evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vektory a matice

Petr Hasil

Přednáška z matematiky

Mendelova univerzita v Brně

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Obsah

1. Úvod
   - Číselné obory
2. Vektory
   - Vektorový prostor
3. Matice
   - Definice a operace
   - Gaussova eliminační metoda
4. Příklady
5. Aplikace
   - Leslieho model růstu
   - Příklad
6. Wolfram|Alpha

Číselné obory

- **Přirozená čísla**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$.
- **Celá čísla**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- **Racionální čísla**: $\mathbb{Q} = \{q = \frac{z}{n} : \ z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
  Čísla, která nejsou racionální, tj. nelze je vyjádřit jako podíl celého a přirozeného čísla, nazýváme *iracionální* a značíme $\mathbb{I}$.
- **Reálná čísla**: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
  K reálným číslům lze jednoznačně přiřadit všechny body nekonečné přímky (číselné osy) dle jejich vzdálenosti od počátku.
- **Komplexní čísla**: $\mathbb{C} = \{z = a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.
  Komplexním číslem z nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel $[a, b]$ a píšeme $z = [a, b] = a + bi$. Číslu a říkáme reálná část komplexního čísla z, číslu b imaginární část komplexního čísla z.

Veličiny, kterými popisujeme svět kolem nás lze rozdělit do dvou skupin:

- **Skalární veličiny (skaláry)**
  – jsou plně určeny jediným číselným údajem udávajícím jejich velikost
  – teplota, hmotnost, množství,. . .
- **Vektorové veličiny (vektory)**
  – k jejich popisu je třeba více čísel v určeném pořadí
  – rychlost, síla (velikost a směr), poloha (souřadnice), barevný odstín (souřadnice RGB, CMYK), stav populace (počet a čas), . . .

Definice (Vektor)

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Uspořádanou n-tici reálných čísel $v_1, v_2, \dots, v_n$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

nazýváme (reálným) *vektorem*. Číslo n potom nazýváme *dimenzí* (rozměrem) vektoru $\vec{v}$ a čísla $v_1, v_2, \dots, v_n$ nazýváme *složky* vektoru $\vec{v}$.

Poznámka

Vektory se v literatuře někdy zapisují do řádku, tj. $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Je-li potom potřeba použít ho jako sloupec, používá se na něj operace transpozice (viz dále v části o maticích, kdy na vektor je nahlíženo jako na matici o jediném řádku/sloupci), podobně obráceně.

- Sčítání vektorů definujeme po složkách, tj. pro $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- Násobení vektoru $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme tak, že každou složku vektoru $\vec{v}$ vynásobíme skalárem α, tj.

$$\alpha\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Definice (Nulový vektor)

Vektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nazýváme *nulový vektor*.

Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,
- $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

Definice (Opačný vektor)

Vektor $-\vec{v} = -1\vec{v}$ nazýváme *opačný vektor* k vektoru $\vec{v}$.

Platí

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}.$$

Vlastnosti operací na vektorech

Pro všechny vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ a skaláry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$,

(ii) $\alpha\vec{v} = \vec{v}\alpha$,

(iii) $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$,

(iv) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$,

(v) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$,

(vi) $1\vec{v} = \vec{v}$.

Definice (Vektorový prostor)

Množinu všech n-rozměrných vektorů s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem nazýváme n-rozměrný *vektorový prostor*.

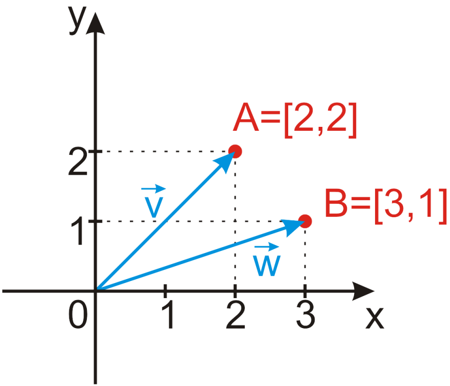
Poznámka

Vektorový prostor je uzavřen na operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem.

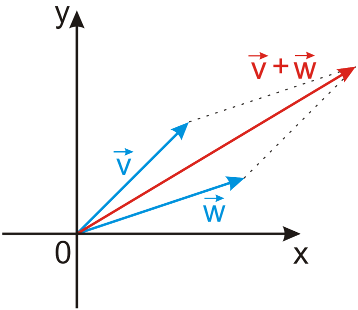
Tj. je-li V vektorový prostor, $\vec{v}, \vec{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak

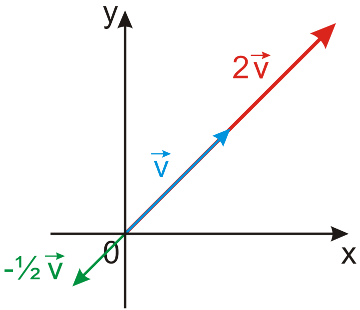
- $\vec{v} + \vec{w} \in V$,
- $a\vec{v} \in V$,
- $a\vec{v} + b\vec{w} \in V$.

Geometricky lze vektory (dimenze 2 a 3) zobrazit jako orientované průvodiče bodů (v rovině, nebo v prostoru).

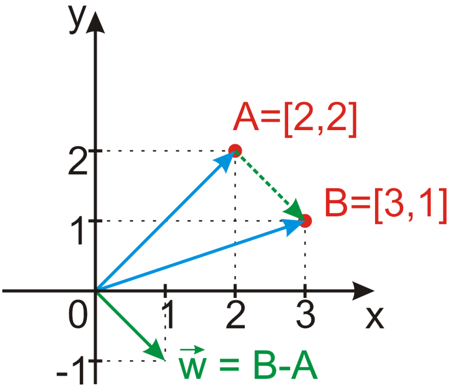


Operace:





Vektor lze zadat také pomocí jeho počátečního a koncového bodu. Vektor $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A$ je orientovaná úsečka z bodu A do bodu B.



Poznámka

Protože vektor je dán jen svou velikostí a směrem, zelené šipky jsou jen různá umístění téhož vektoru $\vec{w}$.

Definice (Lineární kombinace)

Nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i$$

nazýváme *lineární kombinace* vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$.

Příklad

Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

neboť $2\vec{u} + \vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \\ 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 \cdot 3 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{w}$.

Definice (Lineární závislost)

Řekneme, že vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže je jeden z těchto vektorů lineární kombinací ostatních. V opačném případě řekneme, že jsou *lineárně nezávislé*.

Platí

Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují taková čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, že aspoň jedno z nich je nenulové a platí

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0}.$$

Poznámka

Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou zcela jistě závislé, jestliže:

- je mezi nimi aspoň jeden nulový vektor,
- jsou mezi nimi aspoň dva vektory stejné,
- jeden z daných vektorů je násobkem jiného,
- $m > n$.

Příklad

Vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé, neboť $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, tj.

$$2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}.$$

Definice (Skalární součin)

Nechť $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Číslo

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_m w_m = \sum_{i=1}^{m} v_i w_i$$

nazýváme *skalární součin* vektorů $\vec{v}, \vec{w}$.

Příklad

$$\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = (-3) \cdot (-1) + 7 \cdot 5 + (-2) \cdot 4 = 3 + 35 - 8 = 30.$$

Definice (Matice)

(Reálnou) *maticí* typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové číselné schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde čísla $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, nazýváme prvky matice A. Množinu všech matic typu $m \times n$ značíme $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.

Poznámka

V předchozí definici m značí počet řádků a n počet sloupců matice A. Prvek a_{ij} se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A.

- Sčítání matic stejných rozměrů definujeme po složkách, tj. pro $A, B \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ máme

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & -1+7 \\ 0+4 & 1-2 \\ 5+1 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -1 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{ Nelze sečíst, matice mají různé rozměry.}$$

- Násobení matice $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme tak, že každou složku matice A vynásobíme skalárem α, tj.

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Příklad

$$7\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot(-2) & 7\cdot 7 \\ 7\cdot 4 & 7\cdot(-1) \\ 7\cdot 1 & 7\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 49 \\ 28 & -7 \\ 7 & 56 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti operací na maticích

Pro všechny matice $A, B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ a skaláry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $A + B = B + A$,

(ii) $\alpha A = A\alpha$,

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,

(iv) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

(v) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

(vi) $1A = A$.

Definice

Nechť $A = (a_{ij}) \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- Platí-li $m = n$, nazýváme matici A *čtvercová matice* řádu m (řádu n).
- Prvky a_{ii} čtvercové matice nazýváme prvky *hlavní diagonály*.
- Matice, jejíž všechny prvky jsou nulové, nazýváme *nulová matice* a značíme $\mathcal{O}$.
- Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále jedničky a všude jinde nuly, nazýváme *jednotkou maticí* a značíme I.
- Matici, jejíž každý řádek začíná větším počtem nul než řádek přecházející, nazýváme *schodovitou maticí*.
- Matici
$$A^T = (a_{ji}) \in Mat_{n \times m}(\mathbb{R})$$
nazýváme *transponovaná matice* k matici A. (Transponovaná matice vznikne záměnou řádků a sloupců původní matice.)

Příklad

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Matice A je čtvercovou maticí řádu 2, je to jednotková matice a je schodovitá.
- Matice B je schodovitá.
- Matice C je čtvercová řádu 3, není schodovitá.
- Matice D je transponovaná k matici B, tj. $D = B^T$ a $B = D^T$.

Definice (Násobení matic)

Nechť matice A je typu $m \times \boxed{\text{p}}$ a B je matice typu $\boxed{\text{p}} \times n$. *Součinem matic* A a B (v tomto pořadí) rozumíme matici C typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{ip}b_{pj} =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},$$

pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Píšeme $C = AB$

Poznámka

Při násobení matic v předchozí definici vznikl prvek c_{ij} jako skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 5 & 3\cdot 1 + 0\cdot(-4) + (-2)\cdot 9 \\ 1\cdot 2 + 4\cdot 0 + 3\cdot 5 & 1\cdot 1 + 4\cdot(-4) + 3\cdot 9 \\ 2\cdot 2 + 7\cdot 0 + 1\cdot 5 & 2\cdot 1 + 7\cdot(-4) + 1\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 17 & 12 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \times$$

Matice nelze násobit, nemají správné rozměry $[(3 \times 2)(3 \times 3)]$.

Věta

Nechť A, B, C jsou matice vhodných rozměrů. Pak platí

$$(AB)C = A(BC),$$
$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

Poznámka

Součin matic *není* komutativní, tj. obecně nelze zaměňovat pořadí násobení matic.

Věta

Nechť $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$. Potom platí $A \cdot I_n = A$, $I_m \cdot A = A$.

Definice (EŘO)

Následující úpravy matic nazýváme *ekvivalentní řádkové operace* (úpravy)

- výměna dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- přičtení jednoho řádku k jinému,
- vynechání nulového řádku.

Řekneme, že matice A a B jsou ekvivalentní a píšeme $A \sim B$, jestliže lze matici A převést konečným počtem ekvivalentních úprav na matici B.

Věta

Každou matici lze konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav převést do schodovitého tvaru.

Pomocí *Gaussovy eliminační metody* (GEM) lze převést libovolnou matici do schodovitého tvaru.

Postup

(i) V matici najdeme sloupec nejvíce vlevo s alespoň jedním nenulovým prvkem.

(ii) Zvolíme v tomto sloupci jeden z nenulových prvků (tzv. pivota) a přemístíme řádek, ve kterém se nachází, na pozici prvního řádku (pomocí výměny řádků).

(iii) Pomocí EŘO vynulujeme prvky pod pivotem. Vznikne-li nulový řádek, vynecháme ho.

(iv) Kroky (i)–(iii) opakujeme na podmatici vzniklé z původní matice vynecháním řádku s pivotem.

(v) Postup opakujeme, dokud není matice ve schodovitém tvaru

Poznámka

Kdykoliv během postupu můžeme některý řádek vynásobit, nebo vydělit vhodným číslem tak, abychom matici zjednodušili.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ \boxed{1} & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad I \leftrightarrow II \quad \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad III - 2 \cdot I$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad III - 5 \cdot II \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}$$

Definice (Hodnost matice)

Nechť $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$. *Hodností* $h(A)$ matice A rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků (= počet lineárně nezávislých sloupců).

Věta

- *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*
- *Matice transponovaná má stejnou hodnost jako matice původní.*
- *Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.*

Příklad

V předchozím příkladu jsme zjistili, že

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix},$$

tedy $h(A) = 3$.

Poznámka

Tímto způsobem lze také snadno zjistit, zda jsou dané vektory lineárně závislé, popř. z nich dokonce vybrat maximální počet lineárně nezávislých vektorů.

Vektory naskládáme jako sloupce do matice, tu převedeme do schodovitého tvaru. Lineárně nezávislé vektory jsou ty, které se nacházely ve sloupcích s pivoty.

Definice

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n taková, že platí

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A,$$

nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí* k matici A.

Věta

Nechť je A čtvercová matice řádu n. Potom k ní existuje inverzní matice A^{-1} právě tehdy, když má matice A lineárně nezávislé řádky (říkáme, že je regulární).

Z předchozí věty plyne, že inverzní matici lze najít jen ke čtvercové matici, která má plnou hodnost. To znamená, že ve schodovitém tvaru jsou všichni pivoti na její hlavní diagonále a v průběhu GEM se neobjevil žádný nulový řádek.

Jádrem algoritmu pro výpočet inverzní matice je tzv. *úplná Gaussova eliminace*, která spočívá v tom, že po získání schodovitého tvaru pokračujeme stejným způsobem v nulování prvků nad pivoty (se kterými se už nehýbe), a to zprava doleva.

Postup

1. K matici A přidáme jednotkovou matici stejné velikosti. Tím získáme rozšířenou matici $(A|I)$.
2. Pomocí úplné Gaussovy eliminace převedeme matici A na diagonální matici (tj. matici, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále). Všechny EŘO přitom provádíme s *celými* řádky matice $(A|I)$.
3. Každý řádek matice $(A|I)$ vydělíme diagonálním prvkem matice A, který se v něm nachází.
4. Tím jsme matici A převedli na matici I a matici I na matici A^{-1}. Výsledná rozšířená matice je tedy $(I|A^{-1})$.

Poznámka

Opět jako u „neúplné“ Gaussovy eliminační metody můžeme kdykoliv to jde matici zjednodušit vhodnou úpravou (zvláště vydělení řádku společným dělitelem všech jeho prvků).

Příklad

Najděte inverzní matice k maticím A, B a C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice A není čtvercová, tedy k ní neexistuje inverzní matice.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I \\ III - 2 \cdot I \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + II \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{5} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 2 \cdot III \\ II - 6 \cdot III \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7/5 & -2/5 & -2/5 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 11/5 & -1/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - II \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 0 & 3 & 0 & 11/5 & -1/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/15 & -1/15 & -6/15 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) = (I|B^{-1})$$

Tedy

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 11/15 & -1/15 & -6/15 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -3 & 12 \\ 11 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III - I \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-5}} & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Matice C není regulární ($h(C) = 2$), tedy k ní neexistuje inverzní matice.

Příklad

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte $3A - 2B, AB^T, A^T B$.

Řešení:

$$3A-2B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -9 & 7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}, \quad AB^T = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ -6 & 0 & 7 \\ -10 & 17 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Jsou dány vektory

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte $\langle u, v \rangle, uv^T, u^T v$.

Řešení:

$$\langle u, v \rangle = -2, \quad uv^T = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad u^T v = (-2).$$

Příklad

Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$h(A) = 2.$$

Příklad

Napište příklady matic o hodnosti $1, 2, 3$ a 4 a hodnost zdůvodněte.

Řešení:

$$h\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 1, \qquad h\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2,$$

$$h\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = 3, \qquad h\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 4.$$

Matice jsou ve schodovitém tvaru v němž hodnost = počet nenulových řádků.

Příklad

Jsou dány vektory

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vyberte z nich co nejvíce lineárně nezávislých vektorů.

Řešení:

$$\text{Např. } u_1, u_2, u_4.$$

Příklad

Najděte inverzní matici k maticím

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}3 & 12 & -7\\ 5 & 9 & -8\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}, \quad B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 1\\ 2 & -3 & -2 & -1\\ 2 & -13 & 0 & -3\\ 2 & -5 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Pomocí Leslieho modelu je možné odhadnout vývoj populace. Popíšeme si pouze její vytvoření a použití.

Zkoumáme nějaký systém jednotlivců (zvířata, hmyz, buněčné kultury,...) rozdělený do n skupin (stáří, fáze vývoje,...). Stav v čase k je tedy dán vektorem

$$x_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

kde $a_i, i = 1, \dots, n$, je počet jedinců skupiny i v čase k.

(Lineární) model vývoje takového systému je dán maticí $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, která popisuje změnu z x_k na x_{k+1} (jde o iterovaný proces):

$$x_{k+1} = Ax_k.$$

Leslieho matice má tvar

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ \tau_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tau_{n-1} \end{pmatrix},$$

kde f_i je relativní plodnost a τ_i relativní přežití skupiny i.

Příklad

Uvažujme populaci nezmarů, kteří se dožívají tří měsíců. Každý nezmar splodí mezi prvním a druhým měsícem dva malé nezmárky, stejně tak mezi druhým a třetím měsícem života. Mladí nezmaři (do stáří jednoho měsíce) neplodí. Polovina nezmarů po dovršení druhého měsíce umírá, po dovršení třetího měsíce umírají všichni. Napište Leslieho matici nezmařího modelu a určete složení populace, o složení $(17, 102, 191)$ po třech měsících.

Řešení: Leslieho matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daná populace bude mít po třech měsících složení

$$A^3 \cdot (\text{počáteční složení}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 102 \\ 191 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1189 \\ 136 \\ 293 \end{pmatrix}.$$

Poznámka

Z modelu daného Leslieho maticí lze snadno určit i přírůstek za období a také k jakému složení (vzhledem k "věkovým" skupinám) populace spěje. K obojímu se vrátíme po probrání náležitých matematických nástrojů.

Populace z nezmařího příkladu má přírůstek cca 62% a ustálí se na složení cca $52 : 32 : 10$. Tedy nejmladších bude (cca) $55,32\%$, středního věku $34,04\%$ a seniorů $10,64\%$.
(Jak se přepočítal poměr na procenta?)

- Součet vektorů. ⊛

  `(1,3,2) + (-2,4,5)`

- Násobení vektoru konstantou. ⊛

  `-2 (-1,0,2)`

- Lineární kombinace vektorů. ⊛

  `4 (-1,0,2) -3 (5,4,-6)`

- Skalární součin. ⊛

  `(-1,0,2).(5,4,-6)`

- Lineární (ne)závislost. ⊛

  `linear independence (-1,0,2),(5,4,-6),(1,2,3),(0,2,5)`

- Součet matic. ⊛

```
{(-1,0,2),(5,4,-6),(1,2,3)} + {(2,1,0),(6,-3,4),(2,2,5)}
```

- Násobení matice konstantou. ⊛

```
3 {(5,-3,0),(2,1,-3),(4,0,3)}
```

- Lineární kombinace matic. ⊛

```
-2 {(3,3,2),(-2,1,6),(1,5,3)} +5 {(2,2,-2),(3,-6,1),(0,2,7)}
```

- Součin matic. ⊛

```
{(-1,1,0,2),(5,4,-4,-6),(3,5,2,-3)}.{(0,1),(3,-3),(2,-1),(5,0)}
```

- Hodnost matice. ⊛

```
rank{(5,-4,8),(3,-3,4),(3,-3,4),(2,-1,4)}
```

- Transponovaná matice. ⊛

```
transpose{(4,2,-1),(3,9,5),(2,-1,1),(1,6,-2)}
```

- Inverzní matice. ⊛

```
inverse{(2,-1,3),(0,-3,2),(2,-1,5)}
```