Model dravce a kořisti

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Lotkův-Volterrův model

Označme x velikost populace kořisti a y velikost populace dravce. Nejjednodušší model dravce a kořisti lze popsat soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= \quad ax - cxy \\ y' &= -\alpha y + \gamma xy. \end{aligned}$$

Jedná se o autonomní systém. Předpokládáme, že všechny konstanty a, c, α, γ jsou kladné.

- Model předpokládá exponenciální růst kořisti při neexistenci dravce, tj. pokud by žádný dravec nelovil kořist, růst kořisti by byl popsán lineární rovnicí $x' = ax$. Člen cxy v první rovnici vyjadřuje rychlost úbytku kořisti způsobeného útokem dravce.

- Podobně, pokud by dravec neměl k dispozici kořist, neměl by potravu a jeho vymírání by bylo dáno lineární rovnicí $y' = -\alpha y$. Člen γxy ve druhé rovnici vyjadřuje rychlost přírustku dravce způsobeného tím, že loví kořist.

Vyšetříme stacionární body systému

$$\begin{aligned} x' &= \quad ax - cxy \\ y' &= -\alpha y + \gamma xy. \end{aligned}$$

Hledáme tedy řešení soustavy

$$\begin{aligned} x(a - cy) &= 0 \\ y(-\alpha + \gamma x) &= 0, \end{aligned}$$

odkud získáme stacionární body $[0, 0]$ a $[\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{a}{c}]$.

Jakobiho matice je

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - cy & -cx \\ \gamma y & -\alpha + \gamma x \end{pmatrix}.$$

1.

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty jsou $\lambda_1 = a > 0$ a $\lambda_2 = -\alpha < 0$. Bod $[0,0]$ je tedy stacionární bod typu **sedlo**. Jedná se o stav, kdy populace dravce i kořisti vymřely.

2.

$$J(\alpha/\gamma, a/c) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{a\gamma}{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

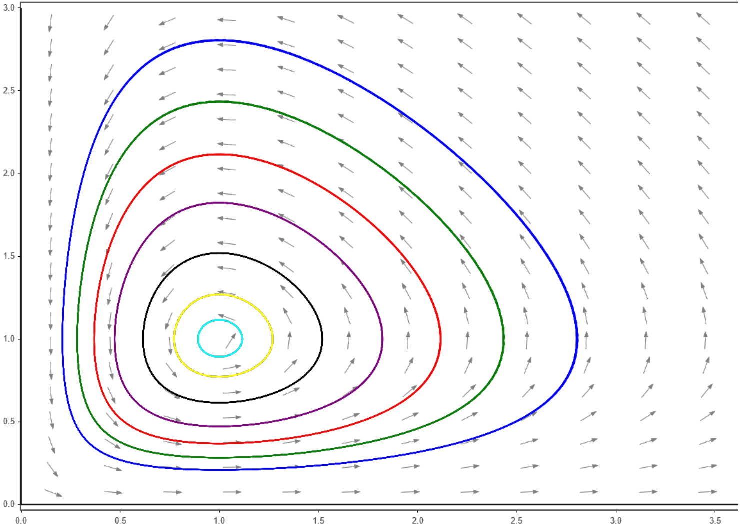
Výpočet vlastních hodnot:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{a\gamma}{c} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha a = 0,$$

tedy $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha a}$ a bod $[\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{a}{c}]$ je stacionární bod ohnisko nebo bod rotace. Dá se ukázat, že je to **střed**.

Konkrétní příklad pro $a = 1$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, tj. systém

$$\begin{aligned} x' &= \quad x - xy \\ y' &= -y + xy. \end{aligned}$$



Pohyb po uzavřené trajektorii znamená, že nějakou dobu je víc dravce a méně kořisti, pak zase méně dravce a více kořisti a tak se to stále opakuje.

1. Maximum kořisti znamená, že dravec má potravu a tedy populace dravce roste ke svému maximu.
2. Maximum dravce, který loví kořist, způsobí pokles populace kořisti na její minimum.
3. Minimum kořisti znamená, že dravec nemá potravu a tedy populace dravce poklesne na své minimum.
4. Minimum dravce způsobí, že kořist začne růst ke svému maximu.

Nevýhodou tohoto modelu je fakt, že pokud dojde vlivem nějaké náhodné změny k vychýlení stavu populace z dané trajektorie, dojde k přesunu na jinou uzavřenou trajektorii a tato změna je trvalá (do doby, než nastane jiná náhodná změna a tedy opět přesun na jinou trajektorii). To je poněkud nerealistické.

Model s logistickým růstem kořisti

Označme x velikost populace kořisti a y velikost populace dravce. Uvažujme autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - cxy \\ y' &= -\alpha y + \gamma xy. \end{aligned}$$

- Model předpokládá logistický růst kořisti při neexistenci dravce, tj. pokud by žádný dravec nelovil kořist, růst kořisti by byl popsán logistickou rovnicí $x' = ax(1 - \frac{x}{K})$.
- Předpokládáme, že velikost populace kořisti K zajistí přežití dravce, tedy $\gamma K - \alpha > 0$.

Vyšetříme stacionární body systému

$$\begin{aligned} x' &= ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - cxy \\ y' &= -\alpha y + \gamma xy. \end{aligned}$$

Hledáme tedy řešení soustavy

$$\begin{aligned} x\left(a - \frac{a}{K}x - cy\right) &= 0 \\ y(-\alpha + \gamma x) &= 0, \end{aligned}$$

odkud získáme stacionární body $[0,0]$, $[K,0]$ a $[\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{a}{c}(1 - \frac{\alpha}{\gamma K})]$.

Jakobiho matice je

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} a - \frac{2a}{K}x - cy & -cx \\ \gamma y & -\alpha + \gamma x \end{pmatrix}.$$

1.

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty jsou $\lambda_1 = a > 0$ a $\lambda_2 = -\alpha < 0$. Bod $[0,0]$ je tedy stacionární bod typu **sedlo**. Jedná se o stav, kdy populace dravce i kořisti vymřely.

2.

$$J(K,0) = \begin{pmatrix} -a & -cK \\ 0 & -\alpha + \gamma K \end{pmatrix}.$$

Výpočet vlastních hodnot:

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & -cK \\ 0 & -\alpha + \gamma K - \lambda \end{vmatrix} = (-a-\lambda)(-\alpha + \gamma K - \lambda) = 0,$$

tedy $\lambda_1 = -a < 0$ a $\lambda_2 = -\alpha + \gamma K > 0$. Bod $[K,0]$ je stacionární bod **sedlo**. Jedná se o stav, kdy dravec vymřel a populace kořisti se ustálila na nosné kapacitě prostředí K.

3.

$$J\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{a}{c}\left(1-\frac{\alpha}{\gamma K}\right)\right) = \begin{pmatrix} -\frac{a\alpha}{\gamma K} & -\frac{c\alpha}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{c} - \frac{a\alpha}{cK} & 0 \end{pmatrix}.$$

Výpočet vlastních hodnot:

$$\begin{vmatrix} -\frac{a\alpha}{\gamma K} - \lambda & -\frac{c\alpha}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{c} - \frac{a\alpha}{cK} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{a\alpha}{\gamma K}\lambda + a\alpha\left(1-\frac{\alpha}{\gamma K}\right) = 0,$$

tedy

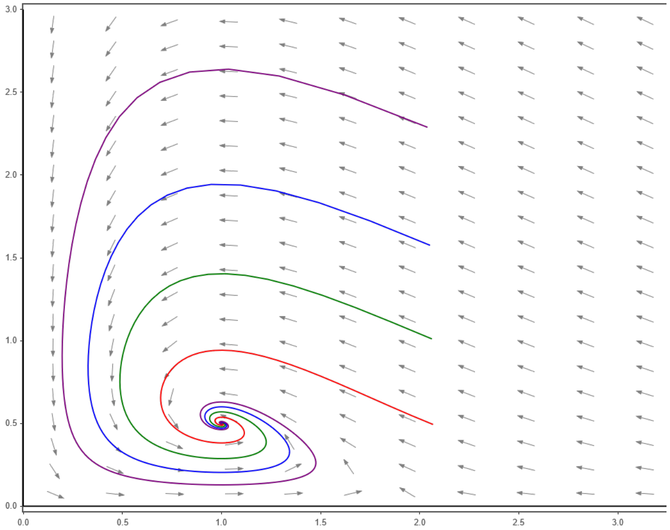
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{a\alpha}{\gamma K} \pm \sqrt{\left(\frac{a\alpha}{\gamma K}\right)^2 - 4a\alpha\left(1-\frac{\alpha}{\gamma K}\right)}}{2}.$$

Vlastní hodnoty jsou buď obě reálné záporné nebo komplexní se zápornou reálnou částí. Jedná se tedy buď o **stabilní uzel** nebo **stabilní ohnisko**.

Stabilní bod znamená, že populace dravce a kořisti se ustálí na konstantních hodnotách a při náhodné změně, která způsobí vychýlení z tohoto rovnovážného stavu, se po určité době vrátí do tohoto rovnovážného stavu zpět.

Konkrétní příklad pro $a = 1$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $K = 2$, tj. systém

$$x' = x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$y' = -y + xy.$$



Ještě jeden model

Označme x velikost populace kořisti a y velikost populace dravce. Uvažujme autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{cx}{p+x}y \\ y' &= -\alpha y + \frac{\gamma x}{p+x}y. \end{aligned}$$

- Jedná se o model s logistickým růstem kořisti, ale na rozdíl od předchozího modelu dravec neloví kořist tak moc, což je vyjádřeno ohraničenou funkcí $\frac{x}{p+x}$ v obou rovnicích.
- Předpokládáme, že velikost populace kořisti K zajistí přežití dravce, tedy $\frac{\gamma K}{p+K} > \alpha$.

Při vyšetřování stacionárních bodů systému hledáme řešení soustavy

$$x\left(a-\frac{a}{K}x-\frac{c}{p+x}y\right)=0$$
$$y\left(-\alpha+\frac{\gamma x}{p+x}\right)=0,$$

odkud získáme stacionární body $[0,0]$, $[K,0]$ a $[x^*,y^*]$, kde

$$x^*=\frac{\alpha p}{\gamma-\alpha},\ y^*=\left(a-\frac{\alpha a p}{k(\gamma-\alpha)}\right)\left(\frac{p}{c}+\frac{\alpha p}{c(\gamma-\alpha)}\right).$$

Body $[0,0]$, $[K,0]$ vyjadřují stejně jako v předchozím modelu vyhynutí obou populací nebo populace dravce. Zajímá je tedy hlavně bod $[x^*,y^*]$. Dá se ukázat následující:

- Pokud $x^*>\frac{K-p}{2}$, je $[x^*,y^*]$ stabilní stacionární bod.
- Pokud $x^*<\frac{K-p}{2}$, je $[x^*,y^*]$ nestabilní stacionární bod, ale existuje jediný cyklus, ke kterému všechny trajektorie konvergují. Na rozdíl od klasického Lotkova-Volterrova modelu se tedy systém při vychýlení z rovnováhy po čase zase vrátí zpět na stejnou trajektorii.