Greenova věta

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

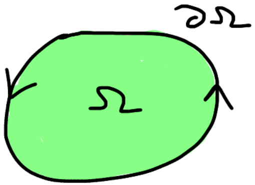
LDF MENDELU

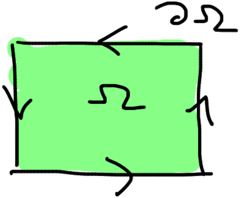
Greenova věta

Věta (Greenova věta)

Nechť $\Omega \in \mathbb{R}^2$ *je jednoduše souvislá oblast, jejíž hranice* $\partial\Omega$ *je kladně orientovaná, po částech hladká křivka. Nechť* $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ *je definovaná na oblasti obsahující množinu* Ω *a parciální derivace funkcí* P *a* Q *jsou zde spojité. Pak*

$$\oint\limits_{\partial\Omega} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$





Poznámky

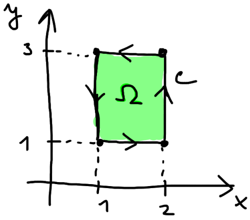
- Věta dává návod jak spočítat křivkový integrál druhého druhu po uzavřené křivce (tj. cirkulaci pole) pomocí dvojného integrálu.
- Kladnou orientací křivky $\partial\Omega$ rozumíme orientaci proti směru hodinových ručiček, tj. při pohybu po křivce je množina Ω stále vlevo od křivky.
- Z Greenovy věty přímo vyplývají vztahy pro výpočet obsahu množiny Ω pomocí křivkového integrálu. V případě kladné orientace hranice množiny Ω máme
$$S = \iint\limits_{\Omega} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial\Omega} x \, \mathrm{d}y = -\int\limits_{\partial\Omega} y \, \mathrm{d}x.$$
- Z Greenovy věty také vidíme, že v potenciálovém poli (výraz ve dvojném integrálu je nulový) je křivkový integrál po uzavřené křivce roven nule.

Příklad 1

Pomocí Greenovy věty spočítáme

$$\oint_c (x - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 2y^3)\,\mathrm{d}y,$$

kde c je obvod obdélníku, viz obrázek.



Máme $P = x - y^2$, $Q = x^2 + 2y^3$ a tedy $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y$.

Z Greenovy věty:

$$\oint_c (x - y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 2y^3)\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega (2x + 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 \left[\int_1^3 (2x + 2y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[2xy + y^2\right]_1^3\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (6x + 9 - 2x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 (4x + 8)\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 + 8x\right]_1^2 = 8 + 16 - 2 - 8 = 14.$$

Příklad 2

Uvažujme integrál

$$\oint_c (y - x^2)\,\mathrm{d}x + (x + y^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde c je jednotková kružnice se středem v počátku.

Máme $P = y - x^2$, $Q = x + y^2$ a tedy $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Platí tedy $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Z Greenovy věty i z faktu, že integrujeme po uzavřené křivce v potenciálovém poli (existuje kmenová funkce) vyplývá, že

$$\oint_c (y - x^2)\,\mathrm{d}x + (x + y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Greenova věta pro tok

Pokud v Greenově větě nahradíme $(P(x,y), Q(x,y))$ za $(-Q(x,y), P(x,y))$, dostaneme

$$\oint_{\partial\Omega} -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Výraz na levé straně je tok vektorového pole $\vec{F} = (P, Q)$ přes hranici $\partial\Omega$, výraz na pravé straně ve dvojném integrálu je divergence vektorového pole $\vec{F}$.