Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Autonomní rovnice

Definice (Autonomní rovnice)

Nechť f je spojitá funkce. Rovnice

$$x' = f(x) \tag{1}$$

kde $'$ značí derivaci podle proměnné t, se nazývá autonomní rovnice.

Poznámka

- Proměnnou t nazýváme čas.
- Autonomnní rovnice je taková rovnice, ve které se na pravé straně nevyskytuje proměnná t.
- Je-li $x(t)$ řešení autonomní rovnice, pak také $x(t+c)$, $c \in \mathbb{R}$, je řešení této rovnice.
- Počáteční podmínku lze tedy volit v libovolném čase, zpravidla $t_0 = 0$.
- Rovnice (1) je rovnice se separovanými proměnnými.

Autonomní systém rovnic

Definice (Autonomní systém)

Nechť f a g jsou spojité funkce dvou proměnných. Soustava diferenciálních rovnic

$$x' = f(x,y)$$
$$y' = g(x,y), \tag{2}$$

kde $'$ značí derivaci podle proměnné t, se nazývá dvourozměrný autonomní systém. Řešením tohoto systému je dvojice funkcí $x(t)$, $y(t)$, které po dosazení do systému splňují obě rovnice.

Definice (Počáteční úloha)

Nechť t_0, x_0, y_0 jsou reálná čísla. Uloha najít řešení systému (2) splňující počáteční podmínky

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$$

se nazývá počáteční úloha.

Poznámka

- U autonomního systému rovnic se na pravé straně nevyskytuje proměnná t.
- Je-li $x(t)$, $y(t)$ řešení systému (2), pak také $x(t+c)$, $y(t+c)$, $c \in \mathbb{R}$, je řešením tohoto systému.
- Počáteční podmínku lze tedy volit v libovolném čase, zpravidla $t_0 = 0$.
- Řešení $x(t)$, $y(t)$ lze chápat jako dvourozměrnou vektorovou funkci $(x(t), y(t))$.

Trajektorie a fázová rovina

Řešení $x(t)$, $y(t)$ autonomního systému lze graficky interpretovat dvěma způsoby:

1. jako integrální křivku (pohyb), tj. jako graf funkce v prostoru $\mathbb{R}^3$,
2. jako trajekorii, tj. jako kolmý průmět integrální křivky do roviny xy. Rovina xy, ve které zakreslujeme trajektorie, se nazývá fázová rovina.
   Trajektorie je tedy definována jako množina T bodů v rovině xy takto:

$$T = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : x(\tilde{t}) = \tilde{x},\ y(\tilde{t}) = \tilde{y} \ \text{ pro nějaké } \ \tilde{t} \in \mathbb{R}\}.$$

Za předpokladu jednoznačnosti každé počáteční úlohy systému (2) platí, že každé dvě trajektorie buď splývají nebo nemají žádný společný bod.

Druhy a vlastnosti trajektorií

Věta (Druhy trajektorií)

Autonomní systém může mít trajektorie trojího druhu:

1. *stacionární body (odpovídají konstantním řešením);*
2. *uzavřené křivky (cykly) (odpovídají perodickým řešením)*
3. *trajektorie, které samy sebe neprotínají.*

Poznámka (Vlastnosti trajektorií)

- Uvnitř každého cyklu leží alespoň jeden stacionární bod.
- Trajektorie, které samy sebe neprotínají, mají pro $t \to \infty$ jednu z následujících vlastností:
  - Trajektorie mají alespoň jednu složku neohraničenou.
  - Trajektorie konvergují k některému ze stacionárních bodů.
  - Trajektorie konvergují k některému z cyklů.
  - Trajektorie konvergují k množině tvořené konečným počtem singulárních bodů a jinými trajektoriemi, které vedou z jednoho stacionárního bodu do druhého. S tímto typem trajektorií se v jednoduchých modelech nesetkáme.

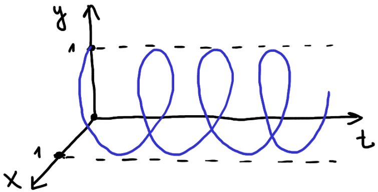
Příklad: periodické řešení a uzavřená křivka

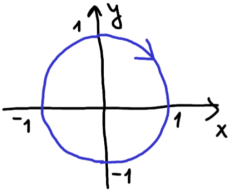
Systém

$$x' = y$$
$$y' = -x$$

má řešení $x = \sin t$, $y = \cos t$ (lze ověřit dosazením).

Pro každé t platí $x^2 + y^2 = 1$. Trajektorie je tedy kružnice se středem v počátku o poloměru jedna.





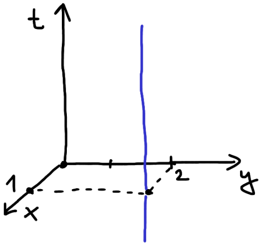
Příklad: konstantní řešení a stacionární bod

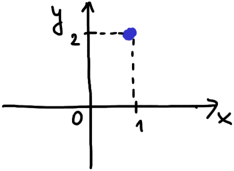
Systém

$$
\begin{aligned}
x' &= 1 - x \\
y' &= x^2 + y - 3
\end{aligned}
$$

má konstantní řešení $x = 1$, $y = 2$ (lze ověřit dosazením).

Trajektorie tohoto řešení je bod $[1, 2]$.





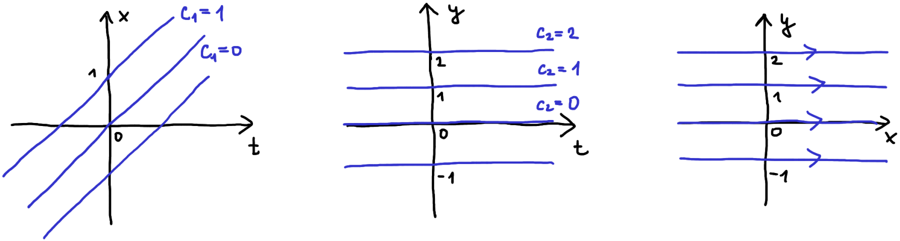
Příklad: trajektorie, které samy sebe neprotínají

Systém

$$x' = 1$$
$$y' = 0$$

má řešení $x = t + c_1$, $y = c_2$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Trajektorie jsou přímky rovnoběžné s osou x.



Stacionárních body

Definice (Stacionární bod)

Bod (x^*, y^*) se nazývá stacionární bod (singulární bod) systému (2), jestliže

$$f(x^*, y^*) = 0 \text{ a } g(x^*, y^*) = 0.$$

Bod (x^*, y^*) je stacionárním bodem systému (2) právě tehdy, když má systém (2) konstantní (stacionární) řešení $x(t) = x^*$, $y(t) = y^*$.

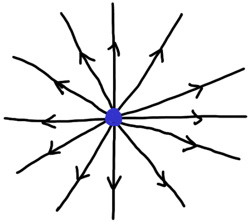
Podle chování trajektorií v okolí stacionárního bodu rozlišujeme následující typy stacionárních bodů.

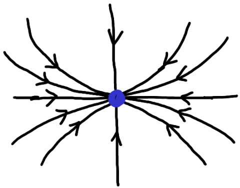
- Uzel
- Ohnisko
- Sedlo
- Bod rotace a střed

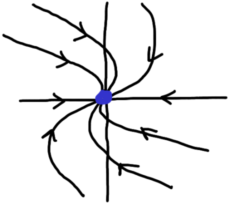
Stacionární body: uzel

Stacionární bod $[x^*, y^*]$ se nazývá uzel, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto bodu konvergují buď pro $t \to \infty$ nebo pro $t \to -\infty$ k bodu $[x^*, y^*]$ tak, že kolem tohoto bodu nedochází k oscilacím.

Uzel nazýváme stabilní, jestliže všechny trajektorie do něj konvergují pro $t \to \infty$, tj. všechny trajektorie z nějakého okolí do tohoto bodu směřují. V opačném případě tento bod nazýváme nestabilní.



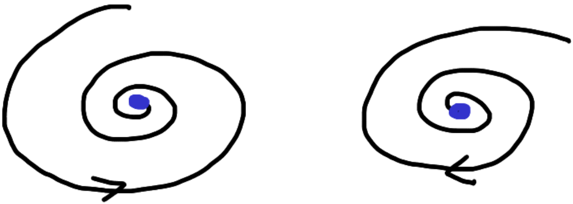




Stacionární body: ohnisko

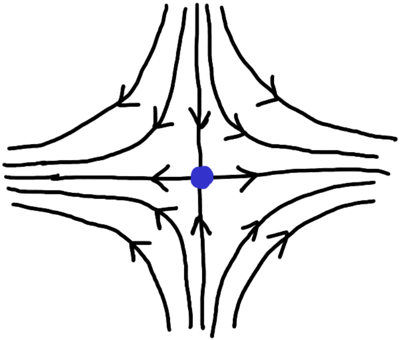
Stacionární bod $[x^*, y^*]$ se nazývá ohnisko, jestliže všechny trajektorie z nějakého okolí tohoto bodu konvergují buď pro $t \to \infty$ nebo pro $t \to -\infty$ k bodu $[x^*, y^*]$ tak, že kolem tohoto bodu oscilují se zmenšující se amplitudou.

Ohnisko nazýváme stabilní, jestliže všechny trajektorie do něj konvergují pro $t \to \infty$, tj. všechny trajektorie z nějakého okolí do tohoto bodu směřují. V opačném případě tento bod nazýváme nestabilní.



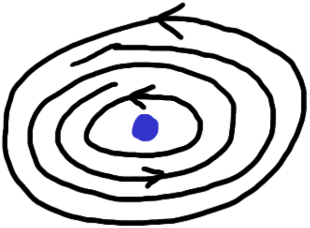
Stacionární body: sedlo

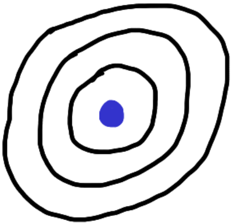
Stacionární bod $[x^*, y^*]$ se nazývá sedlo, jestliže v každém jeho okolí existuje pouze konečný počet trajektorií, které pro $t \to \pm\infty$ konvergují k tomuto bodu.



Stacionární body: bod rotace a střed

Stacionární bod $[x^*, y^*]$ se nazývá bod rotace, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho počet trajektorií, které jsou cykly. Pokud v nějakém okolí existují pouze cykly, nazývá se tento bod střed.





Klasifikace stacionárních bodů

Definice (Jakobiho matice)

Matice $J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ se nazývá Jakobiho matice systému (2).

Věta

Uvažujme vlastní čísla Jakobiho matice vypočtené ve stacionárním bodě.

- *Jsou-li obě vlastní čísla reálná kladná, je stacionární bod nestabilní uzel.*
- *Jsou-li obě vlastní čísla reálná záporná, je stacionární bod stabilní uzel.*
- *Jsou-li obě vlastní čísla reálná a mají-li opačná znaménka, je stacionární bod sedlo.*
- *Jsou-li vlastní čísla komplexní s kladnou reálnou částí, je stacionární bod nestabilní ohnisko.*
- *Jsou-li vlastní čísla komplexní se zápornou reálnou částí, je stacionární bod stabilní ohnisko.*
- *Jsou-li vlastní čísla komplexní s nulovou reálnou částí, je stacionární bod buď bod rotace nebo ohnisko. Ve speciálním případě lineárního systému se jedná o střed.*

Využití v aplikacích

Modely vývoje populací:

- konkurence dvou druhů
- dravec a kořist
- modely epidemií
- a různé další