Křivkový integrál druhého druhu

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Křivkový integrál druhého druhu

Křivkový integrál 2. druhu

Nechť c je orientovaná, po částech hladká křivka, P, Q funkce dvou proměnných. Integrál 2. druhu vektorové funkce $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ podél křivky c značíme

$$\int_c \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \int_c P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $\mathrm{d}\vec{r} = (\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y)$.
Je-li křivka c daná parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, pak

$$\int_c \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Křivkový integrál druhého druhu

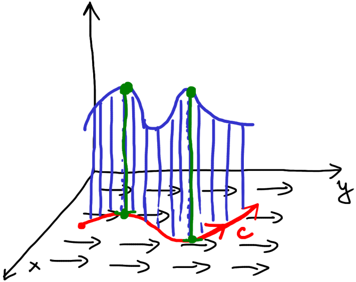
Poznámka

- Pro integrál po uzavřené křivce (počáteční a koncový bod křivky c splývají), používáme někdy značení $\oint_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$.
- Pro různé parametrizace stejné křivky má integrál stejnou hodnotu.
- U integrálu druhého druhu záleží na orientaci křivky c, tedy záleží na tom, který bod je počáteční a který je koncový. Předpokládáme tzv. souhlasnou orientaci, tj. počáteční bod křivky odpovídá hodnotě parametru $t = \alpha$ a koncový bod odpovídá hodnotě parametru $t = \beta$. Při změně orientace dochází ke změně znaménka integrálu.

Význam křivkového integrálu 2. druhu

Celková práce, kterou vykoná síla $\vec{F}$ při přemístění tělesa podél dané orientované křivky c.

- Směr působení síly vyznačen šipkami.
- Největší práce se koná ve směru působící síly (vyznačeno zeleně), v ostatních směrech působí jen komponenta síly a práce je tedy menší. Ve směru kolmém na působící sílu by práce byla nulová.
- V případě, že přemisťujeme těleso jedním směrem (po dráze $\vec{s}$) a síla se nemění, pak dostáváme známý vzoreček $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$, resp. speciálně $W = F \cdot s$ v případě, že těleso přemisťujeme ve směru působící síly po dráze délky s.



Vlastnosti křivkového integrálu 2. druhu

Věta (Linearita – homogenita a aditivita)

Nechť $\vec{F}$, $\vec{G}$ jsou vektorové funkce, $k \in \mathbb{R}$, c křivka. Pak

$$\int\limits_c k\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = k\int\limits_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r},$$

$$\int\limits_c (\vec{F}+\vec{G})\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} + \int\limits_c \vec{G}\mathrm{d}\vec{r}.$$

Věta (Aditivita vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť je křivka c rozdělena na konečný počet disjunktních (až na krajní body) křivek $c_1, c_2, \dots, c_n$. Pak platí

$$\int\limits_c \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{c_1} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} + \int\limits_{c_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int\limits_{c_n} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}.$$

Aplikace křivkového integrálu 2. druhu

- Celková práce, kterou vykoná síla $\vec{F}$ při přemístění tělesa podél křivky $\vec{c}$:

$$\int_c \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

Pozn.: Práce vykonaná při přemístění tělesa po uzavřené křivce se nazývá cirkulace vektorového pole.

- Tok ve vektorovém poli $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ podél křivky c:

$$\int_c -Q(x,y)\,\mathrm{d}x + P(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Vektorová funkce zde vyjadřuje nějakou rychlost. Na rozdíl od práce je největší tok ve směru kolmém na křivku c.

- Je-li Ω souvislá množina bez „děr“ s po částech hladkou hranicí $\partial\Omega$, pak obsah množiny Ω lze (až na případné znaménko) vyjádřit jako

$$\int_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y, \quad \text{resp.} \int_{\partial\Omega} y\,\mathrm{d}x.$$

Vektorová funkce v integrálu je $(0,x)$, resp. $(y,0)$ a integrujeme přes hranici množiny.