Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

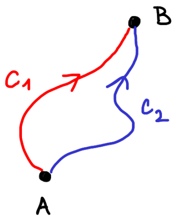
Nezávislost na integrační cestě

Definice (Nezávislost na integrační cestě)

Nechť $\vec{F}$ je vektorová funkce (pole) v oblasti Ω. Řekneme, že křivkový integrál z $\vec{F}$ nezávisí v Ω na integrační cestě, jestliže pro libovolné dvě orientované, po částech hladké křivky c_1, c_2, které leží v Ω a mají společný počáteční a koncový bod, platí

$$\int_{c_1} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{c_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}.$$

Vektorové pole, v němž křivkový integrál nezávisí na integrační cestě, se nazývá konzervativní pole.



Nezávislost na integrační cestě a kmenová funkce

Věta (Nezávislost na integrační cestě a kmenová funkce)

Nechť $\vec{F}$ *je spojitá v oblasti* Ω*. Křivkový integrál* $\int_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ *nezávisí na integrační cestě v* Ω *právě tehdy, když existuje skalární funkce* Φ *s vlastností* $\nabla\Phi = \vec{F}$*.*
Pak pro libovolnou, orientovanou, po částech hladkou křivku c *v* Ω *s počátečním bodem* A *a koncovým bodem* B *platí*

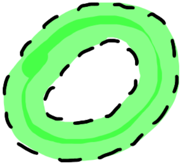
$$\int_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Poznámka (Kmenová funkce a potenciálové pole)

- Funkce Φ z předchozí věty s vlastností $\nabla\Phi = \vec{F}$ se nazývá kmenová funkce vektorového pole $\vec{F}$. Vektorové pole, pro které existuje kmenová funkce, se nazývá potenciálové pole. Funkce $-\Phi$ se nazývá potenciál. Podle předchozí věty vyjadřují pojmy *konzervativní pole* a *potenciálové pole* totéž.
- Předchozí věta dává návod na výpočet křivkového integrálu pomocí kmenové funkce v případě, že integrál nezávisí na integrační cestě. Jde o analogii Newton-Leibnizovy věty pro výpočet určitého integrálu.

Jednoduše souvislá oblast

- Množina se nazývá souvislá, jestliže každé dva body z množiny lze spojit lomenou čarou, která celá leží v množině. (Množina je tvořena „z jednoho kusu“.)
- Množina se nazývá oblast, jestliže je otevřená a souvislá.
- Množina se nazývá jednoduše souvislá oblast, jestliže je to oblast, která neobsahuje „otvory“.



SOUVISLÁ, ALE NENÍ JEDNODUŠE SOUVISLÁ

JEDNODUŠE SOUVISLÁ

Podmínky pro nezávislost na integrační cestě

Věta (Podmínky pro nezávislost na integrační cestě)

Nechť $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ je funkce tří proměnných, Ω je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{R}^3$, P, Q, R mají spojité parciální derivace podle všech proměnných, c je orientovaná, po částech hladká křivka v Ω. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

1. *Křivkový integrál $\int_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ nezávisí na integrační cestě v Ω.*
2. *Křivkový integrál $\oint_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ po libovolné uzavřené křivce c v Ω je roven nule.*
3. *Rotace $\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ je v Ω rovna nulovému vektoru.*
4. *Existuje skalární funkce Φ s vlastností $\nabla\Phi = \vec{F}$.*

Poznámka

- Rotace rozepsaná po složkách je

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

  Podmínka nulovosti rotace, která je ekvivalentní s nezávislostí integrálu $\int_c \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$ na integrační cestě, je tedy

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

- Ve dvourozměrném vektorovém poli $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ má vektor rotace první dvě komponenty nulové. Platí tedy, že integrál $\int_c P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y$ nezávisí na integrační cestě právě tehdy, když

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Příklad – 1. část

Mějme integrál

$$\int_c 3x^2 y \,\mathrm{d}x + (x^3+1)\,\mathrm{d}y,$$

kde c je libovolná orientovaná křivka s počátečním bodem $A=[0,0]$ a koncovým bodem $B=[1,1]$.

- Integrál nezávisí na integrační cestě, neboť $P=3x^2y$, $Q=x^3+1$ a tedy

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2.$$

- Integrál můžeme tedy počítat buď tak, že zvolíme libovolnou křivku spojující body A a B a přes tuto křivku budeme integrovat nebo využijeme vztahu pro kmenovou funkci. Ukážeme si výpočet s využitím kmenové funkce.
- Pro kmenovou funkci Φ platí $\nabla\Phi=\vec{F}$, tj.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=Q.$$

Příklad – 2. část

- Kmenovou funkci najdeme následovně. Z podmínky $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$ vyplývá:

$$\Phi(x, y) = \int P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int 3x^2 y\,\mathrm{d}x = x^3 y + c(y),$$

kde $c(y)$ je integrační „konstanta“ (nezávisí na x). Následným dosazením do podmínky $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$ dostaneme:

$$x^3 + c'(y) = x^3 + 1.$$

Odtud $c'(y) = 1$ a tedy $c(y) = y$. Kmenová funkce je tedy $\Phi(x, y) = x^3 y + y$.

- Nyní do kmenové funkce už jen dosadíme souřadnice bodů A a B a hodnoty od sebe odečteme:

$$\int_c 3x^2 y\,\mathrm{d}x + (x^3 + 1)\,\mathrm{d}y = \Phi(B) - \Phi(A) = 2 - 0 = 2.$$