



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklady

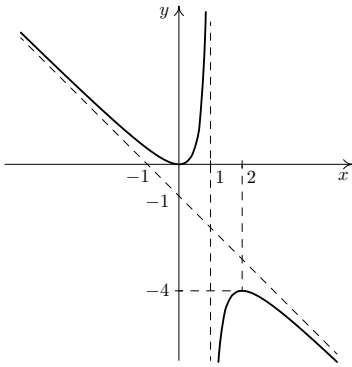
ZÁKLADY VYŠŠÍ MATEMATIKY

LDF MENDELU

Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

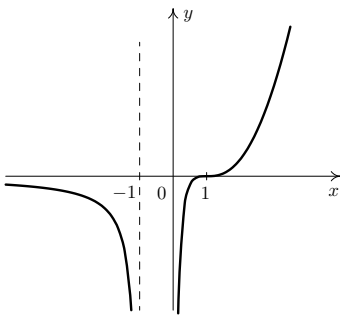
1 Vlastnosti funkcí

1. Nechť $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



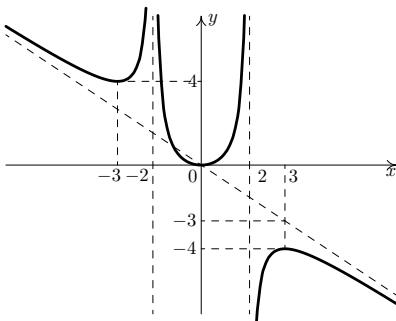
- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- Určete intervaly, na kterých je funkce konvexní.
- Určete stacionární body funkce.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

2. Nechť $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



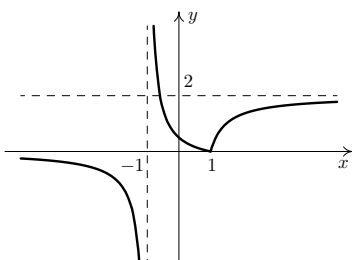
- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Určete intervaly, na kterých je funkce konvexní.
- Určete zda je funkce prostá.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

3. Nechť $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



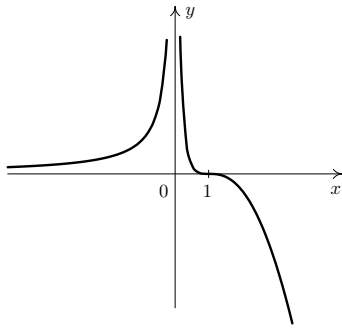
- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
- Určete intervaly, na kterých je funkce konvexní.
- Určete lokální extrém.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

4. Nechť $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



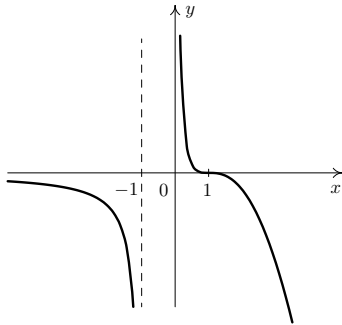
- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Určete intervaly, na kterých je funkce konkávní.
- Určete intervaly, kde má funkce zápornou derivaci.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

5. Necht' $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



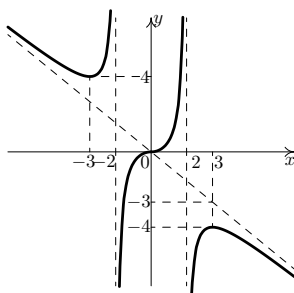
- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- Určete intervaly, na kterých je funkce konkávní.
- Určete body nespojitosti.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

6. Necht' $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



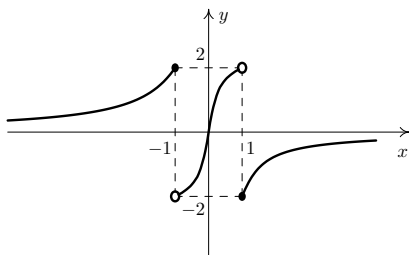
- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- Určete intervaly, na kterých je funkce konkávní.
- Určete lokální extrémny.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

7. Necht' $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



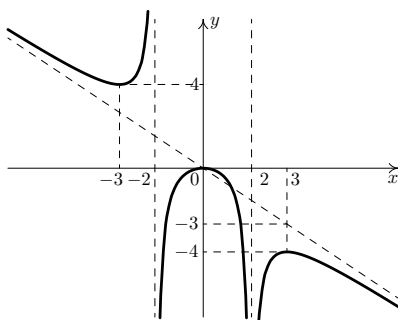
- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
- Určete lokální extrémny.
- Určete inflexní body.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

8. Necht' $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



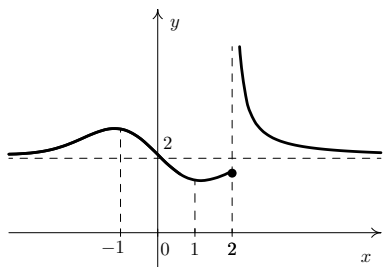
- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- Určete lokální extrémny.
- Určete body nespojitosti.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

9. Necht' $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



- Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- Určete $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- Určete lokální extrémny.
- Určete intervaly, na kterých je funkce konvexní.
- Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

10. Necht' $y = f(x)$ je funkce zadaná grafem:



- (a) Určete definiční obor a obor hodnot funkce.
- (b) Určete $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (c) Určete lokální extrémy.
- (d) Určete zda je funkce prostá.
- (e) Určete všechny asymptoty – napište jejich rovnice.

2 Definiční obory

Určete definiční obor funkce:

1. $y = \ln(x^2 - 2x - 3)$

2. $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$

3. $y = \sqrt{x^3 - x}$

4. $y = \ln(5x - x^2) + \sqrt{x - 2}$

5. $y = \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)$

6. $y = \sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$

7. $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x-5} + \ln(7-x)$

3 Limity

3.1 Bez znalosti derivací

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$

7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$

8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\ln x}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+3}$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{(x-3)^2}$

13. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-3}$

14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{(x-2)^3}$

15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x^2}{(x-1)^4}$

16. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-x}{(x-5)^3}$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-5x+3}{x^2+2}$

18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5-7}{x^4+3}$

19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x+1}{x^4+x^3+5}$

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-x^2+7}{x^4+5}$

3.2 L'Hospitalovo pravidlo

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+x-6}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5-3x^2}{x+6}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-7x}{x^2+3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 2 \sin x - 1}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$

4 Derivace

Zderivujte funkci:

1. $y = \sqrt{x} + \ln \sin \operatorname{tg} x$

2. $y = \frac{1}{x^3} + \ln \cos \frac{x}{2}$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \operatorname{arctg} e^{3x}$

4. $y = x^3 \ln x + \sin x^2$

5. $y = \frac{\ln x}{x^2} + (\sin 3x + 4)^5$

6. $y = e^x(x^2 + 3) + \sin(\ln x^2)$

7. $y = x^2 e^x + \ln(\cos 3x)$

8. $y = \frac{\sin x}{x^2} + e^{\sin 2x}$

9. $y = e^x(x^2 + 3x) + \cos(\ln x^2)$

10. $y = x^3 \cos x + \ln(\sin x^3)$

11. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1} + \sin(e^{x^3})$

12. $y = x^2 \ln x + \sin^2(e^{2x})$

13. $y = \frac{\sin x}{x} + \ln(\cos^3 x)$

14. $y = \frac{x^3}{x + 2} + \cos(e^{x^2})$

15. $y = \sqrt{x} \ln x + e^{\sin x^3}$

16. $y = \frac{e^x}{x^3} + (x^2 + \ln 3x)^4$

17. $y = e^{2x}(x^2 + 1) + \ln^2 x$

18. $y = \sqrt{\frac{x}{x + 2}}$

19. $y = \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)$

5 Průběh funkce

5.1 Polynom

Vyšetřete průběh následujících polynomů. U všech příkladů:

- Určete definiční obor, průsečíky se souřadnými osami a znaménko funkce.
- Určete intervaly, kde funkce klesá, kde roste a lokální extrém.
- Určete intervaly, kde je funkce konvexní, kde je konkávní a inflexní body.
- Nakreslete graf.

1. $y = 6x^3 - 3x^6$.

4. $y = x^4 + 2x^3$.

7. $y = x^3 - 4x^2 + 4x$.

2. $y = x^5 - 5x^4$.

5. $y = 4x^3 - x^4$.

8. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

3. $y = 3x - x^3$.

6. $y = x^3 - 2x^2 + x$.

9. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

5.2 Racionální lomená funkce

Vyšetřete průběh následujících funkcí. U všech příkladů:

- Určete definiční obor, průsečíky se souřadnými osami a znaménko funkce.
- Určete intervaly, kde funkce klesá, kde roste a lokální extrém.
- Určete intervaly, kde je funkce konvexní, kde je konkávní a inflexní body.
- Určete asymptoty bez směrnice i se směrnicí.
- Nakreslete graf.

1. $y = \frac{x^2}{x-2}$

Nápověda: $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$, $y'' = \frac{8}{(x-2)^3}$.

4. $y = \frac{x}{(x+3)^2}$

Nápověda: $y' = \frac{3-x}{(x+3)^3}$, $y'' = \frac{2x-12}{(x+3)^4}$.

2. $y = \frac{x^2}{x+1}$

Nápověda: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, $y'' = \frac{2}{(x+1)^3}$.

5. $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$.

Nápověda: $y' = \frac{2x}{(x+1)^3}$, $y'' = \frac{2-4x}{(x+1)^4}$.

3. $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

Nápověda: $y' = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$, $y'' = \frac{2x+8}{(x-2)^4}$.

6. $y = \frac{x}{x^2+1}$.

Nápověda: $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y'' = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$.

$$7. y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Nápověda: } y' = \frac{-x-1}{(x-1)^3}, y'' = \frac{2x+4}{(x-1)^4}.$$

$$8. y = \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Nápověda: } y' = \frac{3-x}{(x-1)^3}, y'' = \frac{2x-8}{(x-1)^4}.$$

$$9. y = x + \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Nápověda: } y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, y'' = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

$$10. y = \frac{x^2-1}{x^3}.$$

$$\text{Nápověda: } y' = \frac{3-x^2}{x^4}, y'' = \frac{2x^2-12}{x^5}.$$

6 Integrály

6.1 Základní typy

1. $\int x^2(x+3) dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

8. $\int \sqrt[3]{x} dx$

2. $\int \sqrt{x} dx$

6. $\int \frac{1}{x^4} dx$

9. $\int \frac{x+1}{x^3} dx$

3. $\int x^2\sqrt{x} dx$

7. $\int \frac{2}{x^3} dx$

10. $\int \frac{x^2+x+3}{x^2} dx$

4. $\int \frac{1}{x^2} dx$

6.2 Jednoduché substituce řešitelné “z hlavy”

1. $\int e^{-3x} dx$

6. $\int \cos \frac{x}{2} dx$

11. $\int \frac{x}{x^2+2} dx$

2. $\int \cos 3x dx$

7. $\int \sin \frac{x}{3} dx$

12. $\int \operatorname{tg} x dx$

3. $\int e^{-x} dx$

8. $\int (3x-5)^5 dx$

13. $\int \operatorname{cotg} x dx$

4. $\int \sin 5x dx$

9. $\int \frac{1}{2x-3} dx$

14. $\int \frac{3x}{x^2+5} dx$

5. $\int e^{4x} dx$

10. $\int \frac{1}{(2x+5)^3} dx$

6.3 Substituce

1. $\int x \sin x^2 dx$

6. $\int \sin^3 x \cos x dx$

11. $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x + 7} \sin x dx$

2. $\int x \sin(x^2+3) dx$

7. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

12. $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$

3. $\int xe^{x^2} dx$

8. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$

13. $\int \frac{3}{x\sqrt{x-1}} dx$

4. $\int x \cos x^2 dx$

9. $\int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 5} \cos x dx$

14. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

5. $\int x^2 e^{x^3+2} dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx$

6.4 Per partes

1. $\int x \cos x \, dx$

5. $\int x \ln x \, dx$

9. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

2. $\int x^2 e^x \, dx$

6. $\int x^2 \sin x \, dx$

10. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$

3. $\int \ln x \, dx$

7. $\int x^2 \ln x \, dx$

11. $\int x e^{-x} \, dx$

4. $\int x e^x \, dx$

8. $\int x \cos 3x \, dx$

12. $\int x \sin 2x \, dx$

6.5 Určitý integrál

1. $\int_0^1 (x^2 + x + 2) \, dx$

4. $\int_1^2 (x^3 - 2x + 1) \, dx$

7. $\int_0^\pi x \cos x \, dx$

2. $\int_0^2 (x^2 + 1) \, dx$

5. $\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 1) \, dx$

8. $\int_0^1 x e^{x^2+1} \, dx$

3. $\int_1^2 (2x + 1) \, dx$

6. $\int_1^2 \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2} \, dx$

9. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$

7 Vektory, matice, determinanty

7.1 Operace s maticemi

1. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vypočtete $(A - 2I)^T \cdot B$, kde I je jednotková matice.

2. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočtete $(A^T + I) \cdot B$, kde I je jednotková matice.

3. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Vypočtete $(A - B)^2$, kde I je jednotková matice.

4. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtete A^2 .

5. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtete $(A^T - I)A$, kde I je jednotková matice.

7.2 Determinanty, inverzní matice, lineární ne/závislost vektorů

1. Je zadaná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Vypočtete determinant z matice A .

(b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:

(i) Jsou řádky matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?

(ii) Je hodnota matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?

(iii) Existuje inverzní matice A^{-1} ? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

2. Je zadaná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Vypočtete determinant z matice A .
- (b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
- (i) Jsou řádky matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
 - (ii) Je hodnota matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
 - (iii) Existuje inverzní matice A^{-1} ? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

3. Je zadaná matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Vypočtete determinant z matice A .
- (b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
- (i) Jsou sloupce matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
 - (ii) Je hodnota matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
 - (iii) Existuje inverzní matice A^{-1} ? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

4. Je zadaná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Vypočtete determinant z matice A .
- (b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
- (i) Jsou řádky matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
 - (ii) Je hodnota matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
 - (iii) Existuje inverzní matice A^{-1} ? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

5. Je zadaná matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Vypočtete determinant $\det A$.
- (b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
- (i) Jsou sloupce matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
 - (ii) Je hodnota matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
 - (iii) Existuje inverzní matice A^{-1} ? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

6. Vypočtete determinanty

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

7. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo nezávislé.

(a) $\vec{a} = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 2, -1, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 2, 1)$, $\vec{d} = (1, 1, 0, 1)$

(b) $\vec{a} = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, -1, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{d} = (2, 1, 1, 2)$

(c) $\vec{a} = (1, 3, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 2, 1)$, $\vec{d} = (1, 1, 1, 2)$

8 Soustavy lineárních rovnic

Gaussovou eliminační metodou najděte řešení následujících soustav rovnic. U všech příkladů:

- (a) Určete hodnotu matice soustavy a rozšířené matice soustavy a rozhodněte o existenci a počtu řešení (zdůvodněte!)
(b) Pokud má soustava má řešení, najděte je.

1.

$$\begin{aligned}8x_1 + 6x_2 - x_3 + 3x_4 &= -9 \\2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= -13 \\x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 11x_4 &= -28 \\2x_2 - 3x_3 + 17x_4 &= -43.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -3.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_4 &= -2 \\2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 &= 3 \\x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -4 \\-3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 4 \\-7x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 8x_4 &= 4.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -8 \\3x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 2.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 9 \\2x_1 - x_2 + 4x_3 + 9x_4 &= 3.\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -4 \\x_2 + x_3 - 3x_4 &= -3 \\-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\5x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 4.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -2 \\x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\3x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= -2.\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\4x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6 \\3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= -6.\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\2x_1 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1.\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3 \\x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1.\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 5x_4 &= 1 \\x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 1 \\x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0.\end{aligned}$$

Následující soustavy řešte

(a) Cramerovým pravidlem

(b) Pomocí inverzní matice k matici soustavy

1.

$$2x + 3y = 1$$

$$4x + 7y = 3$$

2.

$$1x + 2y = 3$$

$$3x + 5y = 2$$