Příklady: Křivkový integrál

Základy vyšší matematiky (ZMTL), LDF MENDELU

Křivkový integrál 1. druhu

1. $\int_c \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$, kde c je úsečka spojující body $[0,-2]$ a $[4,0]$. $[\sqrt{5}\ln 2]$

2. $\int_c x^2y\,\mathrm{d}s$, kde c je čtvrtkružnice se středem v počátku o poloměru R v prvním kvadrantu. $[\frac{1}{3}R^4]$

3. $\int_c (x+y)\,\mathrm{d}s$, kde c je obvod trojúhelníku s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$ a $[0,1]$. $[1+\sqrt{2}]$

4. $\int_c xy\,\mathrm{d}s$, kde c je obvod obdélníku s vrcholy $[0,0]$, $[4,0]$, $[4,2]$ a $[0,2]$. $[24]$

5. $\int_c x^2\,\mathrm{d}s$, kde c je oblouk křivky $y=\ln x$ mezi body $[2,\ln 2]$ a $[1,0]$. $[\frac{1}{3}(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}})]$

Křivkový integrál 2. druhu

1. $\int_c y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde c je křivka $y=\sqrt{x}$ s počátečním bodem $[0,0]$ a koncovým bodem $[1,1]$. $[1]$

2. $\int_c (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$, kde c je parabola $y=x^2$ s počátečním bodem $[-1,1]$ a koncovým bodem $[1,1]$. $[-\frac{14}{15}]$

3. $\int_c 2x\,\mathrm{d}x-(x+2y)\,\mathrm{d}y$, kde c je lomená čára s počátečním bodem $[-1,0]$ a koncovým bodem $[2,0]$ procházející přes bod $[0,2]$. $[6]$

4. $\int_c \frac{(x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, kde c je orientovaná čtvrtkružnice se středem v počátku o poloměru R s počátečním bodem $[0,0]$ a koncovým bodem $[-R,0]$. $[-\frac{\pi}{2}]$

Nezávislost na integrační cestě

Rozhodněte, zda integrál závisí na integrační cestě. Pokud nezávisí, vypočtěte jeho hodnotu pomocí kmenové funkce, případně volbou vhodné křivky spojující počáteční a koncový bod.

1. $\int_c (3x^2y^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (2x^3y + 2xy + 1)\,\mathrm{d}y$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [1, -1]$ a koncovým bodem $B = [2, 1]$. [10]

2. $\int_c \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\,\mathrm{d}x + (\ln x + 2xy)\,\mathrm{d}y$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [1, 1]$ a koncovým bodem $B = [2, 3]$. [$3 \ln 2 + 17$]

3. $\int_c \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2}$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [1, 2]$ a koncovým bodem $B = [2, 1]$. [$\frac{3}{2}$]

4. $\int_c \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [3, 4]$ a koncovým bodem $B = [5, 12]$. [$\ln \frac{13}{5}$]

5. $\int_c (x + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [x_1, y_1]$ a koncovým bodem $B = [x_2, y_2]$. [$x_2 - x_1 + \frac{1}{2}(y_1^2 - x_2^2)$]

6. $\int_c (2x + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [x_1, y_1]$ a koncovým bodem $B = [x_2, y_2]$. [$x_2^2 + x_2y_2 + y_2^2 - x_1^2 - x_1y_1 - y_1^2$]

7. $\int_c x^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [x_1, y_1]$ a koncovým bodem $B = [x_2, y_2]$. [obecně závisí]

Greenova věta

Převeďte integrál nad uzavřenou, kladně orientovanou křivkou c na dvojný integrál nad oblastí Ω ohraničenou křivkou c.

1. $\int_c (1 - x^2)y\,\mathrm{d}x + x(1 + y^2)\,\mathrm{d}y$ [$\iint_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$]

2. $\int_c (e^{xy} + 2x\cos y)\,\mathrm{d}x + (e^{xy} - x^2 \sin y)\,\mathrm{d}y$ [$\iint_\Omega e^{xy}(y - x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$]

Vypočtěte pomocí Greenovy věty převodem na dvojný integrál.

1. $\int\limits_c 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x+y)^2\,\mathrm{d}y$, kde c je obvod trojúhelníku s vrcholy $[1,1]$, $[2,2]$, $[1,3]$. Uvažujeme kladnou orientaci křivky. $[-\frac{4}{3}]$

2. $\int\limits_c \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y$, kde c je obvod trojúhelníku s vrcholy $[1,1]$, $[2,1]$, $[2,2]$. Uvažujeme kladnou orientaci křivky. $[\frac{1}{2}]$

3. $\int\limits_c (x+y)^2\,\mathrm{d}x-(x-y)^2\,\mathrm{d}y$, kde c je uzavřená, záporně orientovaná křivka tvořená grafem funkce $y=\sin x$ a úsečkou na ose x pro $x\in[0,\pi]$. $[4\pi]$