přímkami, které spolu nejsou mimoběžné. Pak sestrojujeme **průsek / zásek dvou trojúhelníků**. Rovinu α určenou přímkami a a b budeme chápat jako „základní“ rovinu, kterou následně protneme přímkami p a q roviny β užitím metody krycí přímky. Spojnicí nalezených průsečíků P a Q je průsečnice $r = \alpha \cap \beta$.

Příklad 6.14. V axonometrii zadané osami x, y, z sestrojte průsek nebo zásek $\triangle ABC$ a $\triangle KLM$.

Řešení. Úlohu řešíme výše popsaným postupem, přičemž použijeme krycí přímky k a m. Jednotlivé kroky jsou tedy následující:



Obrázek 6.24: Průsečnice dvou rovin

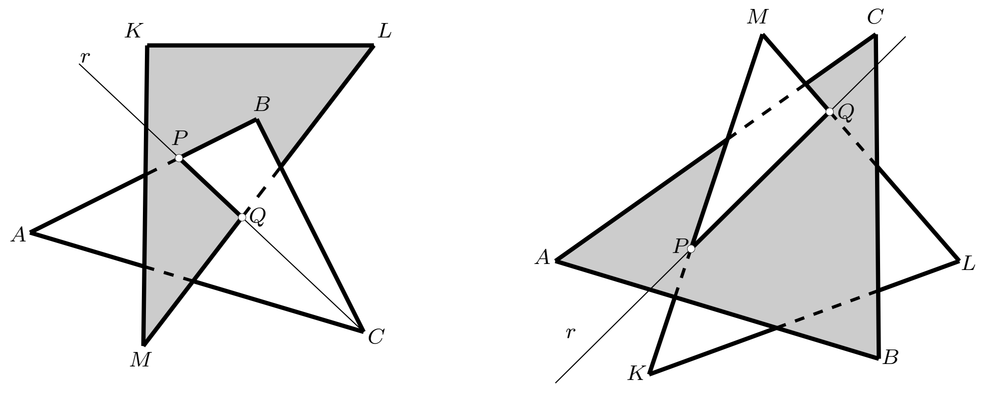
1. $\alpha = (A, B, C)$, zvolíme $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$
2. $p = KL$, $q = LM$
3. $P \in p \cap \alpha \Rightarrow k_1 = p_1, \left\{ \begin{array}{ll} 1 \in k_1 \cap c_1, & 1 \in c \\ 2 \in k_1 \cap b_1, & 2 \in b \end{array} \right\}, k = 12, P \in k \cap p$
4. $Q \in q \cap \alpha \Rightarrow m_1 = q_1, \left\{ \begin{array}{ll} 3 \in m_1 \cap c_1, & 3 \in c \\ 4 \in m_1 \cap a_1, & 4 \in a \end{array} \right\}, m = 34, Q \in m \cap q$
5. $r = PQ$

Průsečnice r nás nezajímá celá, ale pouze ta úsečka na průsečnici r, která leží uvnitř obou trojúhelníků. *Jestliže budou ležet krajní body této úsečky na stranách téhož trojúhelníka, bude se jednat o* ***průsek*** *trojúhelníků, pokud krajní body budou ležet každý na straně jiného trojúhelníka, bude řešením* ***zásek*** *trojúhelníků.*

Nakonec stanovíme porovnáním z-ových souřadnic viditelnost obou trojúhelníků. Vezměme si např. zdánlivý průsečík $b \cap q$ a ordinálou odvodíme jeho půdorysy na b_1 a q_1. Větší z-ová souřadnice je mezi b_1 a b než mezi q_1 a q, takže ve zdánlivém průsečíku $b \cap q$ bude viditelná přímka b. Viditelnost ostatních stran obou trojúhelníků je pak už zřejmá. □

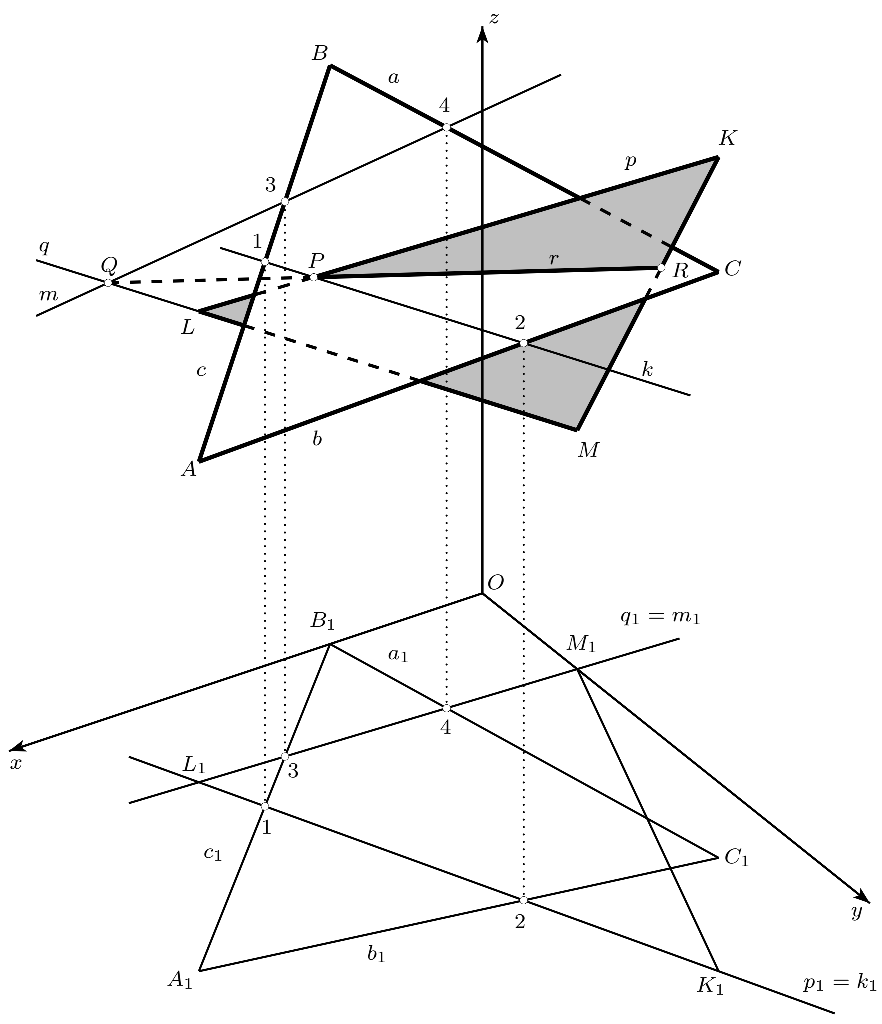
6.6 Řezy těles

Postupně probereme řez hranolu, jehlanu, válce a kužele rovinou. Podstava tělesa leží v půdorysně, rovina řezu je zadána buď stopami, nebo dvojicí rovnoběžných, případně různoběžných přímek, které sestrojíme i v případě, kdy je řezná rovina zadána třemi



(a) Zásek trojúhelníků (b) Průsek trojúhelníků

Obrázek 6.25: Vzájemná poloha dvou trojúhelníků



Obrázek 6.26: Průsek trojúhelníků

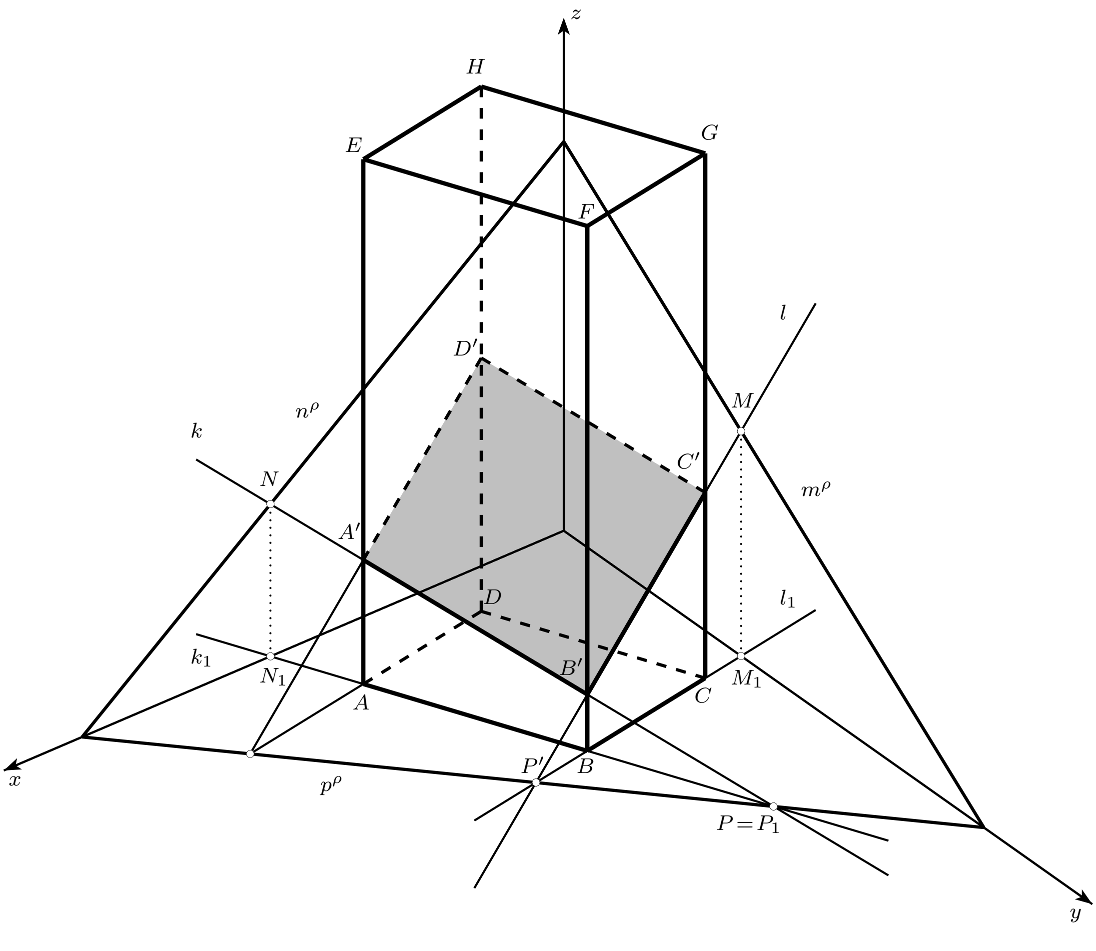
různými body neležícími v jedné přímce.

6.6.1 Řez hranolu

Zadaný hranol může být **kolmý** nebo **šikmý**.

Základní princip konstrukce je následující: Na některé pobočné hraně hranolu sestrojíme užitím **metody krycí přímky** bod řezu jakožto průsečík této hrany s řeznou rovinou. Další body řezu poté dohledáme pomocí **afinity**, která existuje mezi rovinou podstavy (tedy půdorysnou) a rovinou řezu. *Osou afinity* je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, tj. půdorysná stopa řezné roviny. *Párem odpovídajících si bodů* je bod podstavy a bod řezu na téže pobočné hraně hranolu.

Příklad 6.15. Určete řez kolmého hranolu s podstavou $ABCD$ (rovnoběžník) v půdorysně. Znáte redukovanou výšku hranolu v. Rovina ρ je zadána stopami.



Obrázek 6.27: Řez kolmého hranolu

Řešení. Protože se jedná o kolmý hranol, budou pobočné hrany $AE, \ldots, DH$ délky v rovnoběžné s osou z.

Krycí přímku k zvolíme tak, aby její půdorys k_1 splýval s podstavnou hranou AB hranolu. Víme, že krycí přímka musí ležet v zadané rovině ρ, najdeme tedy její axonometrický průmět k pomocí stopníků. Sestrojíme:

$$\left.\begin{array}{l} P \in k_1 \cap p^\rho \\ N_1 \in k_1 \cap x, \quad N_1N \parallel z, \quad N \in n^\rho \end{array}\right\} k = PN$$

Přímka k protíná hrany AE a BF v bodech A' a B', úsečka $A'B'$ je průsečnicí stěny $ABFE$ hranolu s rovinou ρ.

Stejný postup konstrukce můžeme zopakovat pro krycí přímku l:

$$\begin{array}{l} l_1 = BC \\ \left.\begin{array}{l} P' \in l_1 \cap p^\rho \\ M_1 \in k_1 \cap y, \quad M_1M \parallel z, \quad M \in m^\rho \end{array}\right\} l = P'M \\ C' \in l \cap CG \end{array}$$

Všimněme si, že přímka l také prochází bodem řezu B', který jsme předtím sestrojili užitím krycí přímky k.

Nyní bychom mohli řez hranolu sestrojit na základě vlastnosti, že rovnoběžné stěny hranolu jsou rovinou ρ proťaty v rovnoběžkách. Tj. $A'D' \parallel B'C'$ a $C'D' \parallel A'B'$.

Pokud bychom chtěli sestrojit bod řezu D' užitím *afinity*, protneme polopřímku DA s p^ρ v samodružném bodě, jehož spojnice s řezným bodem A' vytne na hraně DH hledaný bod D'.

Stále platí, že řezem hranolu rovinou ρ je *rovnoběžník* $A'B'C'D'$. Jeho strany, které leží ve viditelných stěnách hranolu, jsou viditelné. Ty strany rovnoběžníka, které leží v neviditelných stěnách hranolu, jsou neviditelné. □

Poznamenejme, že pokud by některý bod podstavy ležel přímo na souřadné ose, bude bod řezu ležet na příslušné stopě roviny. Kdyby například $A \in x$, pak $A' \in AE \cap n^\rho$. Toto je však **speciální případ**, obecně body řezu na stopách roviny neleží!

Příklad 6.16. Určete řez kolmého hranolu s podstavou ABC v půdorysně π. Rovina ρ je zadána třemi body K, L, M.

Řešení. V rovině ρ, která je zadána třemi body K, L, M, sestrojíme dvě přímky, například položíme $l = KM$, $k = LM$. Pak je $l_1 = K_1M_1$ a $k_1 = L_1M_1$. To nám umožní pomocí stopníků sestrojit půdorysnou stopu roviny ρ, jelikož $P \in l \cap l_1$, $P' \in k \cap k_1$, a tedy stopa $p^\rho = PP'$.

Vidíme, že p^ρ protíná dolní podstavu ABC hranolu, na podstavných hranách získáme průsečíky $Q \in AB \cap p^\rho$, $R \in BC \cap p^\rho$. Úsečka $QR \subset p^\rho$ je částí řezu.

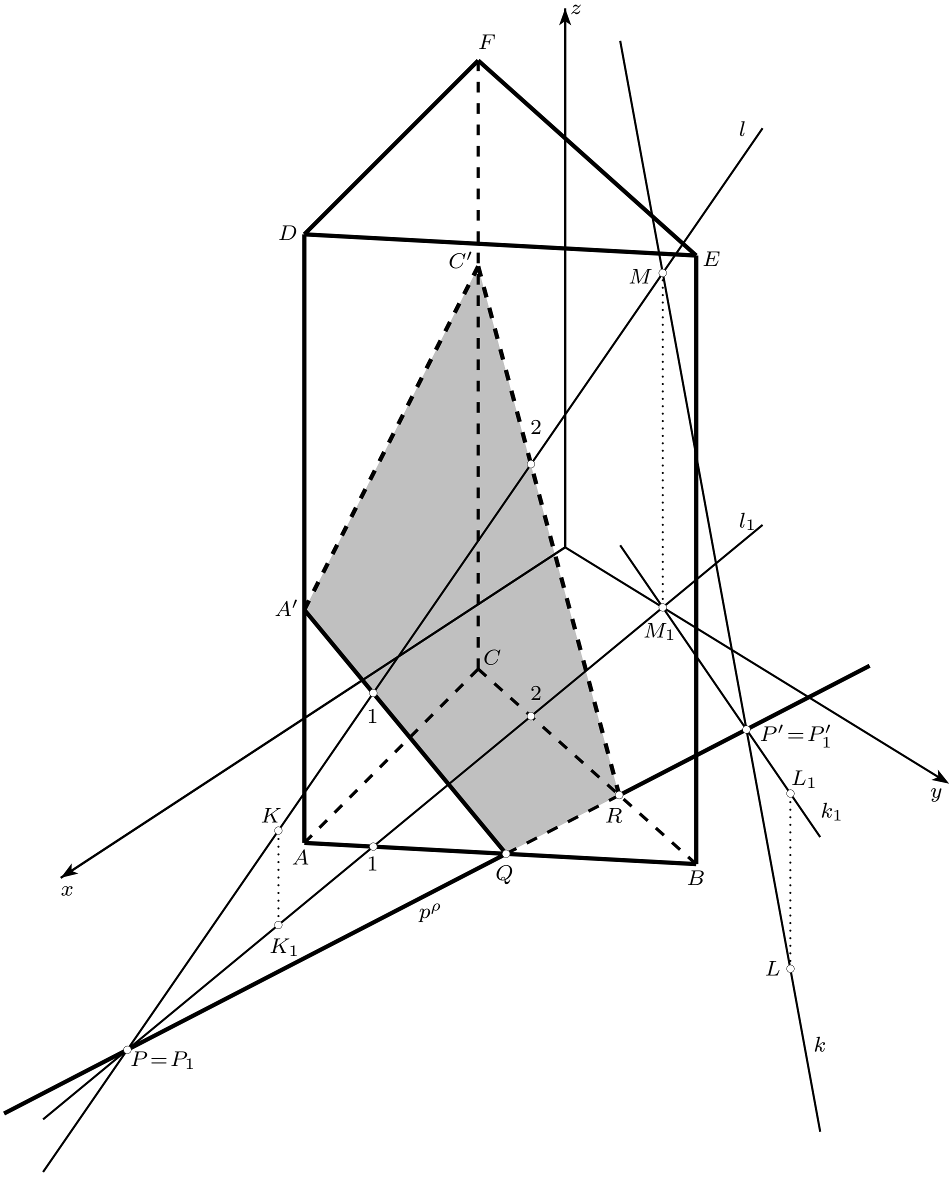
Dále najdeme průsečíky přímky k se stěnami hranolu, označíme je jako pomocné body 1 a 2. Průsečíky $1, 2$ půdorysu k_1 přímky k s podstavnými hranami AB a BC hranolu přeneseme ordinálami do bodů 1 a 2 na přímku k. Přímka k tedy protíná stěnu $ABED$ hranolu v bodě 1 a stěnu $BCFE$ hranolu v bodě 2.

Spojnice bodu 1 s bodem Q je průsečnicí roviny ρ se stěnou $ABED$ a protíná hranu AD v bodě řezu A'.

Podobně je spojnice bodu R s bodem 2 průsečnicí roviny ρ se stěnou $BCFE$, na hraně CF získáme bod řezu C'.

Tím jsme našli čtyřúhelník $QA'C'R$, který je řezem hranolu zadanou rovinou. Závěrem stanovíme viditelnost jednotlivých stran tohoto čtyřúhelníka.

□

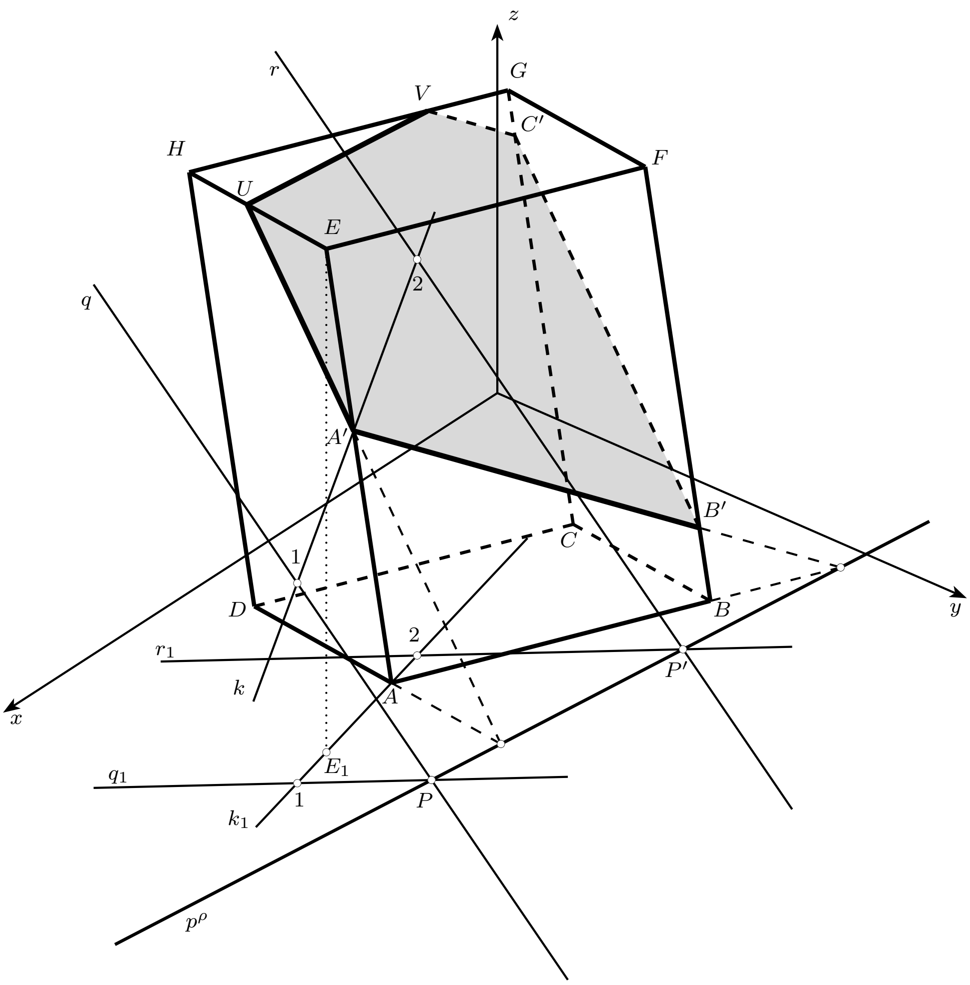


Obrázek 6.28: Řez kolmého hranolu

Příklad 6.17. Sestrojte řez šikmého hranolu s podstavou $ABCD$ (rovnoběžník) v půdorysně. Je také zadán vrchol E horní podstavy. Rovina ρ je určena dvěma rovnoběžkami q a r.

Řešení. Aby byl vrchol E horní podstavy hranolu určen jednoznačně, musí být zadán také bod E_1 – půdorys bodu E. Známe tedy pobočnou hranu AE hranolu, jejímž půdorysem je spojnice AE_1. Ostatní pobočné hrany BF, CG a DH hranolu jsou s hranou AE rovnoběžné a stejně dlouhé. Tím získáme horní podstavu $EFGH$.

V rovině ρ určíme pomocí stopníků její půdorysnou stopu p^ρ: $P \in q \cap q_1$, $P' \in r \cap r_1$, $p^\rho = PP'$.



Obrázek 6.29: Řez šikmého hranolu

Na hraně AE sestrojíme *metodou krycí přímky* bod řezu A'. Půdorys AE_1 ztotožníme s přímkou k_1. O krycí přímce k předpokládáme, že leží v rovině ρ, což znamená, že se protíná s přímkami q a r, které také leží v rovině ρ.

Z průsečíků $1 \in k_1 \cap q_1$ a $2 \in k_1 \cap r_1$ vedeme ordinály, které protnou přímky q a r v pomocných bodech 1 a 2. Jejich spojnicí je krycí přímka k. Pak bod řezu $A' \in AE \cap k$.

Další body řezu dohledáme užitím *afinity*, jejíž osou je půdorysná stopa p^ρ. Párem odpovídajících si bodů je dvojice $A - A'$. Obecný postup při užití afinity spočívá v tom, že spojíme dva body podstavy, na ose afinity získáme samodružný bod, jehož spojnice s bodem řezu protne pobočnou hranu hranolu v dalším bodě řezu.

i) Spojnice průsečíku $AB \cap p^\rho$ s bodem A' protne hranu BF v řezném bodě B'.
ii) Spojnice průsečíku $BC \cap p^\rho$ s bodem B' protne hranu CG v řezném bodě C'.

Dále vidíme, že spojnice průsečíku $AD \cap p^\rho$ s bodem A' hranu DH neprotíná, bod řezu D' by ležel na polopřímce DH „až za“ bodem H. Proto rovina ρ protíná stěnu $ADHE$ hranolu „pouze“ v úsečce $A'U$, kde $U \in EH$.

Při sestrojování řezu můžeme také s výhodou využít vlastnosti, že dvě rovnoběžné roviny jsou třetí rovinou proťaty v rovnoběžkách.

Proto je

i) horní podstava $EFGH \parallel \pi$ hranolu proťata rovinou ρ v úsečce $UV \parallel p^\rho$

ii) průsečnice $A'B'$ roviny ρ se stěnou $ABFE$ rovnoběžná s průsečnicí VC' roviny ρ a stěny $DCGH$

iii) průsečnice $A'U$ roviny ρ se stěnou $ADHE$ rovnoběžná s průsečnicí $B'C'$ roviny ρ a stěny $BCGF$

Řezem hranolu je pětiúhelník $A'B'C'VU$, závěrem stanovíme viditelnost jeho stran.

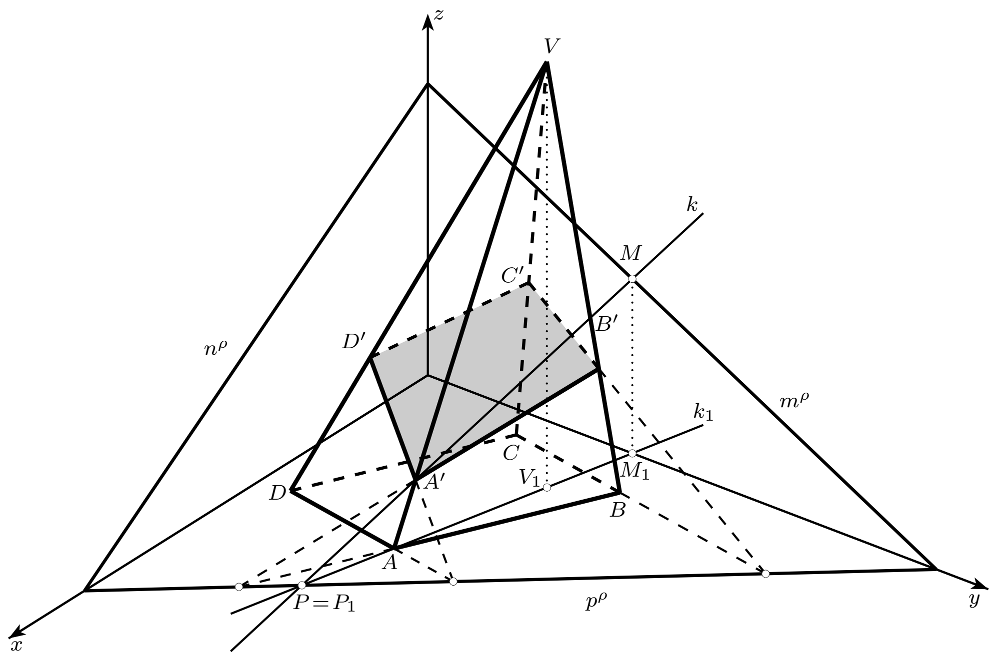
□

6.6.2 Řez jehlanu

Zadaný jehlan může být **kolmý** nebo **šikmý**, jeho podstava leží v půdorysně π. Kolmý jehlan je charakterizován vlastností, že střed S podstavy je totožný s půdorysem V_1 vrcholu V, což pro šikmý jehlan neplatí.

Základní princip konstrukce řezu jehlanu rovinou je podobný jako u hranolu. Nejprve určíme **metodou krycí přímky** průsečík roviny s některou pobočnou hranou jehlanu. Poté hledáme další body řezu užitím **kolineace**. *Osou kolineace* je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, což je půdorysná stopa řezné roviny. *Středem kolineace* je vrchol V jehlanu. *Dvojicí odpovídajících si bodů* je bod podstavy a bod řezu ležící na téže pobočné hraně jehlanu.

Příklad 6.18. Sestrojte řez šikmého jehlanu s podstavou $ABCD$ (rovnoběžník) v půdorysně. Je zadán vrchol V jehlanu. Rovina ρ řezu je určena stopami.



Obrázek 6.30: Řez šikmého jehlanu

Řešení. Vrchol jehlanu je zadán axonometrickým průmětem V a půdorysem V_1, přičemž $VV_1 \parallel z$. Pobočné hrany jehlanu jsou spojnice $AV, \ldots, DV$.

Nejprve si vybereme některou pobočnou hranu jehlanu – např. AV. Jejím půdorysem je spojnice AV_1. Užitím *metody krycí přímky* sestrojíme průsečík A' hrany AV s rovinou ρ. Půdorys AV_1 ztotožníme s přímkou k_1. O krycí přímce k předpokládáme, že leží v rovině ρ, a proto na stopách roviny získáme stopníky:

$$\left.\begin{array}{l} P \in k_1 \cap p^\rho \\ M_1 \in k_1 \cap y, \quad M_1M \parallel z, \quad M \in m^\rho \end{array}\right\} \begin{array}{l} k \text{ je spojnice bodů } P, M \\ A' \in AV \cap k \end{array}$$

Další body řezu najdeme užitím *kolineace*, která existuje mezi rovinou podstavy a rovinou řezu. Osou kolineace je průsečnice těchto dvou rovin, tj. půdorysná stopa p^ρ. Středem kolineace je vrchol V jehlanu. Párem odpovídajících si bodů je dvojice $A - A'$.

Spojíme dva body podstavy, na p^ρ získáme samodružný bod, jímž vedeme polopřímku procházející již známým bodem řezu, která poté vytne na pobočné hraně jehlanu další bod řezu.

Konkrétně:

i) Spojnice průsečíku $AB \cap p^\rho$ s bodem A' protne hranu BV v řezném bodě B'.
ii) Spojnice průsečíku $BC \cap p^\rho$ s bodem B' protne hranu CV v řezném bodě C'.
iii) Spojnice průsečíku $AD \cap p^\rho$ s bodem A' protne hranu DV v řezném bodě D'.

Řezem je obecný čtyřúhelník $A'B'C'D'$, závěrem stanovíme viditelnost jeho stran. □

6.7 Řez válce

Budeme řešit pouze případ, kdy je zadán kolmý válec a řezná rovina ρ je určena svými stopami.

Příklad 6.19. Určete řez kolmého válce s podstavou v půdorysně π rovinou ρ, znáte-li její stopy.

Řešení. Kolmý válec je zadán středy podstav S a S', $SS' = o \parallel z$, dále známe poloměr r podstavné kružnice válce.

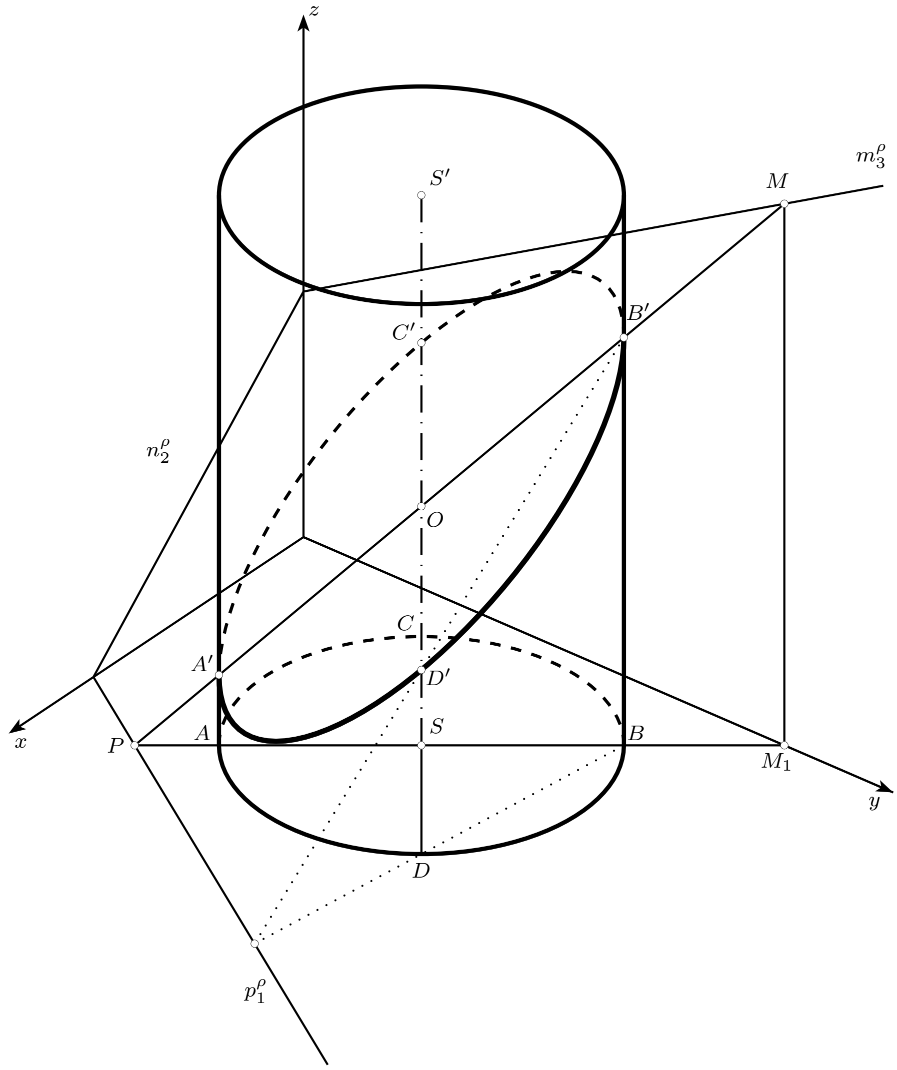
Do axonometrické průmětny se podstavná kružnice válce promítá do elipsy, jejíž hlavní osa AB procházející středem S je kolmá vůči ose z a má délku $2r$. Obecný bod K elipsy najdeme tak, že z hlavních vrcholů A a B vedeme rovnoběžky se souřadnými osami x a y. Bod K je jejich průsečíkem. Užitím proužkové konstrukce pak najdeme vedlejší vrcholy C a D a elipsu vyrýsujeme. (V obr. 6.31 není tato konstrukce znázorněna.)

Horní a dolní podstavy válce jsou shodné elipsy. Dále narýsujeme obrysové površky válce, které prochází body A a B rovnoběžně s osou z.

Rovina ρ řezu protíná válec v elipse, která je v afinním vztahu s podstavnou kružnicí válce. Platí, že se dva kolmé průměry podstavné kružnice válce zobrazí do *sdružených průměrů* řezné elipsy. Kolmé průměry podstavné kružnice válce se do axonometrické průmětny promítají do hlavní a vedlejší osy podstavné elipsy válce.

Půdorys k_1 krycí přímky k ztotožníme s hlavní osou AB podstavné elipsy. Pomocí stopníků najdeme její axonometrický průmět k tak, aby ležela v rovině ρ:

1. $P \in k_1 \cap p^\rho$,



Obrázek 6.31: Řez kolmého válce

2. $M_1 \in k_1 \cap y$, $M_1M \parallel z$, $M \in m^\rho$,
3. $k = PM, O \in k \cap SS'$.

Bod O je středem řezné elipsy. Přímka k rovněž protíná obrysové površky válce v bodech řezu A' a B', což jsou *body přechodu viditelnosti* řezné elipsy.

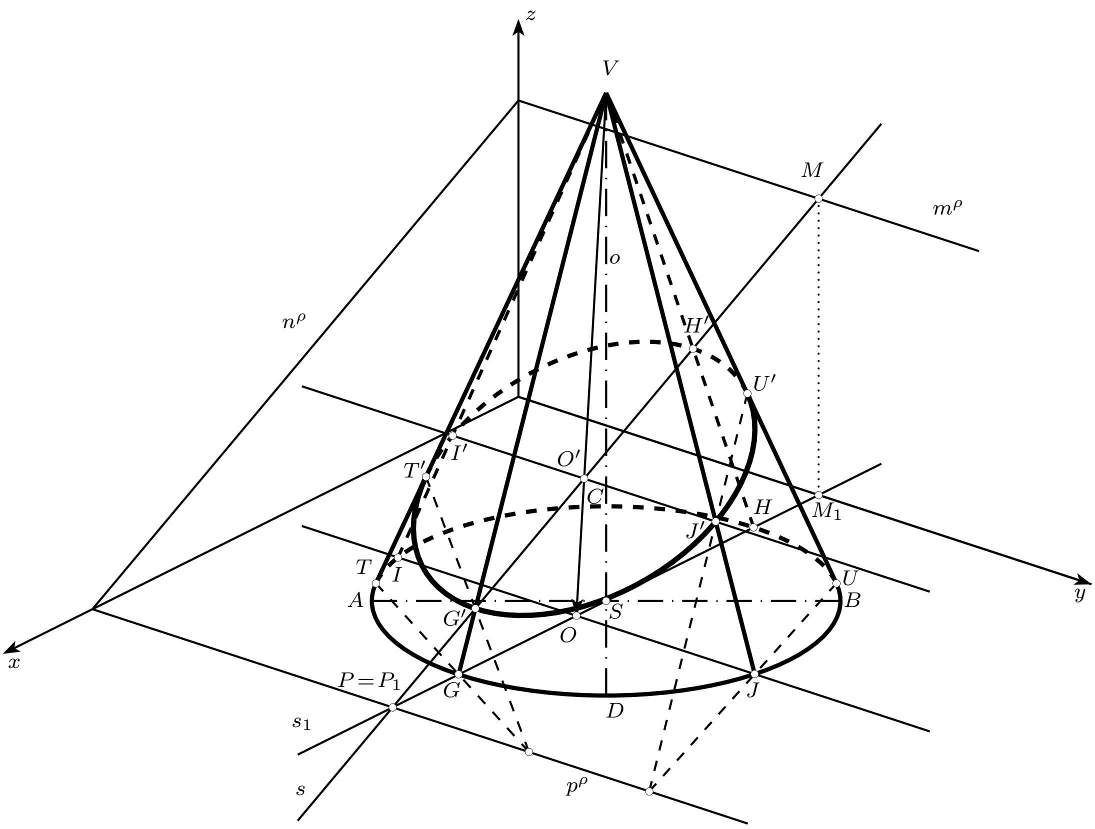
Bod řezu D' najdeme užitím *afinity.* Průsečíkem $BD \cap p^\rho$ vedeme polopřímku procházející bodem B', která protíná površku válce incidentní s bodem D v řezném bodě D'.

Bod řezu C' je středově souměrný s bodem D' podle středu O. Elipsu řezu máme tedy určenou sdruženými průměry $A'B'$ a $C'D'$ a můžeme ji vyrýsovat pomocí příčkové konstrukce. □

6.8 Řez kužele

Řezem kuželové plochy obecnou rovinou, která neprochází vrcholem plochy, je elipsa, parabola nebo hyperbola. Budeme se zabývat pouze případem, kdy řezná rovina ρ protíná plášť rotačního kužele v elipse.

Příklad 6.20. Určete eliptický řez rotačního kužele s podstavou v půdorysně π rovinou ρ zadanou stopami.



Obrázek 6.32: Eliptický řez rotačního kužele

Řešení. Aby řešení úlohy nebylo příliš složité, zadáme rovinu ρ ve speciální poloze – ρ je rovnoběžná s osou y (také by mohla být rovnoběžná s osou x). Tedy $p^\rho \parallel m^\rho \parallel y$. Kužel je zadán středem S podstavné kružnice, jejím poloměrem r a vrcholem V, $SV \parallel z$.

Podstavná kružnice kužele ležící v půdorysně π se do axonometrické průmětny promítá do elipsy s hlavní osou AB a vedlejší osou CD. Sestrojíme ji dle obrázku 6.8.

Kužel vykreslíme tak, že z vrcholu V vedeme tečny k podstavné elipse, které jsou obrysovými površkami kužele. Existuje konstrukce, která umožňuje přesně sestrojit body dotyku T a U tečen na elipse. My však tuto konstrukci nebudeme provádět, polohu bodů T a U pouze odhadneme. Zdůrazněme však, že nejsou totožné s hlavními vrcholy A a B.

Nyní sestrojíme eliptický řez kužele. Podstavná kružnice kužele a řezná elipsa jsou ve vzájemném kolineárním vztahu s osou kolineace p^ρ a středem kolineace, kterým je vrchol V

kužele. Budeme hledat dva průměry řezné elipsy, které jsou v prostoru vzájemně kolmé a do axonometrické průmětny se tudíž promítají do jejích sdružených průměrů. Určíme průměr $G'H'$ ležící na spádové přímce I. osnovy s, která je různoběžná s osou $o = SV$ kužele. Body G' a H' jsou nejnižší a nejvyšší bod řezu; tečna řezné elipsy je v těchto bodech rovnoběžná s p^ρ.

Středem S podstavné kružnice kužele vedeme půdorys s_1 spádové přímky I. osnovy. Přímka s_1 je přitom v prostoru kolmá ke stopě p^ρ. Protože je $p^\rho \parallel y$, bude $S \in s_1 \parallel x$.

Na podstavné kružnici kužele vytíná přímka s_1 průsečíky G a H. Jimi pak procházejí površky kužele GV a HV. Spádová přímka s leží v rovině ρ, takže pomocí stopníků najdeme její axonometrický průmět:

1. $P \in s_1 \cap p^\rho$,
2. $M_1 \in s_1 \cap y$, $M_1M \parallel z$, $M \in m^\rho$,
3. $s = PM$.

Pak je $G' \in s \cap GV$, $H' \in s \cap HV$.

Střed O' řezné elipsy kužele určíme jako střed úsečky $G'H'$. Přitom platí, že střed O' řezné elipsy **v kolineaci neodpovídá** středu S podstavy kužele! Bod O' se z vrcholu V promítá kolineárním paprskem do bodu $O \in s_1, O \neq S$.

Nyní budeme hledat průměr $I'J'$ řezné elipsy, který je v prostoru kolmý k průměru $G'H'$. $I'J'$ tedy leží na hlavní přímce I. osnovy ($\parallel p^\rho$) procházející bodem O.

V kolineaci bude této přímce odpovídat rovnoběžka s p^ρ procházející bodem O. Ta na podstavné kružnici kužele vytíná body I a J, kterými vedeme površky IV a JV kužele. Následně na výše zmínění hlavní přímce I. osnovy získáme body I' a J'. Protože površka IV kužele téměř splývá s obrysovou površkou TV, můžeme bod I' určit jako středově souměrný bod k bodu J' podle O'.

Nakonec na řezné elipse sestrojíme body přechodu viditelnosti T' a U'. Ty leží na obrysových površkách kužele TV a UV a najdeme je užitím kolineace:

i) Spojnice průsečíku $TG \cap p^\rho$ s bodem G' protne površku TV v bodě T'.
ii) Spojnice průsečíku $UJ \cap p^\rho$ s bodem J' protne površku UV v bodě U'.

V bodech přechodu viditelnosti T' a U' se mění viditelnost řezné elipsy.

Stejně jako v předchozím příkladě bychom mohli ve výkrese ze sdružených průměrů $G'H'$ a $I'J'$ zkonstruovat kolmé průměry, případně elipsu řezu vykreslit pomocí příčkové konstrukce. Poznamenejme však také, že elipsa je jednoznačně určena některými svými 5 body, po jejichž zadání ji grafické programy již umí vykreslit. □

6.9 Průsečíky přímky s tělesem

Základní princip nalezení průsečíků přímky s libovolným tělesem spočívá v tom, že zadanou přímkou proložíme rovinu, určíme řez tělesa touto rovinou a hledané průsečíky jsou společné body přímky s řezem tělesa.

Obecně by bylo možné proložit přímkou libovolnou rovinu, potom by však řez tělesem byl zbytečně složitý, proto volíme speciální typ roviny. Tou je:

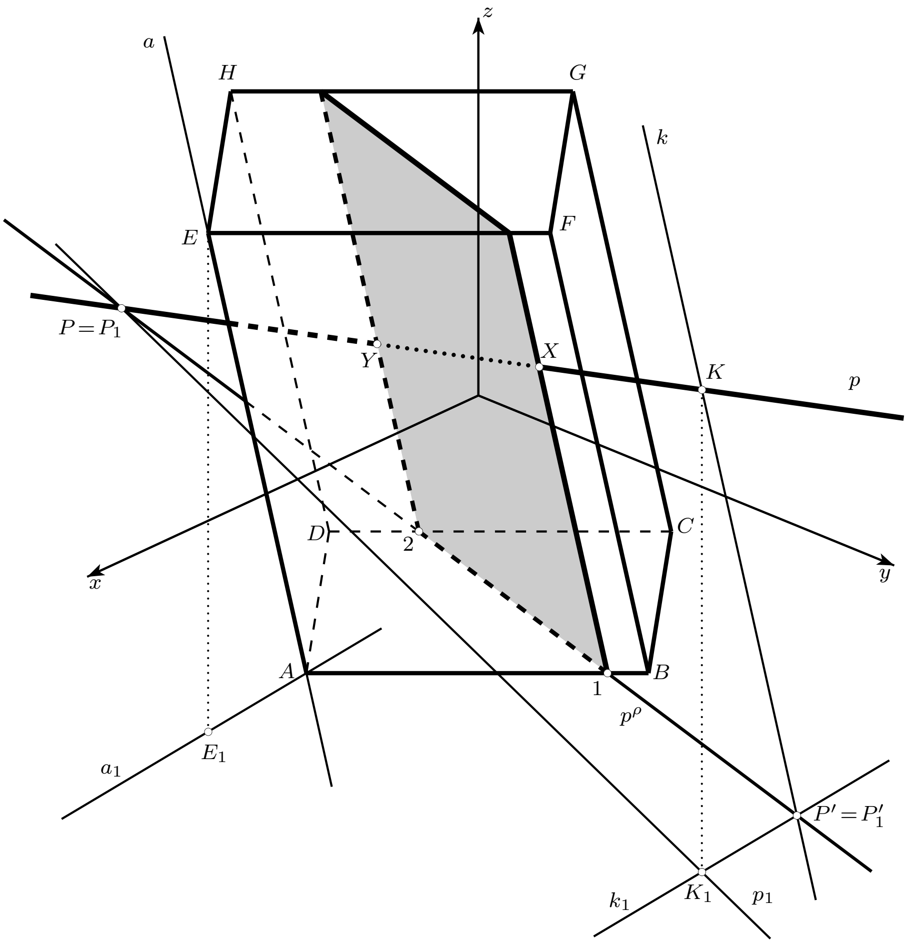
i) **osová rovina**, je-li zadaným tělesem *hranol* nebo *válec*,
ii) **vrcholová rovina**, je-li zadaným tělesem *jehlan* nebo *kužel*.

6.9.1 Průsečíky přímky s hranolem a válcem

Úlohy řešíme užitím **osové roviny**, která prochází zadanou přímkou a *je rovnoběžná*

i) *s některou pobočnou hranou hranolu,*
ii) *s osou válce.*

Příklad 6.21. Sestrojte průsečíky přímky p se šikmým hranolem, jehož podstava $ABCD$ (– rovnoběžník) leží v půdorysně π. Dále je zadán vrchol E horní podstavy.



Obrázek 6.33: Průsečíky přímky se šikmým hranolem

Řešení. Známe pobočnou hranu AE hranolu, zbývající pobočné hrany BF, CG a DH jsou s ní rovnoběžné a stejně dlouhé, můžeme tedy zadaný hranol narýsovat. Aby byla poloha vrcholu E horní podstavy určena jednoznačně, je zadán také jeho půdorys E_1. Rovněž je zadána poloha půdorysu p_1 přímky p.

Pobočnou hranou AE hranolu veďme přímku a, pak je přímka $a_1 = AE_1$ půdorysem přímky a. Sestrojíme *osovou rovinu* ρ, která prochází přímkou p a je rovnoběžná s přímkou a.

Na přímce p zvolíme pomocný bod K. Jeho půdorys $K_1 \in p_1$ tak, že $KK_1 \parallel z$.

Nyní veďme bodem K přímku k rovnoběžnou s přímkou a. Tedy $K \in k \parallel a$ a $K_1 \in k_1 \parallel a_1$.

Protože dolní podstava $ABCD$ hranolu leží v půdorysně π, najdeme půdorysnou stopu p^ρ roviny ρ:

$$\left.\begin{array}{l} P \in p \cap p_1 \\ P' \in k \cap k_1 \end{array}\right\} p^\rho = PP'$$

Půdorysná stopa p^ρ protíná dolní podstavu $ABCD$ hranolu v pomocných bodech 1 a 2. Nyní lze sestrojit řez hranolu rovinou ρ, což je *rovnoběžník*, jehož strany procházející body 1 a 2, které leží ve stěnách $ABFE$ a $DCGH$ hranolu, jsou rovnoběžné s hranou AE hranolu. Rovněž platí, že rovina ρ protíná dolní a horní podstavu hranolu ve dvou rovnoběžkách.

Zadaná přímka p má s rovnoběžníkem, který je řezem hranolu osovou rovinou ρ, společné body X a Y, což jsou hledané průsečíky přímky p s hranolem.

Závěrem stanovíme viditelnost přímky p. Mezi body X a Y je přímka p uvnitř tělesa a vyznačí se tečkovaně, od bodu Y po obrysovou hranu AE se nachází „za“ hranolem, je tedy neviditelná a vyznačí se čárkovaně, zbylé její části jsou viditelné, zakreslené plnou tlustou čarou. □

Příklad 6.22. Určete průsečíky přímky $p = KL$ se šikmým válcem, jehož dolní podstava leží v půdorysně. Dále je zadán bod S' horní podstavy.

Řešení. Nejprve narýsujeme dolní podstavu válce, kterou je kružnice v půdorysně se středem S a poloměrem r. Tato kružnice se do axonometrické průmětny promítá do elipsy s hlavní osou AB a vedlejší osou CD. Sestrojíme ji dle obrázku 6.8. Horní podstava válce je určena středem S', známe také jeho půdorys S'_1. Horní a dolní podstavu válce vidíme jako shodné elipsy.

Obrysové površky válce jsou společné tečny těchto dvou elips a mají směr rovnoběžný s osou válce $o = SS'$. Existuje konstrukce, která umožňuje tyto obrysové površky přesně narýsovat, my se spokojíme s jejich přibližným určením. Sestrojíme-li v průsečíku podstavné elipsy a osy o válce tečnu elipsy, protne rovnoběžka s touto tečnou vedená středem S podstavnou elipsu v bodech dotyku T a T'. (Tato konstrukce není v obrázku 6.34 znázorněna.) Obrysové površky válce procházejí body T a T' a mění se v nich viditelnost podstavné elipsy válce. Poznamenejme, že u šikmého válce jsou body T, T' různé od bodů A, B!

Přímka p je zadána svým půdorysem $p_1 = K_1L_1$ a axonometrickým průmětem $p = KL$. Přímkou p proložíme *osovou rovinu*, která je rovnoběžná s osou o válce, jejímž půdorysem je spojnice $o_1 = SS'_1$.

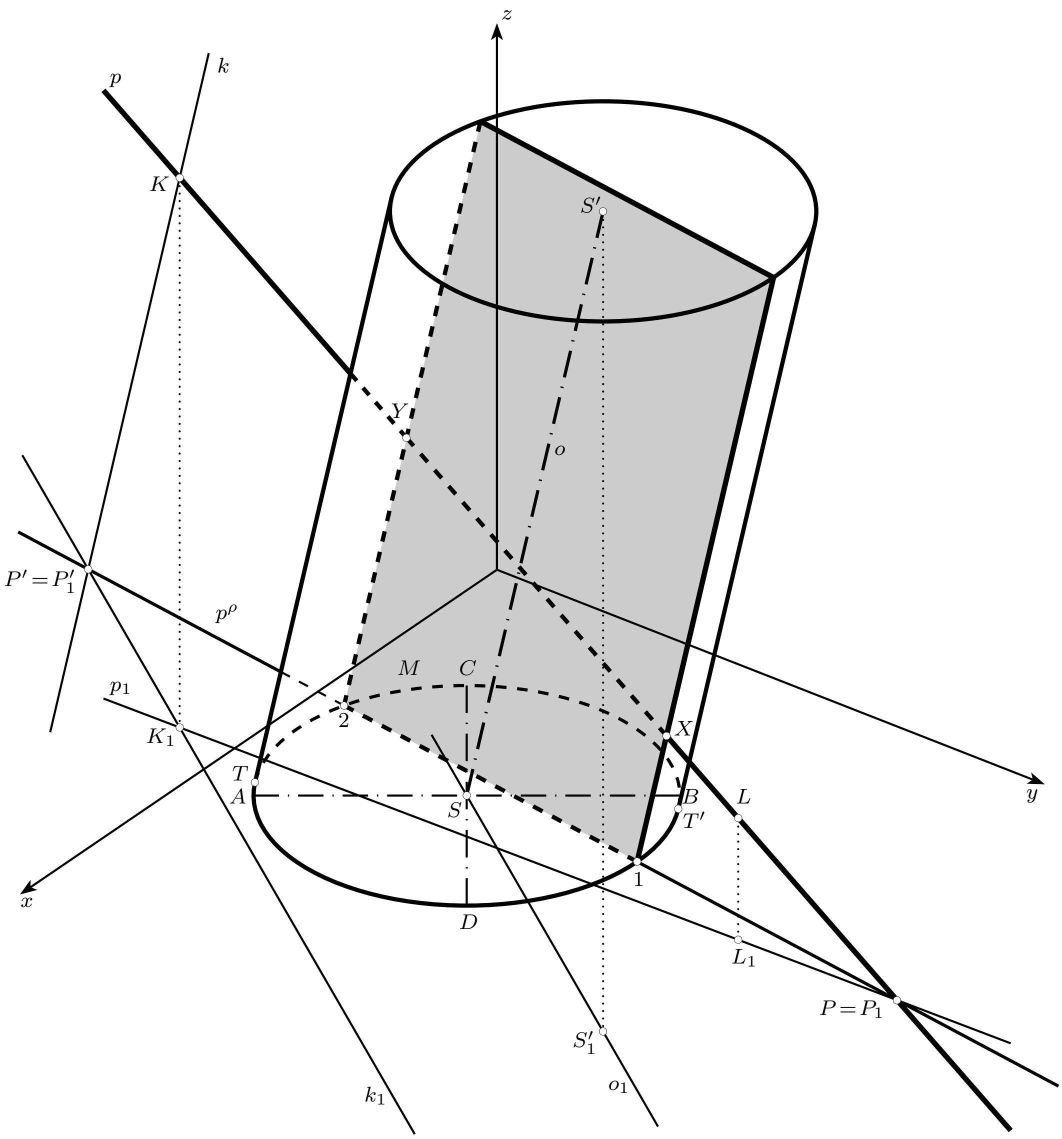
Na přímce p zvolme například bod K, kterým vedeme přímku $k \parallel o$. Pak $K_1 \in k_1 \parallel o_1$.

Protože dolní podstava válce leží v půdorysně π, najdeme půdorysnou stopu p^ρ roviny ρ:

$$\left.\begin{array}{l} P \in p \cap p_1 \\ P' \in k \cap k_1 \end{array}\right\} p^\rho = PP'$$

Průsečíky 1 a 2 stopy p^ρ s dolní podstavou válce určují osový řez tělesem, kterým je *rovnoběžník*. Body 1 a 2 vedeme površky válce rovnoběžně s osou o. Ty pak vytínají na přímce p hledané průsečíky X a Y přímky p s válcem.

Na závěr stanovíme viditelnost přímky p. □



Obrázek 6.34: Průsečíky přímky se šikmým válcem

6.9.2 Průsečíky přímky s jehlanem a kuželem

Úlohy řešíme užitím **vrcholové roviny**, která prochází zadanou přímkou a *je incidentní s vrcholem V tělesa*.

Příklad 6.23. Sestrojte průsečíky přímky $p = KL$ se šikmým jehlanem, jehož podstavou je obecný pětiúhelník $ABCDE$ v půdorysně π. Je zadán vrchol V jehlanu.

Řešení. Přímka p je určena dvěma body K a L. To znamená, že jsou dány také půdorysy K_1 a L_1, jejichž spojnicí je půdorys p_1 přímky p. Dále je zadán vrchol V jehlanu, známe tedy i jeho půdorys V_1.

Úlohu řešíme užitím *vrcholové roviny*, která prochází přímkou p a vrcholem V jehlanu. Řezem jehlanu vrcholovou rovinou ρ je *trojúhelník*, jehož jedna strana leží na půdorysné stopě p^ρ a protilehlým vrcholem trojúhelníku vůči této straně je bod V.

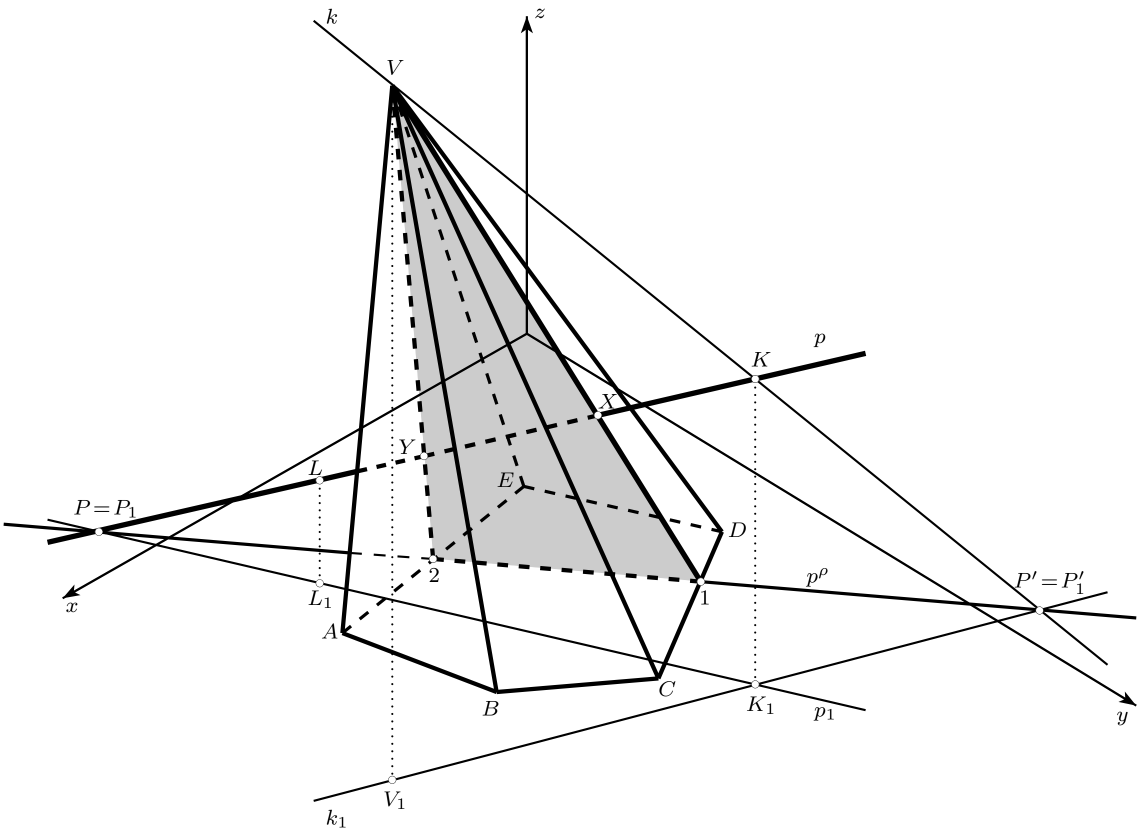
Musíme určit další přímku k vrcholové roviny. Na přímce p zvolíme její libovolný bod, například bod K, který spojíme s vrcholem V jehlanu. Je tedy $k = VK$, $k_1 = V_1K_1$.

Protože dolní podstava jehlanu leží v půdorysně π, najdeme půdorysnou stopu p^ρ roviny ρ:

$$\left.\begin{array}{l} P \in p \cap p_1 \\ P' \in k \cap k_1 \end{array}\right\} p^\rho = PP'$$

Půdorysná stopa p^ρ protíná podstavu jehlanu v pomocných bodech 1 a 2, které spojíme s vrcholem V, čímž získáme řez tělesa vrcholovou rovinou. Společné body X a Y tohoto řezu a přímky p jsou hledané průsečíky přímky p s jehlanem.

Závěrem stanovíme viditelnost přímky p. □



Obrázek 6.35: Průsečíky přímky se šikmým jehlanem

Příklad 6.24. Určete průsečíky přímky p s rotačním kuželem s podstavou v půdorysně π.

Řešení. Rotační kužel je kolmý kužel s kruhovou podstavou – známe její střed S a poloměr r. Do axonometrické průmětny se podstavná kružnice kužele promítá do elipsy s hlavní osou AB a vedlejší osou CD. Sestrojíme ji dle obrázku 6.8.

Kužel je dále zadán vrcholem V, jehož půdorys V_1 splývá se středem podstavy S. Obrysové površky kužele jsou tečny podstavné elipsy vedené z vrcholu V kužele. Existuje konstrukce, která umožňuje na elipse přesně sestrojit body dotyku T a T', my se však spokojíme s jejich přibližným odhadem. V bodech T, T' se mění viditelnost podstavné elipsy.

Úlohu řešíme užitím *vrcholové roviny*, která je určena přímkou p a vrcholem V kužele. Řezem kužele vrcholovou rovinou ρ je *trojúhelník*, jehož jedna strana leží na půdorysné stopě p^ρ a protilehlým vrcholem trojúhelníku vůči této straně je bod V.

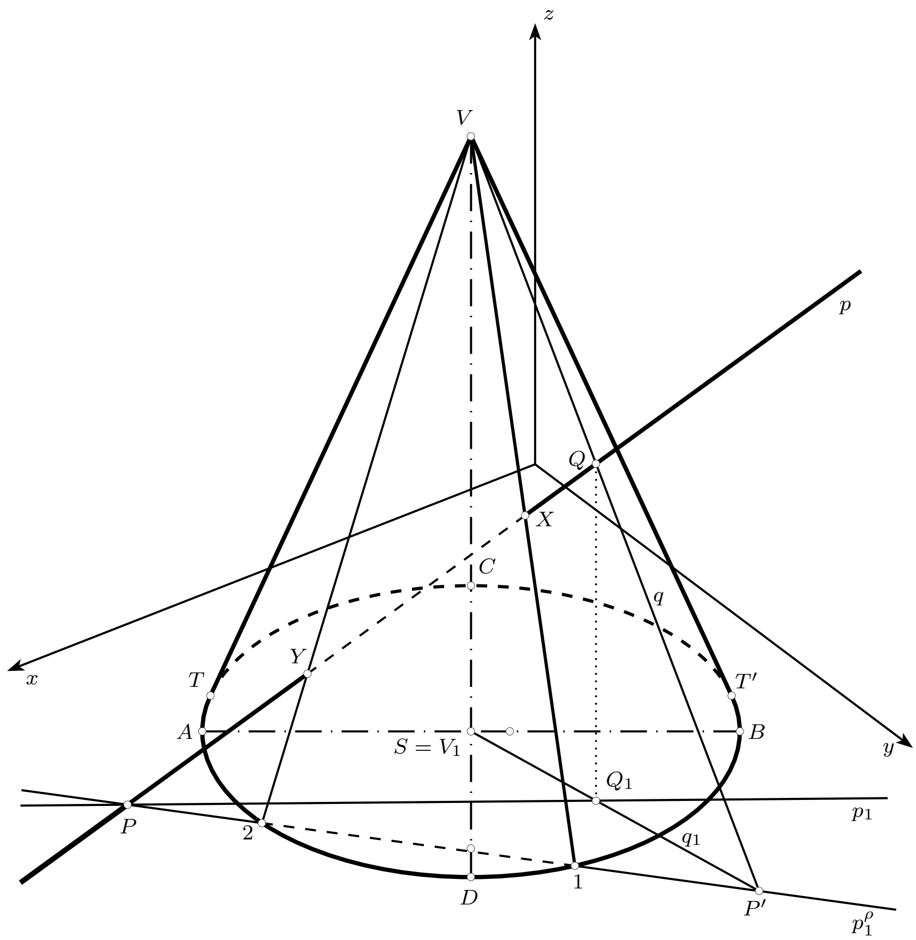
Musíme sestrojit další přímku q vrcholové roviny. Na přímce p zvolíme její libovolný bod Q, který spojíme s vrcholem V jehlanu. Půdorys $Q_1 \in p_1$, přičemž je $QQ_1 \parallel z$. Pak $q = VQ$ a $q_1 = V_1Q_1$.

Protože dolní podstava kužele leží v půdorysně π, najdeme půdorysnou stopu p^ρ roviny ρ:

$$\left.\begin{array}{l} P \in p \cap p_1 \\ P' \in q \cap q_1 \end{array}\right\} p^\rho = PP'$$

Půdorysná stopa p^ρ protíná podstavu kužele v pomocných bodech 1 a 2, které spojíme s vrcholem V, čímž získáme řez tělesa vrcholovou rovinou. Společné body X a Y tohoto řezu a přímky p jsou hledané průsečíky přímky p s kuželem.

Na závěr stanovíme viditelnost přímky p. □



Obrázek 6.36: Průsečíky přímky s kuželem

6.10 Osvětlení těles

Rozlišujeme rovnoběžné a středové osvětlení tělesa. Rovnoběžné osvětlení je určeno světelným paprskem $\vec{s}$, středové osvětlení je zadáno středem osvětlení S.

Při osvětlování těles budeme pracovat s pojmy

i) vržený stín, mez vrženého stínu,

ii) vlastní stín, mez vlastního stínu,

které se nám ozřejmí během následujícího příkladu.

Sestrojme rovnoběžné osvětlení šikmého jehlanu s podstavou $ABCD$ (rovnoběžník) v půdorysně π a vrcholem V, známe-li směr světelného paprsku $\vec{s}$.

Aby byl zadán vrchol V šikmého jehlanu, musí být rovněž dána poloha jeho půdorysu V_1 tak, že $VV_1 \parallel z$. Světelný paprsek je určen axonometrickým průmětem $\vec{s}$ a půdorysem $\vec{s_1}$.

Nejprve sestrojíme *vržený stín* vrcholu V jehlanu do půdorysny π. Bodem V vedeme světelný paprsek $s \parallel \vec{s}$ a najdeme jeho průsečík s půdorysnou, neboli půdorysný stopník. To je zároveň vržený stín vrcholu V do půdorysny, který označíme V'. Tuto konstrukci provedeme tak, že $V \in s \parallel \vec{s}$, $V_1 \in s_1 \parallel \vec{s_1}$ a $V' \in s \cap s_1$.

Vržené stíny pobočných hran $AV, \dots, DV$ jehlanu jsou úsečky $AV', \dots, DV'$. Vidíme, že *mez vrženého stínu* je tvořena úsečkami BV' a DV'. Přesněji řečeno, mezí (tj. hranicí) vrženého stínu do půdorysny je čtyřúhelník $V'BAD$.

Platí následující tvrzení.

Věta 6.25. *Mez vrženého stínu je vrženým stínem meze vlastního stínu.*

Toto tvrzení říká, že ty hrany na tělese, jejichž osvětlením vznikla mez vrženého stínu, budou ***mezí vlastního stínu***. Přitom ve *vlastním stínu* je ta část tělesa, na níž nedopadají světelné paprsky.

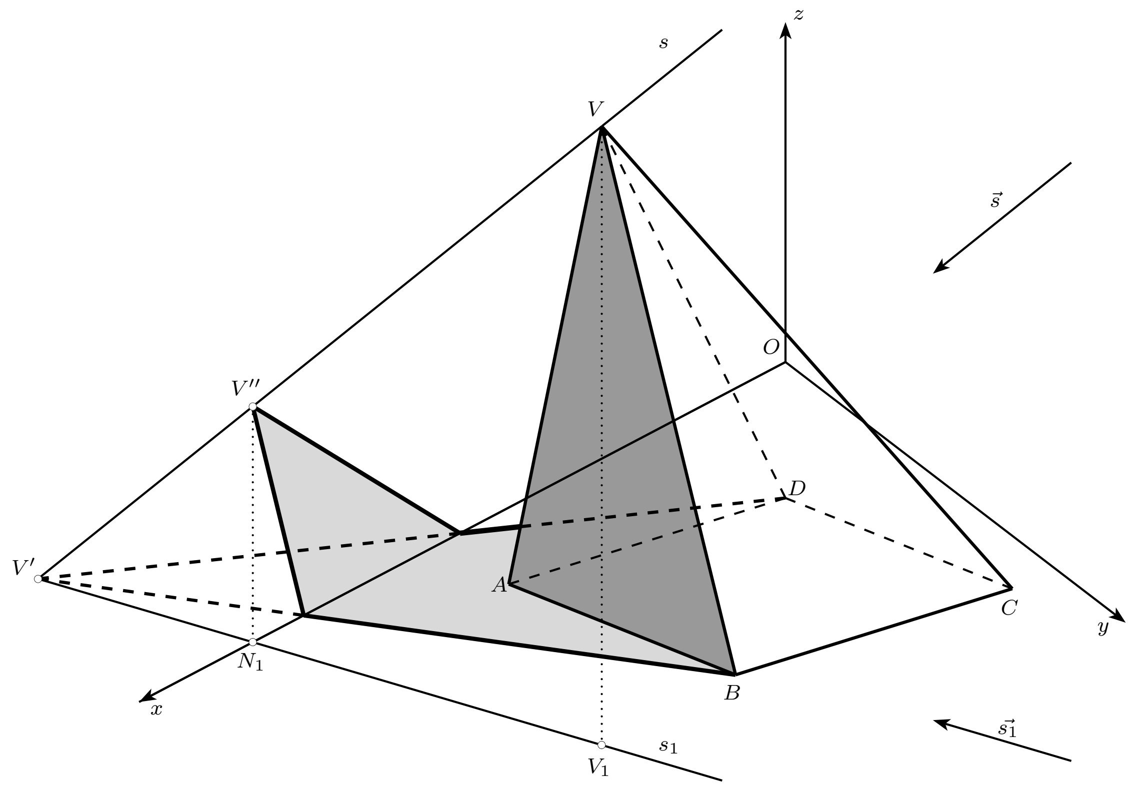
Protože mez vrženého stínu tvoří úsečky BV' a DV', budou hrany BV a DV jehlanu tvořit *mez vlastního stínu*. Celkově tvoří mez vlastního stínu na jehlanu hrany BV, BA, AD a DV. Ve *vlastním stínu* leží tedy stěny ABV a ADV jehlanu, přičemž stěna ABV je viditelná, takže ji můžeme vyšrafovat.

Nyní sestrojíme vržený stín jehlanu do nárysny ν. Vrženým stínem vrcholu V jehlanu do nárysny je nárysný stopník V'' světelného paprasku s, který prochází bodem V. Získáme ho tak, že průsečíkem $N_1 \in s_1 \cap x$, $(V_1 \in s_1 \parallel \vec{s_1})$, vedeme ordinálu, která protne přímku s, $(V \in s \parallel \vec{s})$, v bodě V''.

Vržené stíny jehlanu do půdorysny a nárysny na sebe musí „navazovat“, jinak řečeno, vržený stín jehlanu do půdorysny se na ose x „láme“ do vrženého stínu jehlanu do nárysny. To znamená, že průsečíky $BV' \cap x$ a $DV' \cap x$ spojíme s bodem V'', čímž dostaneme vržený stín jehlanu do nárysny.

Příklad 6.26. Osvětlete šikmý kužel, znáte-li střed osvětlení S. Podstavou kužele je kružnice se středem S' a poloměrem r, dále je zadán vrchol V kužele.

Řešení. Sestrojíme kruhovou podstavu kužele, která se do axonometrické průmětny promítá do elipsy s hlavní osou AB a vedlejší osou CD. Sestrojíme ji dle obrázku 6.8. Obrysové površky kužele získáme jako tečny vedené z vrcholu V k podstavné elipse. Body dotyku, v nichž se mění viditelnost podstavné elipsy, stanovíme pouze odhadem.



Obrázek 6.37: Rovnoběžné osvětlení šikmého jehlanu

Šikmý kužel je zadán vrcholem V, známe také polohu jeho půdorysu V_1, přičemž je $VV_1 \parallel z$.

Abychom určili vržený stín kužele do půdorysny π, musíme sestrojit vržený stín V' vrcholu V do půdorysny. Vrcholem V proložíme světelný paprsek s, který protíná půdorysnu ve svém půdorysném stopníku, což je hledaný bod V': $s = SV$, $s_1 = S_1V_1$, $V' \in s \cap s_1$.

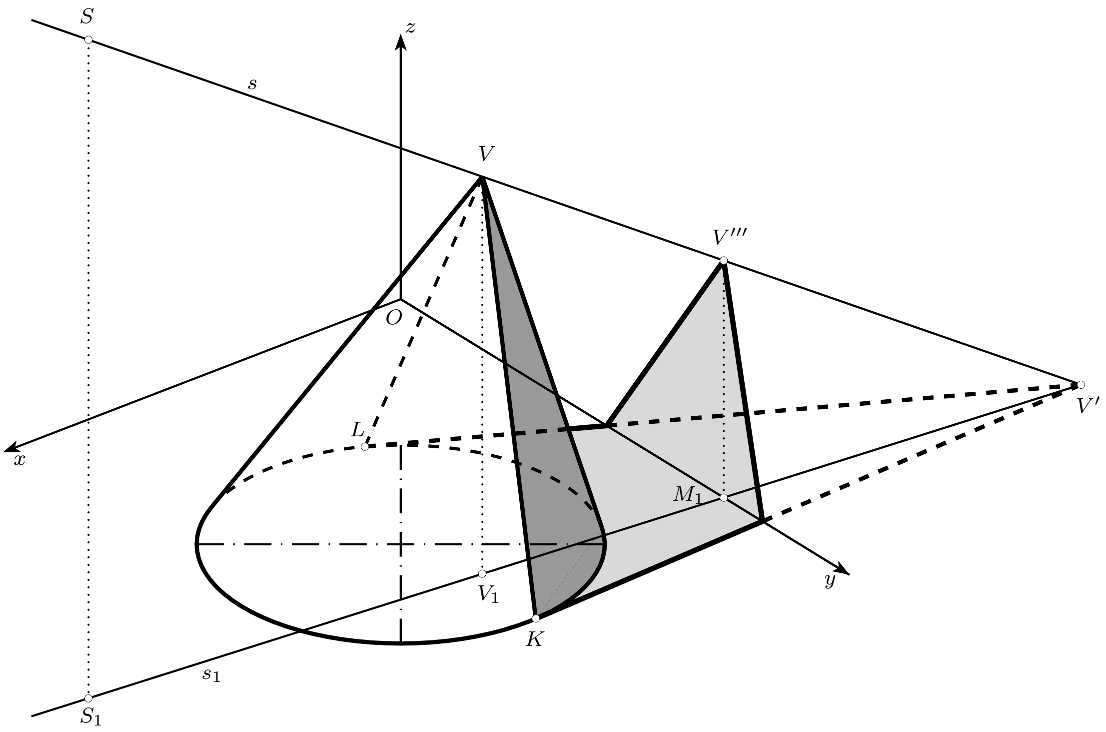
Nyní z bodu V' vedeme tečny k podstavné elipse kužele, které tvoří *mez vrženého stínu* kužele, a dotýkají se jí v bodech K a L. *Vržený stín* kužele do půdorysny je tedy omezen úsečkami KV' a LV' a dále obloukem KL na podstavné elipse.

Proto je *mez vlastního stínu* na kuželi tvořena jeho površkami KV a LV. *Ve vlastním stínu* tedy leží část pláště kužele, která přísluší oblouku KL elipsy a je omezena površkami KV a LV. Přitom viditelná část pláště ležící ve vlastním stínu, kterou můžeme vyšrafovat, je omezena površkou KV a obrysovou površkou kužele.

Dále určíme vržený stín kužele do bokorysny μ. Najdeme vržený stín V''' vrcholu V do bokorysny jakožto bokorysný stopník světelného paprsku s procházejícího vrcholem V: $s = SV$, $s_1 = S_1V_1$, $M_1 \in s_1 \cap y$, $M_1V''' \parallel z$, $V''' \in s$.

Vržený stín kužele do půdorysny se „láme“ na ose y do vrženého stínu do bokorysny. Průsečíky $KV' \cap y$ a $LV' \cap y$ spojíme s bodem V''', čímž získáme mez vrženého stínu kužele do bokorysny. □

Příklad 6.27. Vyřešte rovnoběžné osvětlení šikmého hranolu s podstavou $ABCD$ (rovnoběžník) v půdorysně π paprskem $\vec{s}$. Je zadán bod E horní podstavy hranolu.



Obrázek 6.38: Středové osvětlení šikmého kužele

Řešení. Nejprve narýsujeme hranol se zadanou pobočnou hranou AE, zbývající hrany $BF, \dots, DH$ jsou s ní rovnoběžné a stejně dlouhé. Aby byl bod E určen jednoznačně, je dána také poloha jeho půdorysu E_1. Světelný paprsek je zadán axonometrickým průmětem $\vec{s}$ a půdorysem $\vec{s_1}$.

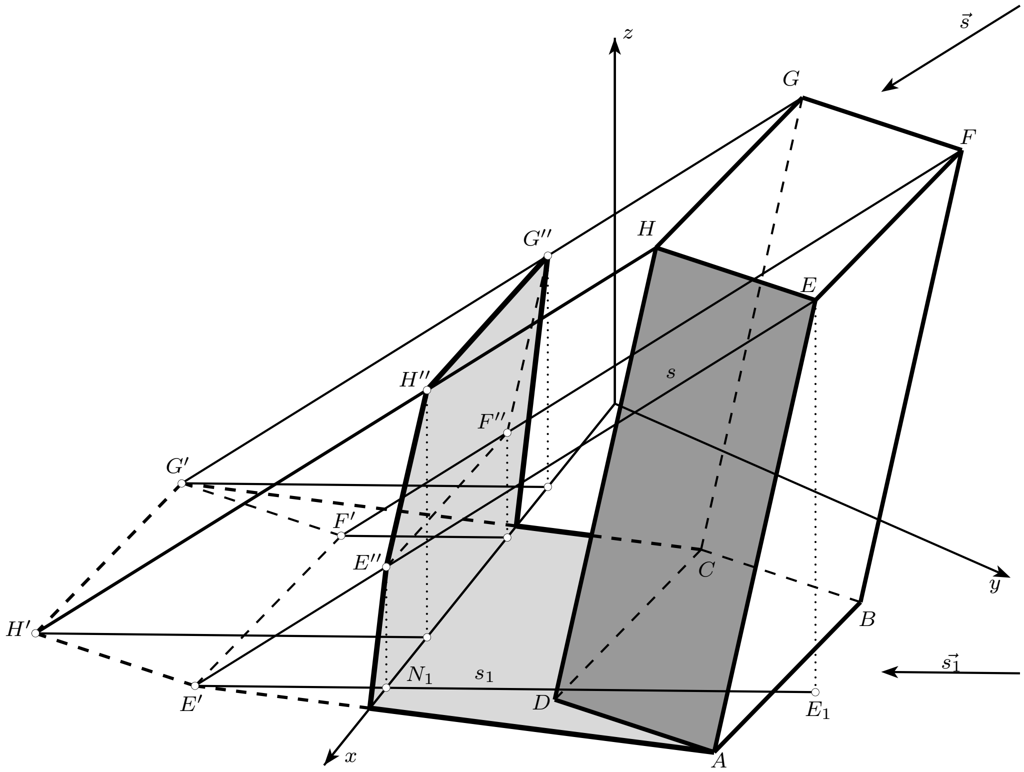
Najdeme vržený stín E' bodu E do půdorysny, což je půdorysný stopník světelného paprsku procházejícího bodem E:

i) $E \in s \parallel \vec{s}$,
ii) $E_1 \in s_1 \parallel \vec{s_1}$,
iii) $E' \in s \cap s_1$.

Protože horní podstava hranolu leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou, bude vržený stín $E'F'G'H'$ horní podstavy do půdorysny rovnoběžník shodný s $EFGH$. Můžeme si představit, že se horní podstava $EFGH$ posunula ve směru $\vec{s}$ do půdorysny π.

Pobočné hrany $AE, \dots, DH$ hranolu vrhají stíny do úseček $AE', \dots, DH'$, přičemž *mez vrženého stínu* je tvořena úsečkami AE' a CG'. *Mez vlastního stínu* je tedy na hranolu vymezena jeho hranami AE a CG, což znamená, že *ve vlastním stínu* leží stěny $ADHE$ a $CDHG$. Přitom je první z nich viditelná, můžeme ji tedy vyšrafovat, druhá stěna ležící ve vlastním stínu je neviditelná.

Jelikož část vrženého stínu leží v neviditelné časti půdorysny, bude se vržený stín na ose x „lámat“ do nárysny. Potřebujeme najít vržené stíny $E'', \dots, H''$ vrcholů horní podstavy do nárysny. To jsou ovšem nárysné stopníky světlených paprsků procházejících body $E, \dots, H$. Bod E'' najdeme takto:



Obrázek 6.39: Rovnoběžné osvětlení šikmého hranolu

i) $E \in s$, $E_1 \in s_1$,
ii) $N_1 \in s_1 \cap x$
iii) $E'' \in s$, přičemž $N_1E'' \parallel z$.

Kdybychom znali body $F_1, \ldots, H_1$, (jejich polohu je možné snadno odvodit), můžeme výše uvedený postup zopakovat. Nicméně my si všimneme, že paprsek s_1 prochází kromě bodu E_1 také bodem E'. Namísto toho, abychom paprsky s_1 prokládali body $F_1, \ldots, H_1$, budeme je vést body $F', \ldots, H'$. Poté stanovíme jejich průsečíky s osou x. Ordinály vedené těmito průsečíky protnou světelné paprsky s procházející vrcholy $F, \ldots, H$ v hledaných bodech $F'', \ldots, H''$.

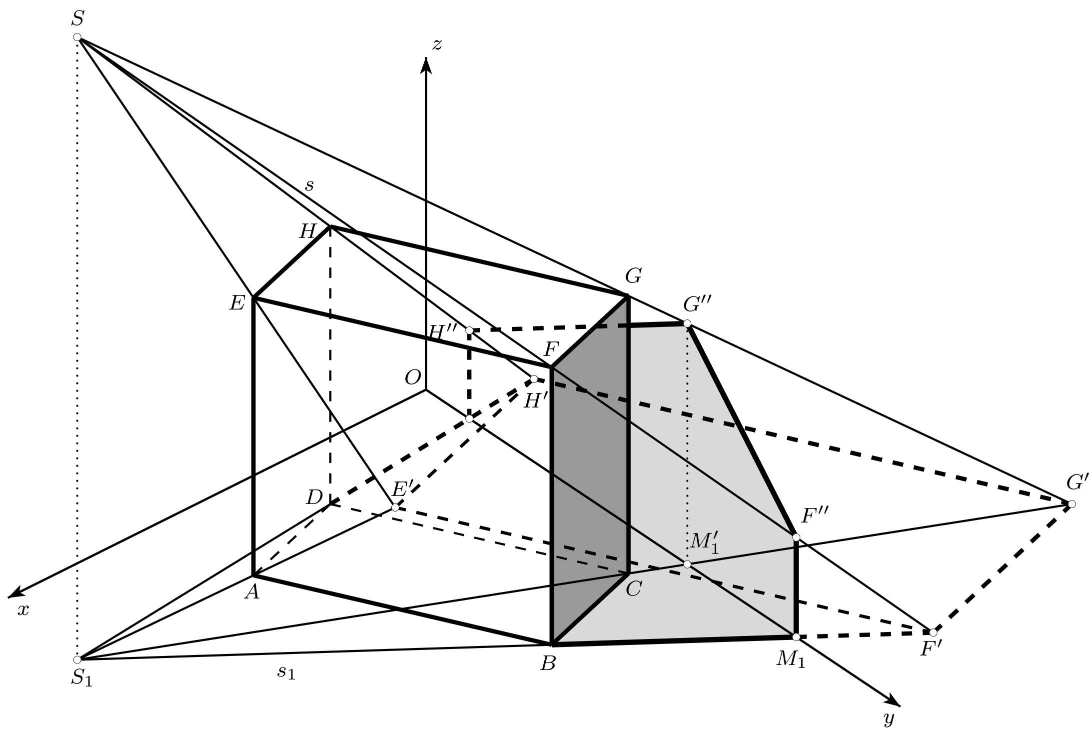
Tento postup konstrukce se nazývá ***metoda zpětných paprsků***.

Ještě jednou zdůrazněme, že průsečíky s osou x vytínají paprsky s_1, nikoliv vržené stíny hran $AE', \ldots, DH'$!

Vrženým stínem horní podstavy $EFGH$ do nárysny je rovnoběžník $E''F''G''H''$. Stíny pobočných hran $AE', \ldots, DH'$ protínají osu x a z těchto průsečíků potom pokračují v nárysně do bodů $E'', \ldots, H''$.

Pro nás jsou důležité průsečíky $AE' \cap x$ a $CG' \cap x$, protože spojnice těchto bodů s body E'' a G'' tvoří *mez vrženého stínu* v nárysně ν. Vržený stín do nárysny je dále omezen úsečkami $E''H''$ a $H''G''$. □

Příklad 6.28. Osvětlete kolmý hranol s podstavou $ABCD$ (rovnoběžník) v půdorysně π, znáte-li jeho redukovanou výšku v a střed osvětlení S.



Obrázek 6.40: Středové osvětlení kolmého hranolu

Řešení. Pobočné hrany $AE, \ldots, DH$ hranolu jsou rovnoběžné s osou z, známe polohu vrcholu E horní podstavy, neboť $AE \parallel z$, $|AE| = v$. Střed osvětlení je zadán axonometrickým průmětem S a půdorysem S_1.

Nejprve sestrojíme vržený stín horní podstavy do půdorysny. Jednotlivými vrcholy $E, \ldots, H$ proložíme světelné paprsky, spojíme je tedy se středem osvětlení S. Potom najdeme jejich půdorysné stopníky.

Protože se jedná o kolmý hranol, půdorysy vrcholů horní podstavy splývají s vrcholy $A, \ldots, D$ dolní podstavy. Spojíme je proto s bodem S_1. Světelné paprsky s a jejich půdorysy s_1 se protínají ve vržených stínech $E', \ldots, H'$ vrcholů horní podstavy. Konstrukce bodu E' je tato: $s = SE$, $s_1 = S_1A$, $E' \in s \cap s_1$. Stejně postupujeme při konstrukci zbývajících bodů F', G' a H'.

Vržený stín $E'F'G'H'$ horní podstavy do půdorysny je rovnoběžník, jehož strany jsou rovnoběžné s odpovídajícími hranami horní podstavy. Jedná se vlastně o stejnolehlost v prostoru se středem stejnolehlosti S. Jinak řečeno, například hrana $FG \parallel \pi$ určuje světelnou rovinu SFG, která musí půdorysnu π protnout v průsečnici $F'G' \parallel FG$.

Pobočné hrany $AE, \ldots, DH$ hranolu vrhají stíny do úseček $AE', \ldots, DH'$, které jsou částí světelných paprsků s_1. Přitom *mez vrženého stínu* tvoří úsečky BF' a DH', *mez vlastního stínu* na tělese je proto určena hranami BF a DH. Ve vlastním stínu leží stěny $BCGF$ a $CDHG$ hranolu, přičemž stěna $BCGF$ je současně viditelná a můžeme ji tudíž vyšrafovat.

Protože část vrženého stínu leží v neviditelné části půdorysny π, bude se na ose y vržený stín hranolu „lámat" do bokorysny μ. Najdeme vržené stíny vrcholů F, G a H do bokorysny. To jsou bokorysné stopníky světelných paprsků s, které jimi procházejí. Opět můžeme použít *metodu zpětných paprsků*, což znamená, že půdorysy světelných paprsků proložíme body F', G' a H' místo toho, abychom je vedli přes půdorysy vrcholů F, G a H horní podstavy, tj. přes body B, C a D. Tedy

i) $s = SF$, $s_1 = S_1F'$,
ii) $M_1 \in s_1 \cap y$,
iii) $F'' \in s$, přičemž $M_1F'' \parallel z$.

Podobně sestrojíme body G'' a H''. Kdybychom ještě našli bod E'', uvidíme, že vrženým stínem horní podstavy hranolu do bokorysny je obecný čtyřúhelník $E''F''G''H''$, který se na ose y protíná s rovnoběžníkem $E'F'G'H'$.

Nás zajímají průsečíky $BF' \cap y$ a $DH' \cap y$, z nichž pak stín tělesa v bokorysně pokračuje do bodů F'' a H'', a to rovnoběžně s osou z, neboť jsou hrany tělesa BF, $DH \parallel z$. Vržený stín hranolu do bokorysny je dále omezen úsečkami $F''G''$ a $G''H''$. □

Příklad 6.29. Sestrojte rovnoběžné osvětlení šikmého válce, znáte-li střed $\overline{S}$ a poloměr r dolní podstavy, střed S horní podstavy a směr $\vec{s}$ světelných paprsků.

Řešení. Ze zadaných údajů sestrojíme axonometrický obraz šikmého válce, přičemž obrysové površky válce jsou společné tečny shodných elips, do nichž se promítají obě podstavy válce.

Nejprve sestrojíme vržený stín horní podstavy válce do půdorysny π. Známe přitom půdorys S_1 středu S horní podstavy válce a půdorys $\vec{s_1}$ světelného paprsku:

i) $S \in s \parallel \vec{s}$,
ii) $S_1 \in s_1 \parallel \vec{s_1}$,
iii) $S' \in s \cap s_1$ je vržený stín středu S do π.

Elipsa, do níž se promítá horní podstava válce, vrhá stín do půdorysny π do elipsy, která je s ní shodná. Mez vrženého stínu je tvořena společnými tečnami této elipsy v π a elipsy, která zobrazuje dolní podstavu válce. Jedná se o úsečky $\overline{K}K'$ a $\overline{L}L'$, kde $\overline{K}, \overline{L}$ jsou body dotyku na dolní podstavě válce a K', L' jsou body dotyku na elipse, která je vrženým stínem horní podstavy. Tyto tečny jsou rovnoběžné se spojnicí $\overline{S}S'$.

Mezí vlastního stínu na válci jsou pak jeho površky procházející body $\overline{K}$ a $\overline{L}$, které jsou rovnoběžné s osou válce $\overline{S}S$.

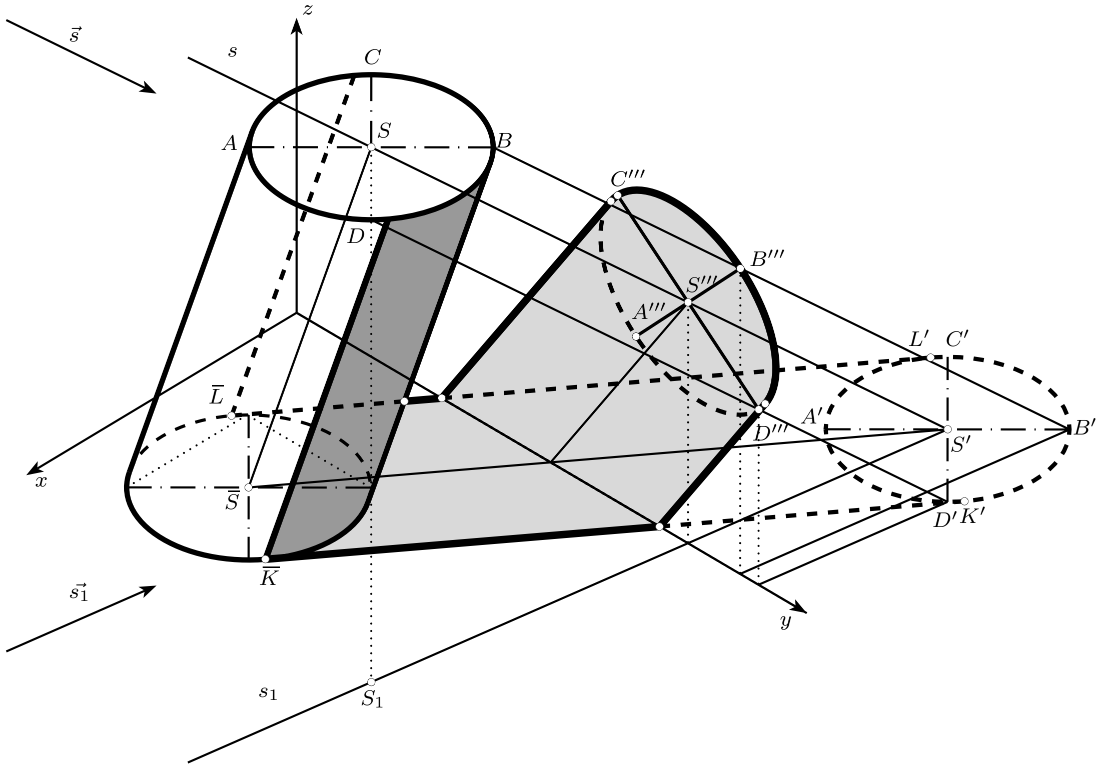
Dále setrojíme vržený stín horní podstavy válce do bokorysny μ. Tímto stínem bude elipsa, která je určená *sdruženými průměry* $A'''B'''$ a $C'''D'''$. Jedná se o vržené stíny kolmých průměrů AB a CD elipsy zobrazující horní podstavu.

Stačí určit jenom vržený stín S''' středu S a dále například vržené stíny B''' hlavního vrcholu B a D''' vedlejšího vrcholu D horní podstavy, což provedeme užitím *metody zpětných paprsků.*

Vrženými stíny S', B' a D' procházejí půdorysy $s_1 \parallel \vec{s_1}$ světelných paprsků, které protínají osu y v bodech, jimiž vedeme ordinály rovnoběžné s osou z. Ty pak protínají světelné paprsky $s \parallel \vec{s}$, které procházejí body S, B a D, ve vržených stínech S''', B''' a D''' do μ.

Chybějící body A''' a C''' snadno určíme středovou souměrností. Vrženým stínem horní podstavy do bokorysny je tedy elipsa určená svými sdružený průměry a můžeme ji vykreslit užitím *příčkové konstrukce.*

Stín válce vržený do π se na ose y „láme“ do stínu vrženého do μ. Mezí vrženého stínu do μ jsou tečny elipsy v bokorysně vedené průsečíky $\overline{K}K' \cap y$ a $\overline{L}L' \cap y$. Tyto tečny jsou přitom rovnoběžné se spojnicí průsečíku $\overline{S}S' \cap y$ a bodu S'''. □



Obrázek 6.41: Rovnoběžné osvětlení šikmého válce

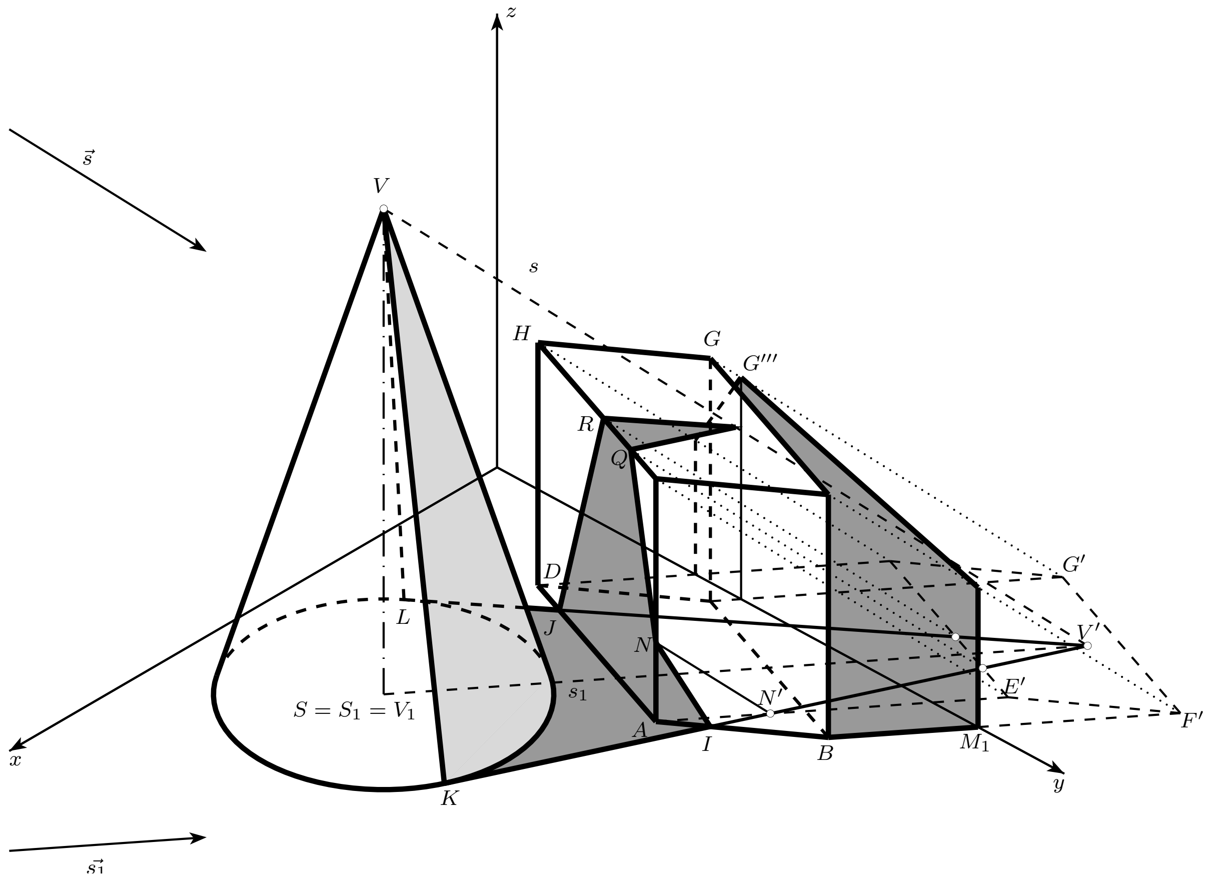
Příklad 6.30. Rotační kužel má podstavu v π, která je určena středem S a poloměrem r. Dále je zadána jeho redukovaná výška v. Kolmý hranol má dolní podstavu $ABCD$ (rovnoběžník) v π a známe bod E horní podstavy. Světelný paprsek je zadaný vektorem $\vec{s}$ a jeho půdorysem $\vec{s_1}$. V rovnoběžném osvětlení sestrojte vlastní a vržené stíny obou těles a také vržený stín kužele na hranol.

Řešení. Narýsujeme rotační kužel – jeho kruhová podstava se do axonometrické průmětny zobrazí do elipsy, kterou sestrojíme dle obrázku 6.8. Osa kužele $SV \parallel z$, přičemž $|SV| = v$. Narýsujeme obrysové površky kužele, což jsou tečny vedené z vrcholu V k podstavné elipse kužele.

Dále sestrojíme kolmý hranol tak, že je $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH \parallel z$.

Určíme vržený stín kužele do půdorysny, přitom hranol, na který také vrhá stín, zatím nebereme do úvahy:

i) $V \in s \parallel \vec{s}$,
ii) $S \in s_1 \parallel \vec{s_1}$,
iii) $V' \in s \cap s_1$, V' je vržený stín vrcholu V do π.



Obrázek 6.42: Vržený stín kužele na hranol

Z bodu V' vedeme tečny k podstavné elipse kužele, které se jí dotýkají v bodech K a L. Tím získáme vržený stín kužele do π, mez vlastního stínu tvoří jeho površky KV a LV.

Podobně najdeme vržený stín hranolu do půdorysny. Vrcholy $E, \ldots, H$ horní podstavy vedeme světelné paprsky rovnoběžně s $\vec{s}$, vrcholy $A, \ldots, D$ vedeme půdorysy světelných paprsků rovnoběžně s $\vec{s_1}$. Příslušné průsečíky $E', \ldots, H'$ jsou vržené stíny vrcholů horní podstavy do π.

Protože je mez vrženého stínu do π tvořena úsečkami $BF', F'G', G'H', H'D$, musí být vlastní stín na tělese omezen hranami BF, FG, GH a HD, což znamená, že ve vlastním stínu leží stěny $BFGC$ a $CGHD$ hranolu, které jsou však zároveň neviditelné.

Nyní sestrojíme vržený stín kužele na hranol. Užijeme k tomu *metodu zpětných paprsků*. Mez vrženého stínu kužele do π je tvořena úsečkami KV' a LV'. Ty se protínají v bodech Q' a R' s úsečkou $E'H'$, která je vrženým stínem hrany EH hranolu do π. Znamená to, že površky KV a LV kužele vrhají stín na hranu EH hranolu do bodů Q a R. Najdeme je jako průsečíky hrany EH se světelnými paprsky $s, s' \parallel \vec{s}$ vedenými body Q' a R'.

Protože je horní podstava $EFGH$ hranolu rovnoběžná s půdorysnou π, musí být vržené stíny površky KV kužele na stěnu $EFGH$ a půdorysnu π vzájemně rovnoběžné. To znamená, že bodem Q proložíme rovnoběžku s KV', čímž získáme vržený stín površky KV na stěnu $EFGH$. To samé platí pro površku LV kužele.

Vznikne průsečík $\overline{V}$, který je vrženým stínem vrcholu V kužele na stěnu $EFGH$. Přitom bod $\overline{V}$ musí ležet na paprsku s, který jsme vedli vrcholem V. Tedy $Q\overline{V} \parallel KV'$, $R\overline{V} \parallel LV'$, $V\overline{V} \parallel \vec{s}$.

Dále vidíme, že se v bodě N' protínají úsečky KV' a AE', což znamená, že površka KV kužele vrhá stín na hranu AE hranolu do bodu N. Ten sestrojíme jako průsečík hrany AE s paprskem s, který jsme vedli bodem N'.

Nakonec vyznačíme průsečíky $I \in KV' \cap AB$ a $J \in LV' \cap AD$. Vržený stín kužele na hranol je pak omezen úsečkami IN, NQ, $Q\overline{V}$, $\overline{V}R$ a RJ.

Na závěr ještě stanovíme vržený stín hranolu do bokorysny μ. Vržený stín F''' vrcholu F do μ získáme tak, že z průsečíku $M_1 \in BF' \cap y$ vedeme rovnoběžku s osou z, která protne paprsek s procházející bodem F.

Obdobně stanovíme vržené stíny G''' a H'''. Ke konstrukci bodu H''' jsme využili průsečík $M_1' \in GH' \cap y$. Vržený stín hranolu do bokorysny μ je pak omezen úsečkami M_1F''', $F'''G'''$, $G'''H'''$ a $H'''M_1'$. □

6.11 Zářezová metoda

Tato metoda umožňuje zrychlenou konstrukci tělesa v šikmé axonometrii. Těleso je zadáno svým půdorysem a nárysem, dále jsou zadány směry souřadných os y a z pomocí vektorů $\vec{s_1}$ a $\vec{s_2}$.

Příklad 6.31. Pomocí zářezové metody zobrazte těleso, znáte-li jeho půdorys a nárys. Zadané těleso je částí hranolu.

Řešení. Při řešení úlohy zvolíme polohu půdorysny π tak, že zadáme souřadný systém $\langle O_1, x_1, y_1 \rangle$. Poté zadáním souřadného systému $\langle O_2, x_2, z_2 \rangle$ definujeme polohu nárysny ν. Přitom musíme dodržet podmínku, že zadané vektory $\vec{s_1}$ a $\vec{s_2}$ a zvolené osy x_1 a x_2 jsou všechny vzájemně různoběžné! Následně do těchto souřadných systémů zakreslíme zadaný půdorys a nárys tělesa.

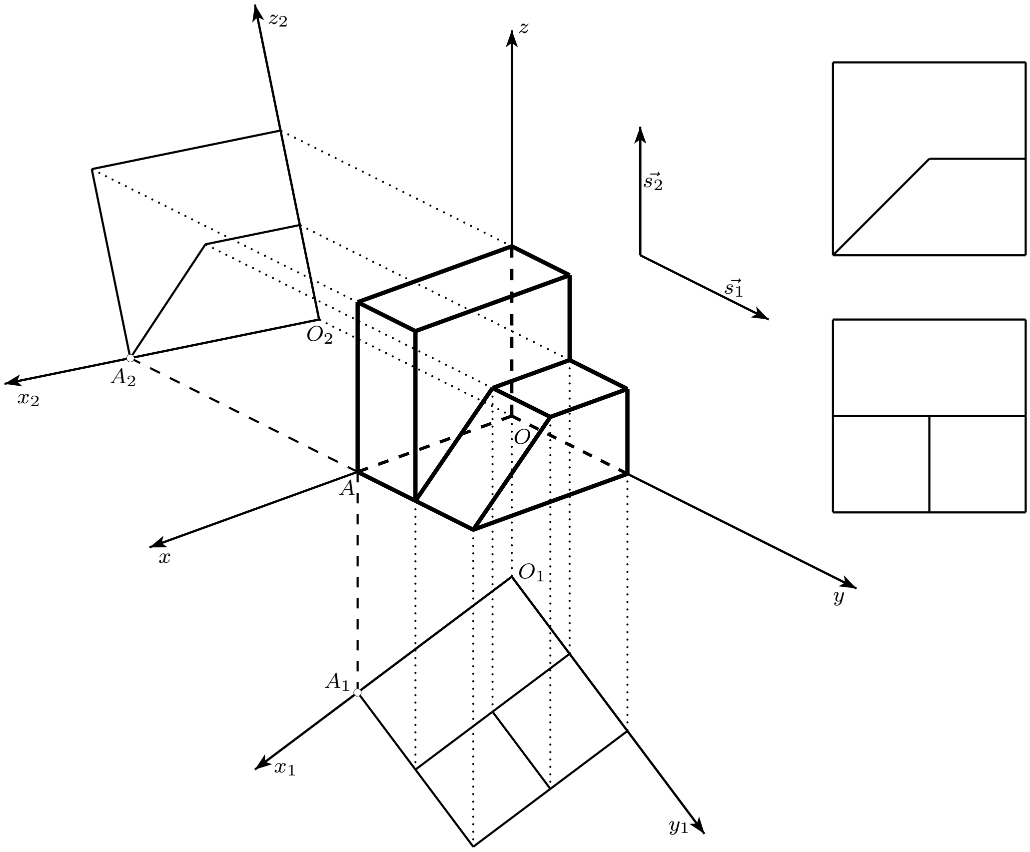
Nejprve musíme najít axonometrické osy x, y a z. Osu z určíme tak, že bodem O_1 vedeme rovnoběžku se směrem $\vec{s_2}$, podobně osu y získáme, když bodem O_2 vedeme rovnoběžku se směrem $\vec{s_1}$. Jejich průsečíkem je počátek O axonometrického souřadného systému.

Dále musíme sestrojit osu x. Proto najdeme polohu bodu A, který na ose x leží. Na ose x_1 vyznačíme jeho půdorys A_1 a na ose x_2 jeho nárys A_2. Přitom je $|O_1A_1| = |O_2A_2|$. Uvědomme si, že se jedná o sdružené průměty jediného prostorového bodu A.

Pak bodem A_1 vedeme rovnoběžku se směrem $\vec{s_2}$ a bodem A_2 rovnoběžku se směrem $\vec{s_1}$. Ty se protnou v hledaném bodě A. Osu x získáme jako spojnici OA.

Jednotlivé vrcholy tělesa sestrojujeme tak, že jejich půdorysy prokládáme rovnoběžky s osou z a jejich nárysy vedeme rovnoběžky s osou y. Získané průsečíky jsou axonometrickými průměty hledaných vrcholů. Spojením vrcholů nakreslíme viditelné a neviditelné hrany tělesa, přičemž vycházíme z představy, jak má v prostoru výsledné těleso vypadat. □

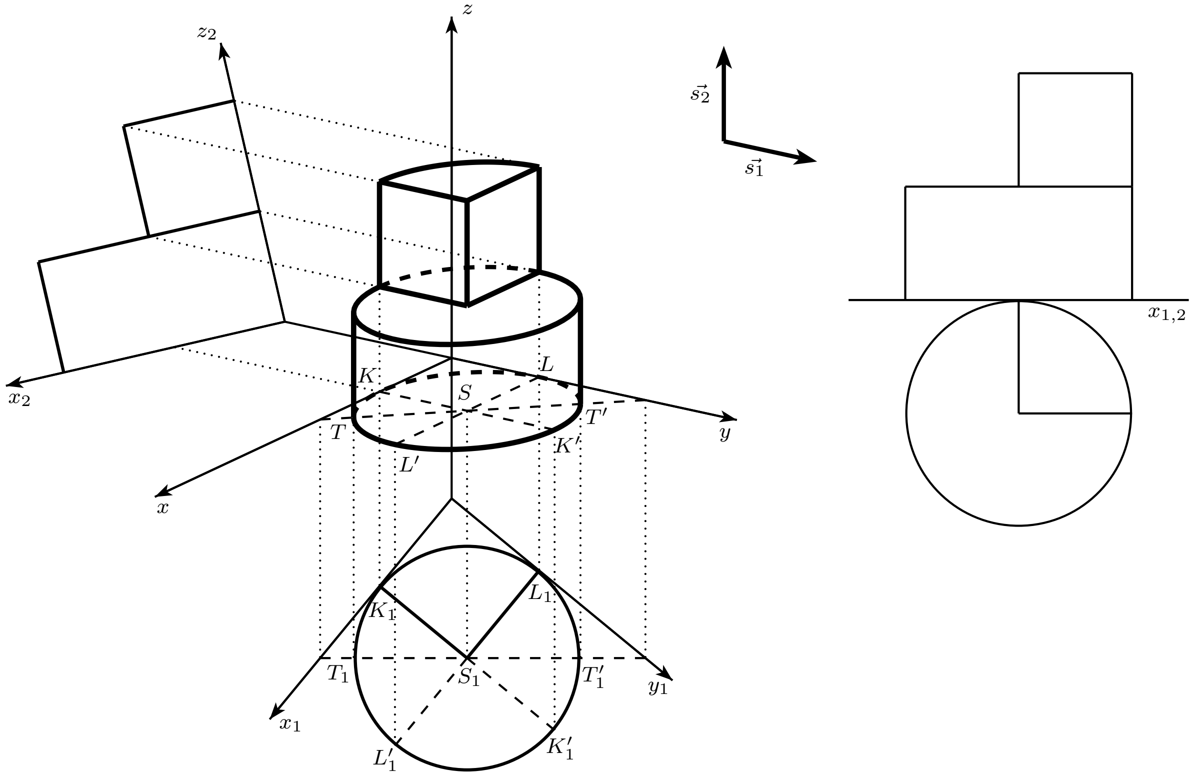
Příklad 6.32. Pomocí zářezové metody zobrazte těleso, znáte-li jeho půdorys a nárys. Zadané těleso je částí válce.



Obrázek 6.43: Zobrazení tělesa zářezovou metodou

Řešení. Postup konstrukce je stejný jako v předchozím příkladě. Nejprve sestrojíme axonometrické osy x, y a z. Podstavou tělesa v půdorysně $\pi = (x_1, y_1)$ je kružnice, která se do axonometrické průmětny zobrazí jako elipsa. Kolmé průměry K_1K_1' a L_1L_1' kružnice se zobrazí do sdružených průměrů KK' a LL' elipsy, kterou potom můžeme vyrýsovat užitím *příčkové konstrukce.*

Obrysové površky tělesa jsou rovnoběžné s osou z. Najdeme body dotyku T a T' těchto površek s podstavnou elipsou. V půdorysně (x_1, y_1) sestrojíme průměr kružnice T_1T_1' kolmý k ose z. Průsečíky s osami x_1 a y_1 přeneseme na osy x a y. Jejich spojnice vytvoří odpovídající průměr podstavné elipsy s krajními body T a T'. Přitom obecně průměr TT' není kolmý k ose z. □



Obrázek 6.44: Zobrazení tělesa zářezovou metodou

Literatura

[1] K. Borecká, L. Chvalinová, M. Lovečková, V. Šmídová, *Konstruktivní geometrie.* Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2002.

[2] J. Korch, K. Mészárosová, B. Musálková, *Deskriptiní geometrie pro 1. ročník SPŠ stavebních.* Sobotáles, Praha, 1998.

[3] K. Kůla, O. Setzer, *Deskriptivní geometrie pro 1. a 2. ročník SPŠ stavebních.* SNTL, Praha, 1979.

[4] E. Maňásková, *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* Prometheus, Praha, 2012

[5] B. Musálková, *Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠ stavebních.* Sobotáles, Praha, 2000.

[6] E. Pomykalová, *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* Prometheus, Praha, 2010.

[7] A. Urban *Deskriptivní geometrie I.* SNTL, Praha, 1965.