Křivkový integrál prvního druhu

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Parametrické vyjádření křivky v rovině

Křivku c v rovině můžeme popsat dvojicí funkcí:

$$c: \ x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ t \in [\alpha, \beta].$$

- Křivka je popsána dvojicí funkcí φ, ψ jedné proměnné t, tj. vektorovou funkcí $(\varphi(t), \psi(t))$. Tuto funkci zapisujeme někdy ve tvaru $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}$, kde $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$.
- Křivku zakreslíme v rovině xy jako množinu všech bodů $[\varphi(t), \psi(t)]$, $t \in [\alpha, \beta]$.
- Proměnnou t nazýváme parametr a často představuje čas, přičemž α je počáteční čas a β je koncový čas. Bod $[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)]$ je počáteční bod křivky a bod $[\varphi(\beta), \psi(\beta)]$ je koncový bod křivky.
- Rovnice $x = \varphi(t), \ y = \psi(t)$ se nazývají parametrické rovnice křivky c.

Křivku c v trojrozměrném prostoru můžeme popsat analogicky trojicí funkcí:

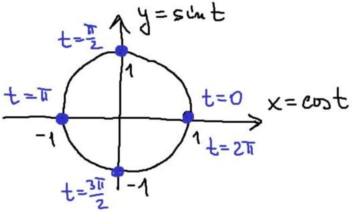
$$c: \ x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ z = \eta(t), \ t \in [\alpha, \beta].$$

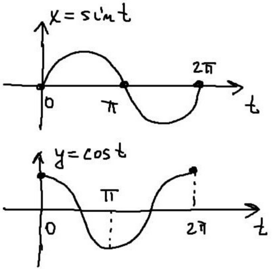
Nejednoznačnost parametrického vyjádření

Parametrické rovnice dané křivky nejsou dané jednoznačně, tj. křivku c můžeme popsat různými parametrickými rovnicemi.

Například kružnici o poloměru jedna se středem v počátku lze popsat následujícími způsoby:

1. $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$
2. $x = \cos 2t,\ y = \sin 2t,\ t \in [0, \pi]$
3. $x = \cos t^2,\ y = \sin t^2,\ t \in [0, \sqrt{2\pi}]$





Křivkový integrál prvního druhu

Křivkový integrál 1. druhu

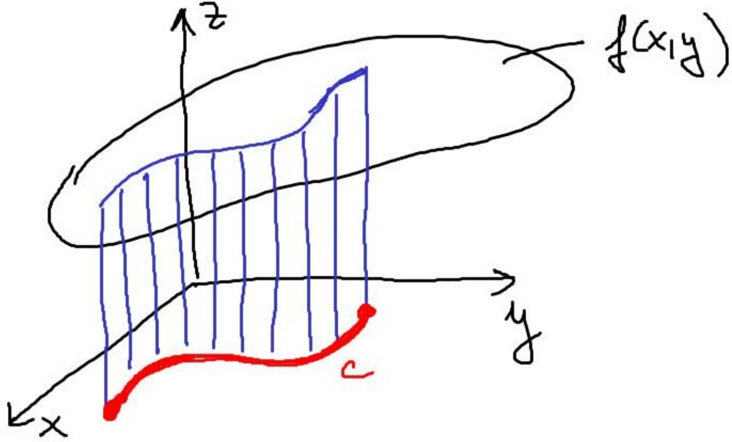
Nechť c je po částech hladká křivka daná parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$. Integrál 1. druhu funkce $f(x, y)$ podél křivky c je

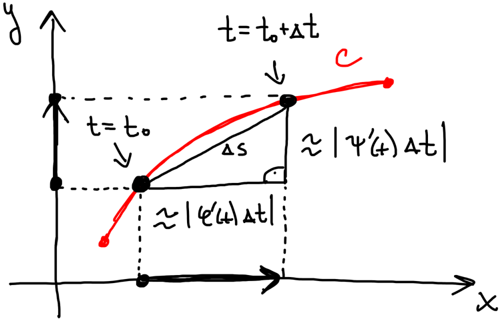
$$\int_c f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f((\varphi(t), \psi(t)))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\mathrm{d}t$$

Poznámka

- Křivka c je hladká, jestliže sama sebe neprotíná, derivace funcí $\varphi(t),\ \ \psi(t)$ existují spojité a nejsou obě nulové. Křivka je po částech hladká, jestliže je hladká až na konečný počet bodů.
- Pro integrál po uzavřené křivce (počáteční a koncový bod křivky c splývají), používáme někdy značení $\oint_c f(x, y)\mathrm{d}s$.
- Pro různé parametrizace stejné křivky má integrál stejnou hodnotu.
- U integrálu prvního druhu nezáleží na orientaci křivky c.

Geometrické vyjádření





$x = \varphi(t)$

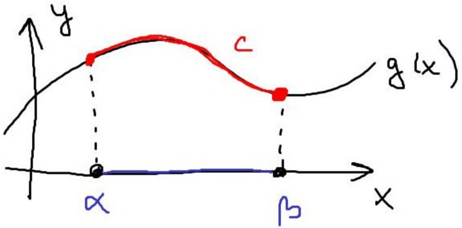
$y = \psi(t)$

$$(\Delta s)^2 \approx (\varphi'(t)\cdot \Delta t)^2 + (\psi'(t)\cdot \Delta t)^2$$

$$(\Delta s)^2 \approx \left[(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2\right]\cdot(\Delta t)^2$$

$$\underbrace{\Delta s}_{ds} \approx \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\;\underbrace{\Delta t}_{dt}$$

Křivka jako funkce jedné proměnné



$$x = t$$
$$y = g(t)$$

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x, g(x)) \cdot \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx$$

Vlastnosti křivkového integrálu 1. druhu

Věta (Linearita – homogenita a aditivita)

Nechť f, f_1, f_2 *jsou funkce,* $k \in \mathbb{R}$, c *křivka. Pak*

$$\int\limits_c kf(x,y)\mathrm{d}s = k\int\limits_c f(x,y)\mathrm{d}s,$$

$$\int\limits_c \left[f_1(x,y) + f_2(x,y)\right]\mathrm{d}s = \int\limits_c f_1(x,y)\mathrm{d}s + \int\limits_c f_2(x,y)\mathrm{d}s.$$

Věta (Aditivita vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť je křivka c *rozdělena na konečný počet disjunktních (až na krajní body) křivek* $c_1, c_2, \dots, c_n$. *Pak platí*

$$\int\limits_c f(x,y)\mathrm{d}s = \int\limits_{c_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int\limits_{c_2} f(x,y)\mathrm{d}s + \dots + \int\limits_{c_n} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

Aplikace křivkového integrálu 1. druhu

- **Obsah části válcové plochy nad křivkou** c (od roviny xy k ploše $z = f(x, y)$):

$$\int_c f(x, y)\mathrm{d}s.$$

- **Délka křivky** c:

$$\int_c 1\mathrm{d}s.$$

- **Hmotnost křivky** c:

$$m_c = \int_c \tau(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

  kde $\tau(x, y)$ je lineární hustota křivky v bodě $[x, y]$.

- **Těžiště křivky** c:

$$T = [T_1, T_2], \quad \text{kde} \quad T_1 = \frac{\int_c x\tau(x, y)\mathrm{d}s}{m_c},\ T_2 = \frac{\int_c y\tau(x, y)\mathrm{d}s}{m_c}.$$