Dvojný integrál

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Infimum a supremum

Definice (Dolní závora, infimum)

Nechť A je neprázdná množina reálných čísel.

- Číslo $d \in \mathbb{R}$ se nazývá dolní závora množiny A, jestliže pro všechna $a \in A$ platí $d \leq a$.
- Množina A se nazývá zdola ohraničená, jestliže existuje alespoň jedna její dolní závora. V tom případě se největší dolní závora množiny A nazývá infimum množiny A a značí se $\inf(A)$.

Definice (Horní závora, supremum)

Nechť A je neprázdná množina reálných čísel.

- Číslo $h \in \mathbb{R}$ se nazývá horní závora množiny A, jestliže pro všechna $a \in A$ platí $h \geq a$.
- Množina A se nazývá shora ohraničená, jestliže existuje alespoň jedna její horní závora. V tom případě se nejmenší horní závora množiny A nazývá supremum množiny A a značí se $\sup(A)$.

Příklad

1. Uvažujme interval $(2, 4]$.
   - Dolní závora intervalu $(2, 4]$ je každé reálné číslo, které je menší nebo rovno všem číslům z intervalu $(2, 4]$. Největší z těchto dolních závor je číslo 2, je to tedy infimum intervalu $(2, 4]$.
   - Horní závora intervalu $(2, 4]$ je každé reálné číslo, které je větší nebo rovno všem číslům z intervalu $(2, 4]$. Nejmenší z těchto horních závor je číslo 4, je to tedy supremum intervalu $(2, 4]$.
2. Uvažujme interval $(1, \infty)$.
   - Infimum intervalu je číslo 1.
   - Supremum intervalu však neexistuje, interval není shora ohaničená množina.

Poznámka

Infimum a supremum množiny může, ale nemusí být prvkem dané množiny.

- Supremum intervalu $(2, 4]$ je číslo 4, které do intervalu patří.
- Infimum intervalu $(2, 4]$ je číslo 2, které do intervalu nepatří.

Dvojný integrál na obdélníku

Nechť f je funkce dvou proměnných definovaná a ohraničená na obdélníku $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], y \in [c, d]\}$, stručně píšeme $R = [a, b] \times [c, d]$.

- Rozdělme obdélník R na n obdélníků $p_1, p_2, \dots, p_n$ o obsazích $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$. Mluvíme od tzv. dělení obdélníku R. Označme toto dělení D.
- V každém z obdélníků $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, najděme infimum m_i a supremum M_i funkčních hodnot funkce f, tj;

$$m_i = \inf\{f(x, y), (x, y) \in p_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x, y), (x, y) \in p_i\}.$$

a určeme součty

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta p_i, \quad S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta p_i.$$

Číslo $s(D, f)$ se nazývá dolní součet příslušný funkci f a dělení D a číslo $S(D, f)$ se nazývá horní součet příslušný funkci f a dělení D.

Dvojný integrál na obdélníku

Výše uvedený dolní a horní součet je možné sestrojit pro libovolné dělení obdélníku R. Množina všech možných dolních součtů je shora ohraničená, existuje tedy její supremum a podobně množina všech možných horních součtů je zdola ohraničená a má tedy infimum.

- Supremum množiny všech dolních součtů se nazývá dolní dvojný integrál funkce f na obdélníku R a značí se

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Infimum množiny všech horních součtů se nazývá horní dvojný integrál funkce f na obdélníku R a značí se

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dvojný integrál na obdélníku

Definice (Dvojný integrál na obdélníku)

Je-li

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

pak říkáme, že funkce f je na obdélníku R integrovatelná a společnou hodnotu dolního a horního integrálu nazýváme dvojný integrál funkce f na obdélníku R a značíme

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta (Postačující podmínka pro integrovatelnost)

Nechť f je funkce dvou proměnných spojitá na obdélníku R. Pak je funkce f na tomto obdélníku integrovatelná.

Výpočet dvojného integrálu na obdélníku

Výpočet dvojného integrálu provádíme s využitím následující věty převedením na tzv. dvojnásobný integrál ("integrál z integrálu").

Věta (Fubini)

Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném obdélníku $R = [a,b] \times [c,d]$. Pak

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

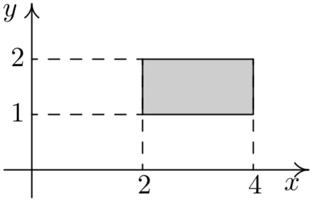
Důsledek Fubiniho věty

Platí-li v předchozí větě navíc, že $f(x,y) = g(x)h(y)$, kde g je funkce spojitá na $[a,b]$ a h je funkce spojitá na $[c,d]$, pak

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklad

Vypočtěte $\iint\limits_R (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde R je obdélník s vrcholy $(2,1),(4,1),(4,2),(2,2)$.



Podle Fubiniho věty můžeme integrál vyjádřit jako dvojnásobný:

1. $\iint\limits_R (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^4 \left[\int_1^2 (x+2y)\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x$
2. $\iint\limits_R (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\int_2^4 (x+2y)\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y$

Příklad (pokračování)

1.

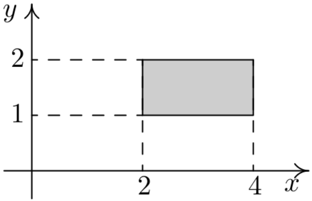
$$\begin{aligned}\iint\limits_R (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_2^4 \left[\int_1^2 (x+2y)\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \left[xy+y^2\right]_1^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_2^4 (2x+4-(x+1))\,\mathrm{d}x = \int_2^4 (x+3)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_2^4 = 8+12-(2+6) = 12\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\iint\limits_R (x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2 \left[\int_2^4 (x+2y)\,\mathrm{d}x\right]\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2}+2xy\right]_2^4\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 (8+8y-(2+4y))\,\mathrm{d}y = \int_1^2 (6+4y)\,\mathrm{d}y \\ &= \left[6y+2y^2\right]_1^2 = 12+8-(6+2) = 12\end{aligned}$$

Příklad

Vypočtěte $\iint\limits_R xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde R je obdélník s vrcholy $(2,1), (4,1), (4,2), (2,2)$.



Podle důsledku Fubiniho věty je možné integrál vyjádřit jako součin dvou jednoduchých integrálů:

$$\iint\limits_R xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^4 x \, \mathrm{d}x \cdot \int_1^2 y^2 \, \mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2 = (8-2) \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 14$$

Dvojný integrál na obecné uzavřené oblasti

Definice (Dvojný integrál)

Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na ohraničené a uzavřené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a nechť R je obdélník takový, že $\Omega \subseteq R$. Definujme na R funkci g předpisem

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{je-li } (x,y) \in \Omega, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a předpokládejme, že funkce g je na R integrovatelná. Pak dvojný integrál funkce f na množině Ω definujeme vztahem

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta (Postačující podmínka pro integrovatelnost)

Nechť f je funkce dvou proměnných definovaná a spojitá na ohraničené a uzavřené oblasti Ω. Pak je funkce f na Ω integrovatelná.

Výpočet dvojného integrálu na uzavřené elementární oblasti

Věta (Fubini)

- *Nechť* g_1, h_1 *jsou funkce jedné proměnné spojité na* $[a, b]$ *a nechť* f *je funkce dvou proměnných spojitá na množině*

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq h_1(x)\}.$$

  Pak

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{h_1(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

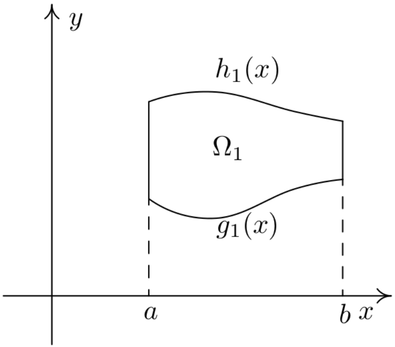
- *Nechť* g_2, h_2 *jsou funkce jedné proměnné spojité na* $[c, d]$ *a nechť* f *je funkce dvou proměnných spojitá na množině*

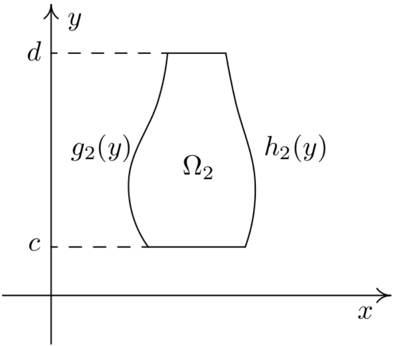
$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ g_2(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

  Pak

$$\iint\limits_{\Omega_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{g_2(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

Množiny Ω_1 a Ω_2 z předchozí věty se nazývají uzavřené elementární oblasti.





Vlastnosti dvojného integrálu

Věta (Linearita)

Nechť f_1, f_2 *jsou funkce integrovatelné na* Ω *a nechť* $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Pak*

$$\iint\limits_{\Omega} cf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{\Omega} \left[f_1(x,y) + f_2(x,y)\right]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega} f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Poznámka

Vlastnosti uvedené v předchozí věte lze shrnout:

$$\iint\limits_{\Omega} \left[c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)\right]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c_1\iint\limits_{\Omega} f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2\iint\limits_{\Omega} f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vlastnosti dvojného integrálu

Věta (Aditivita vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť je funkce integrovatelná na konečném počtu uzavřených elementárních oblastí $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$*, které mají společné nejvýše hraniční body a nechť* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_n$*. Pak platí*

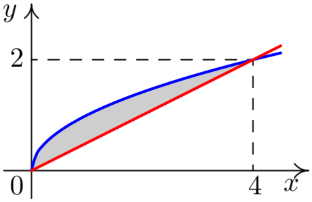
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \cdots + \iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Integrujeme-li tedy funkci f na množině, která není elementární oblast, postupujeme tak, že tuto množinu vhodným způsobem na elementární oblasti rozdělíme. Na všech takto získaných elementárních oblastech vypočteme integrál z funkce f a všechny tyto integrály sečteme.

Příklad

Vypočtěte $\iint\limits_{\Omega} 2xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je množina bodů, které vyhovují nerovnostem:

$$y \leq \sqrt{x}, \quad y \geq \tfrac{x}{2}.$$



$$y = \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = y^2$$
$$y = \frac{x}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2y$$

Podle Fubiniho věty převedeme integrál na dvojnásobný. Máme dvě možnosti:

1. $\iint\limits_{\Omega} 2xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^4 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 2xy \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$
2. $\iint\limits_{\Omega} 2xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} 2xy \,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$

Příklad (pokračování)

1.

$$\iint\limits_{\Omega} 2xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^4 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 2xy \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_0^4 \left[xy^2\right]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16}\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}.$$

2.

$$\iint\limits_{\Omega} 2xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} 2xy \,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int_0^2 \left[x^2y\right]_{y^2}^{2y} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 \left(4y^3 - y^5\right) \mathrm{d}y = \left[y^4 - \frac{y^6}{6}\right]_0^2 = 16 - \frac{2^6}{6} = \frac{16}{3}.$$

Polární souřadnice

Body v $\mathbb{R}^2$ jsme dosud vyjadřovali pomocí tzv. kartézských souřadnic – každému bodu v pravoúhlé souřadnicové soustavě je přiřazena dvojice souřadnic (x, y), které udávají vzdálenost daného bodu od osy y a od osy x. Každý bod v $\mathbb{R}^2$ je těmito kartézskými souřadnicemi jednoznačně určen.

Existují i jiné způsoby, jak zadávat body v rovině, například pomocí tzv. polárních souřadnic – každý bod v rovině je určen dvojicí (r, φ), kde

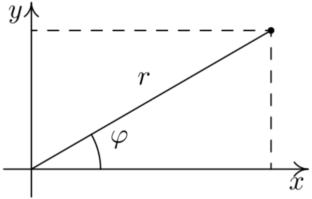
- r je vzdálenost bodu od počátku souřadnicové soustavy,
- φ je úhel, který svírá spojnice daného bodu a počátku souřadnicové soustavy s kladnou částí osy x.

Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\varphi \in [0, 2\pi), r \in [0, \infty)$$



Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic

Nechť f je funkce dvou proměnných spojitá na uzavřené oblasti Ω a nechť Ω^* je množina, pro kterou platí, že každému bodu $(r, \varphi) \in \Omega^*$ je předpisem

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$. Pak

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic

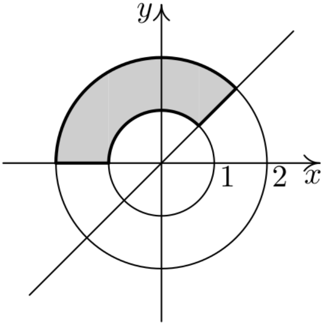
Poznámka

1. Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic je speciální případ substituční metody pro dvojný integrál.
   - Transformaci množiny Ω na množinu Ω^* lze chápat jako zobecnění transformace mezí při substituční metodě pro určitý integrál.
   - Transformují se i diferenciály: výraz $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je nahrazen výrazem $r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$.
2. Transformace do polárních souřadnic je vhodná zejména tehdy, když Ω je kruh, mezikruží nebo kruhová výseč se středem v počátku, neboť v takovém případě bude Ω^* obdélník a tedy transformovaný integrál má konstantní meze.

Příklad (Transformace do polárních souřadnic)

Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte $\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde Ω je množina zadaná nerovnostmi: $x^2+y^2 \leq 4, \quad x^2+y^2 \geq 1, \quad y \geq x, \quad y \geq 0.$

Ω :



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$x^2+y^2 = r^2$$

Ω^*:

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$$
$$1 \leq r \leq 2$$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\int\limits_{1}^{2} \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2}} r\,\mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\varphi$$

Příklad (Transformace do polárních souřadnic - pokračování)

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left[\int\limits_{1}^{2}\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2}}r\,\mathrm{d}r\right]\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left[\int\limits_{1}^{2}r\cos\varphi\,\mathrm{d}r\right]\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int\limits_{1}^{2}r\,\mathrm{d}r=\Big[\sin\varphi\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2$$

$$=\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Poznámka (Obecná transformace, Jakobián)

Nechť f je funkce dvou proměnných spojitá na uzavřené oblasti Ω a nechť Ω^* je množina, pro kterou platí, že každému bodu $(u, v) \in \Omega^*$ je předpisem

$$\begin{aligned} x &= g(u, v) \\ y &= h(u, v) \end{aligned}$$

přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$. Pak

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

kde

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \\ h'_u(u, v) & h'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

je tzv. Jakobián. (Při transformaci do polárních souřadnic je Jakobián roven r.)