

Funkce – základní pojmy a vlastnosti

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Množina reálných čísel a její podmnožiny

- Reálná čísla se zobrazují jako body na číselné ose. Každému bodu číselné osy odpovídá právě jedno reálné číslo. Množinu reálných čísel značíme \mathbb{R} .

- Další číselné množiny:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – množina přirozených čísel

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – množina celých čísel

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ – množina racionálních čísel

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – množina iracionálních čísel

$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ – množina komplexních čísel

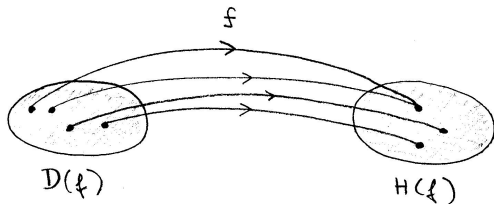
- Množiny \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} jsou podmnožiny množiny \mathbb{R} .
- Symbolem \mathbb{R}^2 budeme značit množinu všech uspořádaných dvojic (x, y) , kde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$... rovina

Pojem funkce

Definice (Funkce)

Nechť M je neprázdná podmnožina množiny reálných čísel, tj. $M \subseteq \mathbb{R}$. Pravidlo f , které každému prvku $x \in M$ přiřazuje **právě jeden** prvek $y \in \mathbb{R}$, se nazývá **reálná funkce jedné reálné proměnné**. Píšeme $y = f(x)$ nebo $f : x \rightarrow y$.

- Množina M se nazývá **definiční obor** funkce f a značí se $D(f)$.
- Množina všech $y \in \mathbb{R}$, pro něž existuje $x \in M$ takové, že $y = f(x)$, se nazývá **obor hodnot** funkce f a značí se $H(f)$.



- Funkce je zadaná definičním oborem $D(f)$ a pravidlem (funkčním předpisem), pomocí něhož je každému $x \in D(f)$ přiřazen právě jeden prvek $y \in H(f)$.

Například:

- $y = x^2, x \geq 0$
 - $y = x^2, x \leq 0$
 - $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
-
- Pokud není v zadání funkce definiční obor uveden, pak jím rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný předpis “smysl”.

Například definiční obor funkce $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ určíme následovně:

$$x + 1 \geq 0 \implies x \geq -1 \quad \text{a zároveň} \quad x \neq 0,$$

tedy

$$D(f) = \langle -1, 0 \rangle \cup (0, \infty).$$

- **Explicitně zadaná funkce:** “ $y =$ vzorec s proměnnou x ”,
například $y = \sin x$, $y = \ln x$, $y = 3^x$, $y = x^4 + 2x$, $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

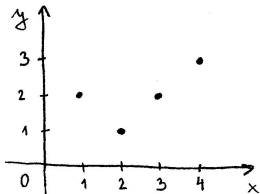
V zápisu $y = f(x)$ nazýváme

- $f \dots$ funkční předpis (např. \sin , \ln , \dots)
 - $x \dots$ argument (nezávislá proměnná)
 - $y \dots$ funkční hodnota (závislá proměnná)
-
- **Implicitně zadaná funkce:** “vzorec s proměnnými $x, y = 0$ ”,
například $\sin(x + 2y) + y = 0$.

Budeme se zabývat pouze funkcemi zadanými explicitně.

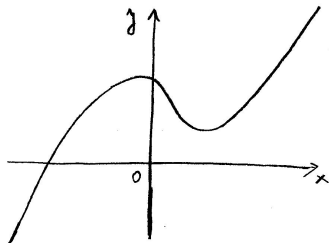
Definice (Graf funkce)

Grafem funkce f rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, kde $x \in D(f)$.



$$D(f) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$H(f) = \{1, 2, 3\}$$



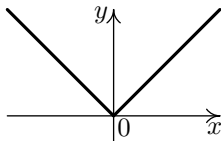
$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \mathbb{R}$$

Příklad (Absolutní hodnota a signatura)

- Absolutní hodnota

$$f(x) := |x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ -x & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

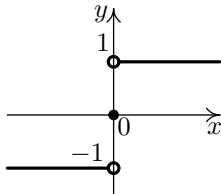
$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = [0, \infty)$$



- Signatura

$$f(x) := \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

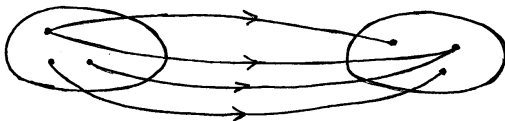
$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \{-1, 0, 1\}$$



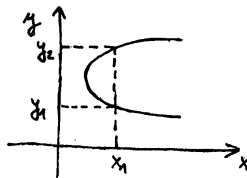
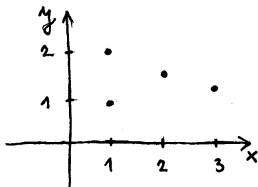
- Platí: $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$ a také $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$.

Není funkce, není graf

- Zobrazení, které není funkce – jednomu bodu nemohou být přiřazeny dvě různé hodnoty:



- Body v rovině nebo křivka, které nejsou grafem funkce:



- ohraničenost
- parita (sudost, lichost)
- periodičnost
- monotonie
- prostost

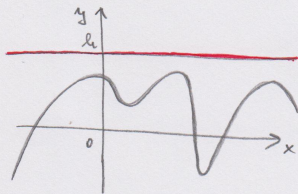
Definice (Ohraničenost)

Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ je neprázdná množina. Řekneme, že funkce f je na množině M

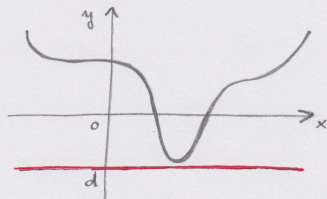
- **zdola ohraničená**, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \geq d$ pro každé $x \in M$.
- **shora ohraničená**, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \leq h$ pro každé $x \in M$.
- **ohraničená**, jestliže je na množině M ohraničená zdola i shora.

- Je-li funkce ohraničená zdola, pak existuje vodorovná přímka (při označení z definice $y = d$) taková, že graf funkce leží nad touto přímkou.
- Je-li funkce ohraničená shora, pak existuje vodorovná přímka (při označení z definice $y = h$) taková, že graf funkce leží pod touto přímkou.
- Je-li funkce ohraničená, leží celý graf mezi dvěma vodorovnými přímkami.

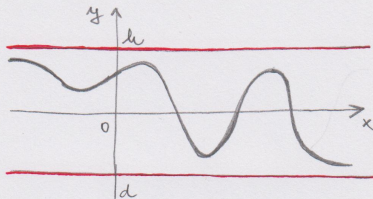
Funkce ohraničená shora



Funkce ohraničená zdola



Ohraničená funkce



Definice (Parita)

Funkce f se nazývá

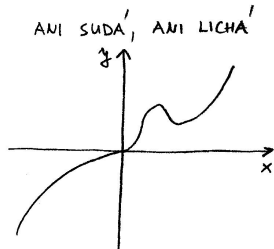
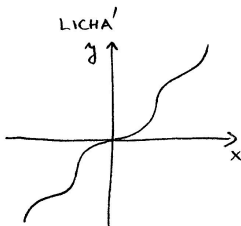
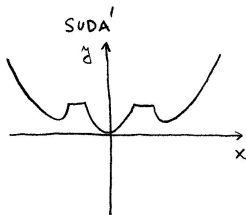
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

$$-x \in D(f) \quad \text{a} \quad f(-x) = f(x).$$

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

$$-x \in D(f) \quad \text{a} \quad f(-x) = -f(x).$$

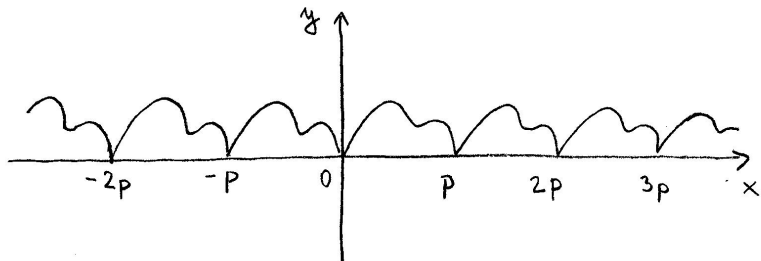
- Graf sudé funkce je souměrný podle osy y .
- Graf liché funkce je souměrný podle počátku.



Definice (Periodičnost)

Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Funkce f se nazývá **periodická** s periodou p , jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí

$$x \pm p \in D(f) \quad \text{a} \quad f(x + p) = f(x) = f(x - p).$$



Definice (Monotonie)

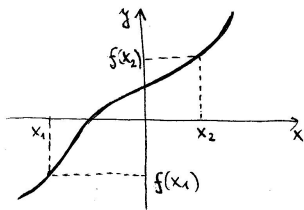
Nechť f je funkce a $M \in D(f)$ neprázdná množina. Řekneme, že funkce f je na množině M

- **rostoucí**, jestliže pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$.
- **klesající**, jestliže pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ je $f(x_1) > f(x_2)$.
- **neklesající**, jestliže pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ je $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **nerostoucí**, jestliže pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ je $f(x_1) \geq f(x_2)$.

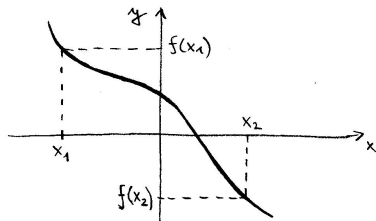
Funkce f se nazývá **monotonní** na množině M , jestliže je neklesající nebo nerostoucí.

Funkce f se nazývá **ryze monotonní** na množině M , jestliže je rostoucí nebo klesající.

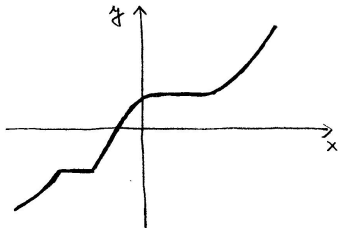
ROSTOUcí



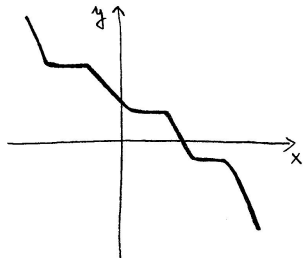
KLESAJící



NEKLESAJící



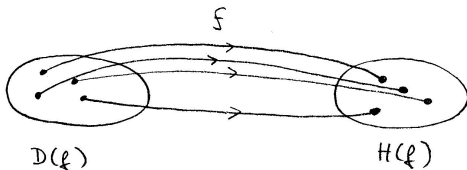
NEROSTOUcí



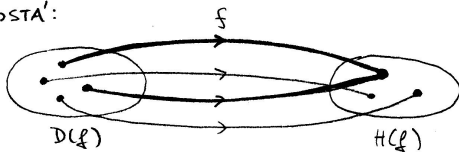
Definice (Prostá funkce)

Nechť f je funkce a $M \in D(f)$ neprázdná množina. Řekneme, že funkce f je na množině M **prostá**, jestliže pro každá dvě $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

PROSTÁ:



NEJÍ PROSTÁ:

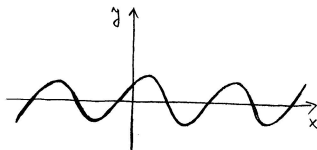
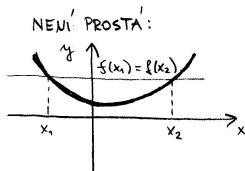
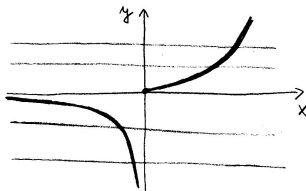
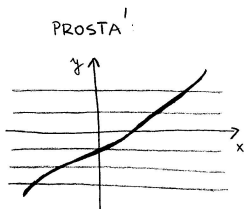


Dva různé body z $D(f)$ se zobrazí do jednoho bodu z $H(f)$.

Věta

Je-li funkce ryze monotonní na množině M , pak je na této množině prostá.

Je-li funkce prostá, pak každá vodorovná přímka protíná její graf v nejvýše jednom bodě.



Operace s funkcemi

Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí f a g definujeme následovně:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{pro } x \in D(f) \cap D(g)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{pro } x \in D(f) \cap D(g)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{pro } x \in D(f) \cap D(g)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } x \in D(f) \cap D(g) \setminus \{z \in \mathbb{R} : g(z) = 0\}$$

Příklad

$$f : y = x^3, \quad g : y = x, \quad D(f) = D(g) = \mathbb{R}$$

$$\bullet f + g : y = x^3 + x, \quad D(f + g) = \mathbb{R}$$

$$\bullet f - g : y = x^3 - x, \quad D(f - g) = \mathbb{R}$$

$$\bullet f \cdot g : y = x^4, \quad D(f \cdot g) = \mathbb{R}$$

$$\bullet \frac{f}{g} : y = x^2, \quad D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Skládání funkcí

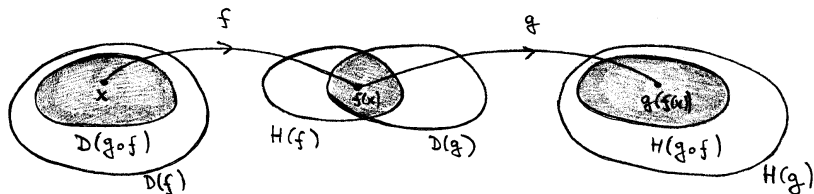
Dosažením libovolné funkce za argument jiné funkce vzniká funkce složená.

Definice (Složená funkce)

Nechť f, g jsou dvě funkce. **Složenou funkcí** $g \circ f$ rozumíme funkci definovanou předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{kde } x \in D(f) \text{ a } f(x) \in D(g).$$

Funkce f se nazývá **vnitřní složka** a g **vnější složka** složené funkce $g \circ f$. Zápis $g \circ f$ čteme "g po f".



Příklad

$$f : y = x^2, \quad g : y = \sin x$$

- $g \circ f : y = g(f(x)) = \sin x^2$
- $f \circ g : y = f(g(x)) = \sin^2 x$

Složená funkce může mít více složek, např.

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))).$$

Příklad

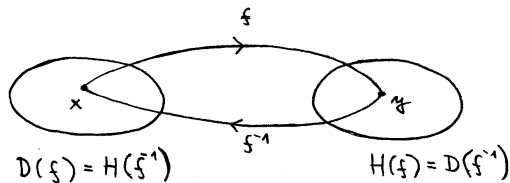
$$f : y = x^2, \quad g : y = \sin x, \quad h : y = \ln x$$

- $h \circ g \circ f : y = h(g(f(x))) = \ln \sin x^2$
- $f \circ g \circ h : y = f(g(h(x))) = \sin^2 \ln x$
- $f \circ h \circ g : y = f(h(g(x))) = \ln^2 \sin x$
- $g \circ f \circ h : y = g(f(h(x))) = \sin \ln^2 x$

Inverzní funkce

Definice (Inverzní funkce)

Nechť f je prostá funkce. Funkce f^{-1} , která každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to $x \in D(f)$, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkce** k funkci f .



- f je inverzní funkce k funkci f^{-1} .
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle přímky $y = x$.
- $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(f^{-1})$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ pro každé $x \in D(f)$
 $f(f^{-1}(y)) = y$ pro každé $y \in H(f)$
- Funkce f je rostoucí (klesající), pak f^{-1} je také rostoucí (klesající).

Inverzní funkci k funkci f určíme tak, že v zadání funkce $y = f(x)$ zaměníme proměnné x a y . Dostaneme tedy rovnici $x = f(y)$. Z této rovnice vyjádříme proměnnou y (pokud to lze). Je-li funkce f prostá, je toto vyjádření jednoznačné.

Příklad

Inverzní funkce k funkci $y = 3x - 1$ je funkce $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

$$f: y = 3x - 1$$

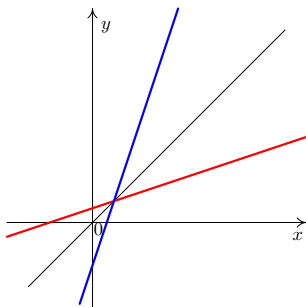
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$H(f) = \mathbb{R}$$

$$f^{-1}: x = 3y - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

$$H(f^{-1}) = \mathbb{R}$$



Některé vzájemně inverzní funkce:

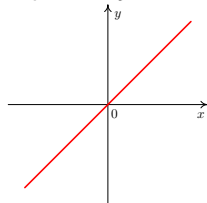
$y = \sqrt{x}$	$y = x^2, x \geq 0$
$y = \sqrt[3]{x}$	$y = x^3$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = a^x, a \neq 1, a > 0$	$y = \log_a x$
$y = \sin x, x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x, x \in \langle 0, \pi \rangle$	$y = \arccos x$
$y = \operatorname{tg} x, x \in (-\pi/2, \pi/2)$	$y = \operatorname{arctg} x$
$y = \operatorname{cotg} x, x \in (0, \pi)$	$y = \operatorname{arccotg} x$

Základní elementární funkce

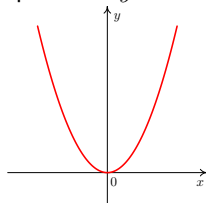
- Mocninné funkce
- Exponenciální funkce
- Logaritmické funkce (inverzní k exponenciálním)
- Goniometrické funkce
- Cyklometrické funkce (inverzní ke goniometrickým na daném intervalu)

Mocninné funkce

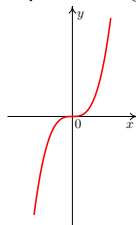
přímka $y = x$



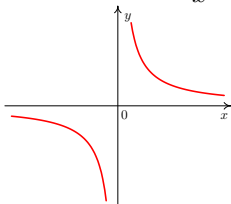
parabola $y = x^2$



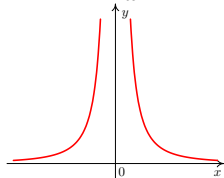
kubická parabola $y = x^3$



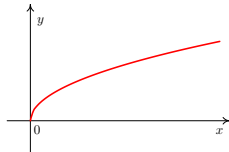
hyperbola $y = \frac{1}{x}$



$y = \frac{1}{x^2}$

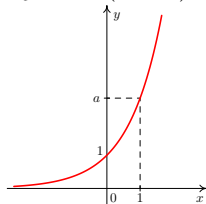


odmocnina $y = \sqrt{x}$



Exponenciální a logaritmické funkce

$$y = a^x \quad (a > 1)$$

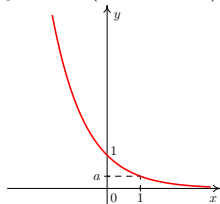


Speciální případ:

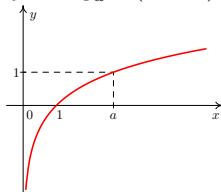
$$y = e^x, \quad e \doteq 2,71828$$

e je tzv. Eulerovo číslo

$$y = a^x \quad (0 < a < 1)$$



$$y = \log_a x \quad (a > 1)$$

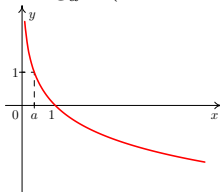


Speciální případ:

$$y = \ln x = \log_e x$$

tzv. přirozený logaritmus

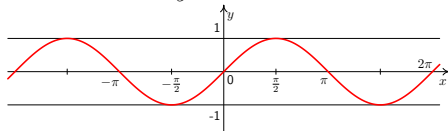
$$y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$$



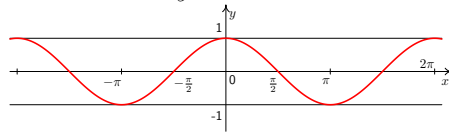
Funkce $y = a^x$ a $y = \log_a x$ jsou vzájemně inverzní, tedy $y = \log_a x \iff x = a^y$.

Goniometrické funkce

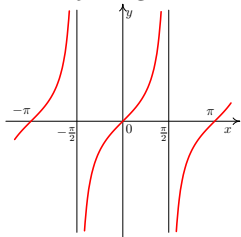
$$y = \sin x$$



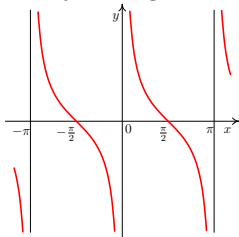
$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$



$$y = \operatorname{cotg} x$$



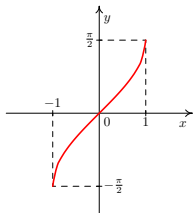
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Cyklometrické funkce

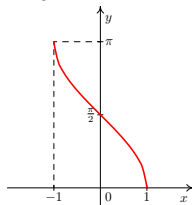
$$y = \arcsin x$$

inverzní k $y = \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$



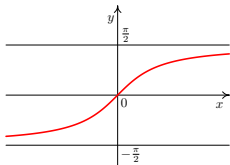
$$y = \arccos x$$

inverzní k $y = \cos x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$



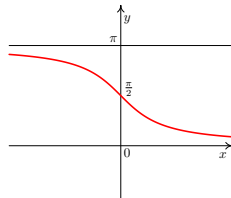
$$y = \operatorname{arctg} x$$

inverzní k $y = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



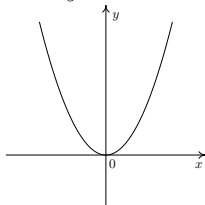
$$y = \operatorname{arccotg} x$$

inverzní k $y = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$

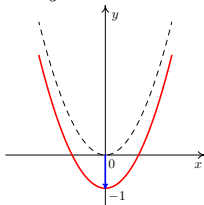


Transformace grafu funkce

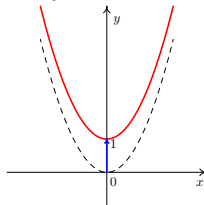
$$y = x^2$$



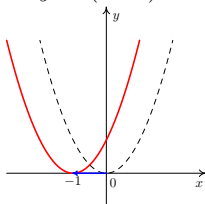
$$y = x^2 - 1$$



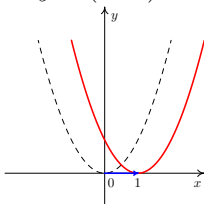
$$y = x^2 + 1$$



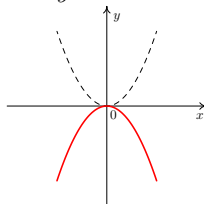
$$y = (x+1)^2$$



$$y = (x-1)^2$$



$$y = -x^2$$



Definice (Polynom)

Polynomem stupně n rozumíme funkci tvaru

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. Čísla a_0, a_1, \dots, a_n nazýváme **koefficienty** polynomu. Člen a_n se nazývá **absolutní člen** polynomu.

Příklad

- polynom stupně 0: $P_0(x) = a$ (konstantní funkce)
- polynom stupně 1: $P_1(x) = ax + b$ (lineární funkce)
- polynom stupně 2: $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ (kvadratická funkce)
- konkrétní příklad polynomu 5. stupně: $x^5 - 3x^4 + 5x^2 - x + 9$

Definice (Kořen polynomu)

- Číslo c se nazývá **kořen polynomu** $P_n(x)$, jestliže

$$P_n(c) = 0.$$

- Kořen c polynomu $P_n(x)$ se nazývá **k -násobný**, jestliže existuje polynom Q_{n-k} takový, že

$$P_n(x) = (x - c)^k Q_{n-k}(x)$$

a c není kořenem polynomu $Q_{n-k}(x)$, tj. $Q_{n-k}(c) \neq 0$.

- Kořen s násobností 1 se nazývá jednoduchý kořen.
- Násobnost kořene c udává, kolikrát je možné vydělit daný polynom beze zbytku tzv. kořenovým činitelem $(x - c)$.

Věta (Základní věta algebry)

Každý polynom stupně n má právě n kořenů (včetně komplexních), přitom každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Příklad

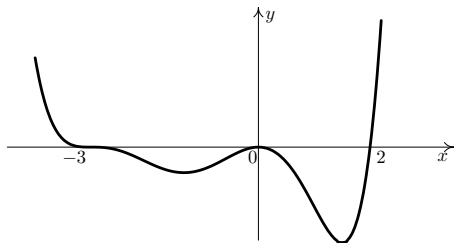
- Lineární polynom $P_1(x) = ax + b$ má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$ (řešení rovnice $ax + b = 0$).
- Kvadratický polynom $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ má právě dva kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$):
 - dva různé reálné kořeny, pokud $b^2 - 4ac > 0$
 - jeden dvojnásobný reálný kořen, pokud $b^2 - 4ac = 0$
 - dvojici komplexně sdružených kořenů, pokud $b^2 - 4ac < 0$

Geometrický význam reálných kořenů

Reálné kořeny polynomu jsou průsečíky grafu tohoto polynomu s osou x .

- **Kořen sudé násobnosti:** Polynom nemění znaménko v tomto bodě.
- **Kořen liché násobnosti:** Polynom mění znaménko v tomto bodě.

Příklad



$$P(x) = x^2(x - 2)(x + 3)^3$$

- -3 je trojnásobný kořen
- 0 je dvojnásobný kořen
- 2 je jednoduchý kořen

Definice (Racionální lomená funkce)

Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ je polynom stupně m . Funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

se nazývá **racionální lomená funkce**.

- Je-li $n < m$, pak se $R(x)$ nazývá **ryze lomená**.
- Je-li $n \geq m$, pak se $R(x)$ nazývá **neryze lomená**.

Každou neryze lomenou racionální funkci lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. (Provedeme dělení $P_n(x) : Q_m(x)$).

Využití systémů počítačové algebry

Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

- Základy práce:

`http://user.mendelu.cz/marik/akademie/zaklady-prace.html`

- Grafika:

`http://user.mendelu.cz/marik/akademie/grafika.html`

Matematické výpočty online (MAW):

- Grafy funkcí:

`http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=graf`

- Definiční obory:

`http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=df`

Příklad

Určete definiční obory funkcí:

$$y = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right), \quad y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com/>):

```
domain of f(x)=ln((x+2)/(x-3))
```

```
domain of f(x)=sqrt(x^2-3x+2)
```

Příklad

Nakreselte grafy funkcí:

$$y = x^2 + 2, \quad y = \sin x.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com/>):

```
plot x^2+2
```

```
plot sin(x)
```