Diferenciální operátory

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Gradient

Definice

Nechť $f(x, y)$ je skalární funkce dvou proměnných. Gradient funkce f je vektor parciálních derivací

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Analogicky lze definovat gradient funkce libovolného počtu proměnných. Například pro funkci tří proměnných $f(x, y, z)$ je gradient

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Poznámka

- Je-li f funkce jedné proměnné, pak gradient je derivace funkce f.
- Symbol ∇ je operátor nabla definovaný jako $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ resp. $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Gradient ∇f funkce f lze chápat jako součin funkce f a tohoto operátoru.
- Gradient funkce f je vektor ve směru maximálního růstu funkce f a jeho velikost vyjadřuje nárůst veličiny f na intervalu jednotkové délky. Gradient je v každém bodě kolmý na vrstevnici procházející tímto bodem.

Divergence

Definice

Nechť $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ je vektorová funkce, přičemž P,Q jsou skalární funkce dvou proměnných. Divergenci funkce (vektorového pole) $\vec{F}$ definujeme jako

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Analogicky lze definovat divergenci vektorové funkce tří proměnných $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ jako

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Poznámka

- Divergence je skalární veličina. Výraz $\nabla \cdot \vec{F}$ lze chápat jako skalární součin operátoru nabla s funkcí $\vec{F}$.
- Vektorové pole používáme k modelování toku veličin (teplo v materiálu, tekutina v materiálu, voda v půdě apod.). Divergence vektorového pole udává tok z jednotkového objemu látky v daném místě. Kladná divergence znamená, že v daném místě a čase tok nabývá na intenzitě (veličina přenášená tokem se v daném místě kumuluje nebo vzniká). Záporná divergence znamená, že v daném místě a čase tok ustává (veličina přenášená tokem v daném místě ubývá).

Rotace

Definice (Vektorový součin)

Vektorový součin dvou vektorů v trojrozměrném prostoru $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k},$$

tj.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Poznámka

Vektorový součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je kolmý na oba tyto vektory a jeho velikost je rovna obsahu rovnoběžníka, který tyto vektory určují.

Definice (Rotace)

Nechť $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ je vektorová funkce tří proměnných. Rotací funkce (vektorového pole) $\vec{F}$ rozumíme vektorovou funkci

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

tj.

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Poznámka

Ve dvourozměrném vektorovém poli $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ doplníme třetí komponentu nulovou. Protože $R = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, má vektor rotace první dvě komponenty nulové.

Poznámka

- Vektorové pole, jehož rotace je rovna nulovému vektoru se nazývá nevírové pole a ve fyzice má důležité postavení – je v něm možno zavést potenciál a potenciální energii.
- Mějme vektorové pole charakterizující rychlost proudící tekutiny. Rotace udává, zda má pole tendenci uvést do rotace objekt unášený tímto prouděním.