

SLOVNÍ ÚLOHY NA DR - PĚŠENÍ

①

t... čas

h(t)... hladina

$$h' = -k \cdot \sqrt{h}$$

$$h^{-\frac{1}{2}} dh = -k dt$$

$$2\sqrt{h} = -k \cdot t + C$$

②

t... čas

y(t)... množství nečistot v nádrži

p... množství nečistot, které přitekou za jednotku času (konst.)

$$y' = -k \cdot y + p$$

$$\frac{1}{p-ky} dy = dt$$

$$\frac{-k}{p-ky} dy = -k dt$$

$$\ln |p-ky| = -kt + C$$

$$|p-ky| = e^{-kt} \cdot e^C$$

$$p-ky = C \cdot e^{-kt}$$

$$ky = p - C \cdot e^{-kt}$$

$$y = \frac{p}{k} - \frac{C}{k} \cdot e^{-kt}$$

$$y = A - B \cdot e^{-kt}$$

③

t... čas

r(t)... poloměr

$$r' = \frac{k}{r^2}$$

$$r^2 dr = k dt$$

$$\frac{r^3}{3} = k \cdot t + C$$

④

t... čas

y(t)... množství mydla

a... množství mydla, kt. se přistěhuje za jednotku času (konst.)

$$y' = k \cdot y + a$$

$$\frac{1}{ky+a} dy = dt$$

$$\ln(ky+a) = kt + C$$

$$ky+a = e^{kt+C}$$

$$ky = e^{kt} \cdot e^C - a$$

$$y = \frac{1}{k} \cdot e^{kt} \cdot e^C - \frac{a}{k}$$

$$y = A \cdot e^{kt} - B$$

5 t ... čas

$y(t)$... koncentrace alkoholu v krvi

• malá koncentrace : $y' = -k y \Rightarrow y = C \cdot e^{-kt}$

y_0 ... počt. množství koncentrace, h': $y(0) = y_0 \Rightarrow C = y_0$

$$\Rightarrow y = y_0 \cdot e^{-kt}$$

• větší koncentrace

$$y' = -a \Rightarrow y = -a \cdot t + c$$

$$y(0) = y_0 \Rightarrow c = y_0 \Rightarrow y = y_0 - a \cdot t$$

a ... rychlost odbourávání (konstanta)

6 t ... čas

$V(t)$... objem

$S(t)$... povrch

$$\frac{dV}{dt} = k \cdot S$$

↑ množství objemem

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{3}{4} \frac{V}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{V}{\pi}}$$

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow S = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{V}{\pi}} \right)^2$$
$$= \sqrt[3]{64\pi^3 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{\pi^2}} \cdot V^{2/3}$$
$$= \sqrt[3]{36\pi} \cdot V^{2/3}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \underbrace{k \cdot \sqrt[3]{36\pi}}_a \cdot V^{2/3}$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = a \cdot V^{2/3}}$$

$$V^{-2/3} dV = a dt$$

$$3 \cdot V^{1/3} = at + C$$

⑦ $t \dots$ čas

$T(t) \dots$ teplota kačy

$T_v \dots$ teplota vzduchu (konst.)

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = -k(T - T_v)}$$

$$\frac{1}{T - T_v} dT = -k dt$$

$$\ln(T - T_v) = -k \cdot t + c$$

$$T - T_v = e^{-kt+c} = e^{-kt} \cdot \underbrace{e^c}_{=: C}$$
$$\boxed{T = T_v + C \cdot e^{-kt}}$$

k mameri konstant C a k potrebujeme teplotu kačy ve dvou časových údajích.

V čase 0 ... $T(0) = 100$ (práve uraná)

$$\Rightarrow 100 = T_v + C \cdot e^0 \Rightarrow \underline{C = 100 - T_v}$$

druhý údaj (např. změřme teplotu po 5 minutách) nám určí hodnotu k .

⑧ $t \dots$ čas

$l(t) \dots$ délka živočicha

$L_{max} \dots$ maximální délka živočicha

$$\boxed{l' = k(L_{max} - l)}$$

$$\frac{-1}{L_{max} - l} dl = -k dt$$

$$\ln(L_{max} - l) = -k \cdot t + c$$

$$L_{max} - l = e^{-k \cdot t} \cdot e^c \Rightarrow l = L_{max} - e^c \cdot e^{-kt}$$