Aplikace dvojného integrálu

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Objem tělesa a obsah plochy

- **Objem přímého válce**:
  Nechť $z = f(x, y) \geq 0$ je spojitá na uzavřené oblasti Ω. Pak objem V přímého válce s podstavou Ω v rovině xy shora seříznutého plochou $z = f(x, y)$ je dán vzorcem:

$$V = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

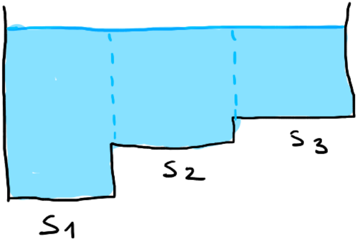
- **Obsah rovinného obrazce**:
  Nechť Ω je uzavřená oblast v rovině. Obsah S množiny Ω je číselně roven objemu přímého válce nad touto množinou, jehož výška je rovna jedné. Tedy

$$S = \iint\limits_{\Omega} 1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Objem vody v nádrži

- Objem vody v nádrži se svislými stěnami a konstantní hloubkou je
$$V = Sh,$$
kde S je obsah dna a h je hloubka.

- Pokud není hloubka všude stejná, ale máme konečný počet různých konstantních hloubek, pak sečteme jednotlivé dílčí objemy, tj., například pro tři různé hloubky h_1, h_2, h_3 a jim odpovídající obsahy dna S_1, S_2, S_3 máme
$$V = S_1h_1 + S_2h_2 + S_3h_3.$$



- Pokud hloubka není konstantní ani po částech, ale mění se spojitě (šikmá plocha, dno jezera), pak je celkový objem dán součtem nekonečně mnoha příspěvků tvaru

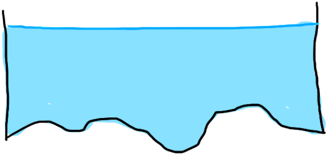
$$\Delta V = h\Delta S,$$

kde ΔS je malý kousek obsahu hladiny (blížící se nule) odpovídající hloubce h.

Jestliže proměnlivou hloubku vyjádříme jako funkci dvou proměnných $h = h(x, y)$, pak uvedený součet nekonečně mnoha příspěvků vyjádříme jako dvojný integrál

$$V = \iint\limits_{\Omega} h \,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Omega} h(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina Ω, přes kterou integrujeme, je dvourozměrná množina ve tvaru hladiny vodní nádrže.



Hmotnost a těžiště rovinné množiny

- **Hmotnost rovinné množiny** Ω:

$$m = \iint_{\Omega} \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\rho(x,y)$ je hustota množiny v bodě (x,y).

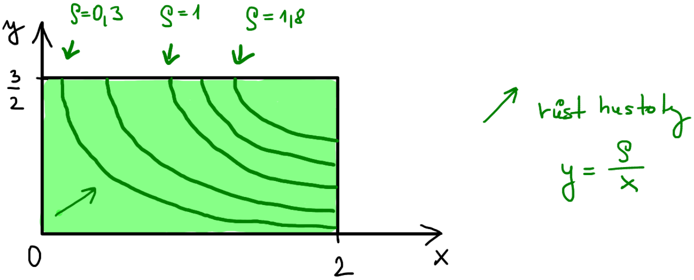
- **Těžiště** $T = (T_x, T_y)$ **rovinné množiny** Ω**:**

$$T_x = \frac{\iint_{\Omega} x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m}, \quad T_y = \frac{\iint_{\Omega} y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{m}.$$

Je-li hustota konstantní a S je obsah množiny, pak

$$T_x = \frac{\iint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S}, \quad T_y = \frac{\iint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S}.$$

Určete hmotnost a těžiště obdélníkové desky $M : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{3}{2}$, která má v každém bodě $[x, y]$ plošnou hustotu $\rho(x, y) = xy$.



Hmotnost:

$$m = \iint_M \rho(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M xy\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x\, \mathrm{d}x \int_0^{\frac{3}{2}} y\, \mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}} = (2 - 0) \cdot \left(\frac{9}{8} - 0\right) = \frac{9}{4}.$$

Těžiště:

$$\iint\limits_M x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{3}{2}} y\,\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{8}{3} - 0\right) \cdot \left(\frac{9}{8} - 0\right) = \frac{9}{3}.$$

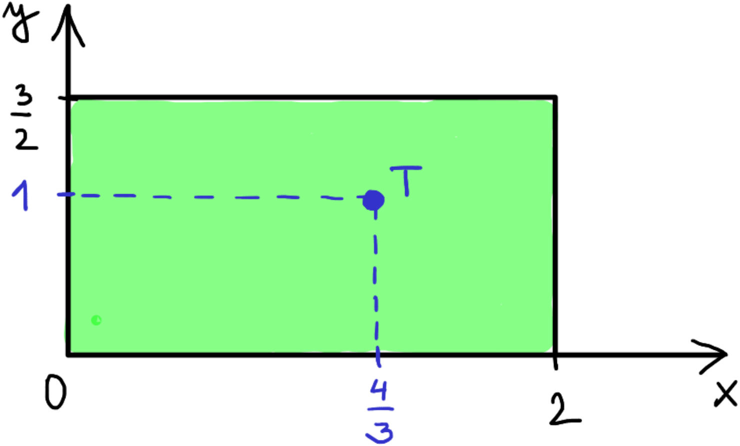
$$\iint\limits_M y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_M xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{3}{2}} y^2\,\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}} = (2-0) \cdot \left(\frac{27}{24} - 0\right) = \frac{9}{4}.$$

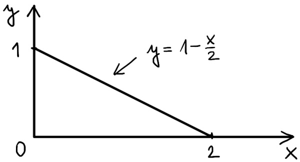
Souřadnice těžiště:

$$T_x = \frac{\frac{9}{3}}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{3}, \quad T_y = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}} = 1.$$

Těžiště je v bodě $T = \left[\frac{4}{3}, 1\right]$.


y
3/2
1
T
0
4/3
2
x

Určete těžiště trojúhelníka s vrcholy $[0,0]$, $[0,1]$, $[2,0]$. Předpokládáme konstantní hustotu.



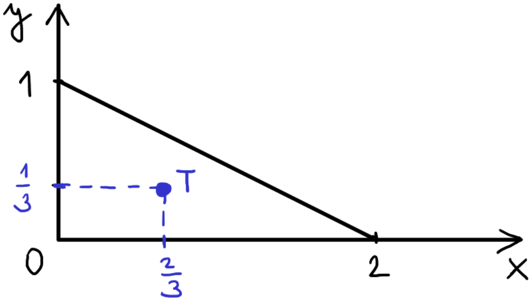
$$\iint_M x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\int_0^{1-\frac{x}{2}} x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^2 [xy]_0^{1-\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x = \int_0^2 x \left(1 - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\iint_M y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\int_0^{1-\frac{x}{2}} y \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24}\right]_0^2 = \left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Obsah trojúhelníka je $S = 1$. Těžiště je tedy v bodě $T = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$.



Tlaková síla působící na přehradu

- Tlaková síla působící na plochu o obsahu S je
$$F = pS,$$
kde p je tlak.
- Uvažujme svislou plochu pod vodní hladinou (přehrada, stěna akvária) a tlakovou sílu působící na tuto plochu. Tlak pod vodní hladinou není konstantní, ale mění se s hloubkou. V dané hloubce h lze tlak vyjádřit vztahem
$$p = h\rho g,$$
kde ρ je hustota vody a g je tíhové zrychlení. Na malou plošku stěny o obsahu ΔS v hloubce h působí tedy síla
$$\Delta F = h\rho g \Delta S.$$

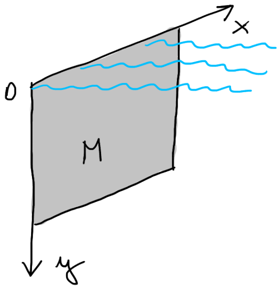
- Pokud si nakreslíme uvažovanou stěnu v rovině xy tak, že y vyjadřuje vzdálenost od hladiny, tj. hloubku, pak

$$\Delta F = y\rho g \Delta S.$$

- Celková síla F na působící na stěnu je součet všech sil působící na všechny plošky stěny, tedy

$$F = \iint_M y\rho g \,\mathrm{d}S = \rho g \iint_M y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je uvažovaná svislá stěna.



- Výpočet tlakové síly pomocí jejího těžiště:

  Síla působící na stěnu je

$$F = \rho g \iint\limits_{M} y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

  Zároveň y-ová souřadnice těžiště stěny je

$$T_y = \frac{1}{S} \iint\limits_{M} y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

  Porovnáním obou vztahů dostaneme

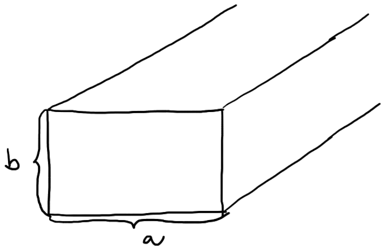
$$F = T_y \rho g S.$$

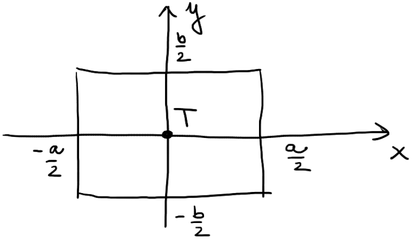
  Označíme-li $p_T = T_y \rho g$ tlak v hloubce těžiště, pak

$$F = p_T S.$$

Tuhost nosníku

Uvažujme nosník obdélníkového průřezu o rozměrech a a b, viz obrázek.





Tuhost nosníku (odolnost vůči deformaci) je dána kvadratickým momentem vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm, tj.

$$I_x = \iint\limits_M y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde M je uvažovaný obdélník.

Výpočtem dostaneme

$$
\begin{aligned}
I_x &= \iint_M y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,\mathrm{d}y = [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\
&= \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b^3}{24}+\frac{b^3}{24}\right) = \frac{ab^3}{12}.
\end{aligned}
$$

Pokud šířka nosníku vzroste 2 krát, pak tuhost vroste také 2 krát. Pokud výška nosníku vzroste 2 krát, pak tuhost vroste 8 krát. Pokud máme nosník o čtvercovém průřezu, pak tuhost roste se čtvrtou mocninou délky strany.