

1	2	3	4	5	6	7	$\Sigma$

JMÉNO: .....

DATUM: .....

## 1. [6 b.]

Najděte obecné řešení rovnice

$$y' + 2y = e^{3x}.$$

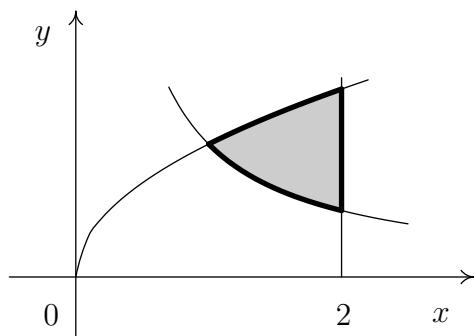
## 2. [6 b.] Najděte stacionární body autonomního systému a určete jejich typ:

$$x' = x^2 + x - y$$

$$y' = 2x - y$$

3. [8 b.] Je zadán integrál  $\iint_{\Omega} 2xy \, dx \, dy$ , kde  $\Omega$  je množina v rovině  $xy$  ohraničená křivkami

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 2, \quad \text{viz obrázek:}$$



(a) Integrál vyjádřete jako dvojnásobný pro obě pořadí integrace.

(b) Jedno pořadí integrace si vyberte a integrál vypočítejte.

## 4. [5 b.] Integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy,$$

kde  $\Omega$  je množina určená nerovnostmi:

$$x^2 + y^2 \geq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 3, \quad y \leq 0,$$

vyjádřete jako dvojnásobný v polárních souřadnicích. Integrál nepočítejte!

## 5. [8 b.] Ověřte, že křivkový integrál

$$\int_c (2xy - y) \, dx + (x^2 - x) \, dy,$$

kde  $c$  je orientovaná křivka s počátečním bodem  $[0, 0]$  a koncovým bodem  $[1, 1]$  nezávisí na integrační cestě. Poté integrál libovolným způsobem vypočítejte.

## 6. [11 b.]

(a) Jistý druh stromu roste rychlostí, která je přímo úměrná současné výšce stromu a rozdílu výšky stromu v dospělosti a současné výšce.

- Napište diferenciální rovnici, která popisuje růst tohoto stromu.
- Rovnici neřešte, ale rozhodněte, zda se jedná o rovnici se separovanými proměnnými nebo o lineární rovnici.

(b) Napište definici pojmů stacionární bod *stabilní ohnisko* a *nestabilní ohnisko* u autonomního systému a nakreslete jak mohou v obou případech vypadat trajektorie v okolí těchto bodů.(c) Nechť  $\Omega$  je jednoduše souvislá oblast a její hranice  $\partial\Omega$  je kladně orientovaná, po částech hladká křivka. Napište vztah z Greenovy věty pro převod křivkového integrálu

$$\int_{\partial\Omega} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$$

na dvojný integrál na množině  $\Omega$ .

## 7. [6 b.] Najděte minimální kostru v grafu na druhé straně písemky.

Graf k příkladu 7:

