Aplikace diferenciálních rovnic

Základy vyšší matematiky (ZMTL)

LDF MENDELU

Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte diferenciální rovnici popisující tento proces a vyřešte ji, tj. zjistěte, jaká funkce popisuje proces zvětšování poloměru olejové skvrny v čase.

Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte diferenciální rovnici popisující tento proces a vyřešte ji, tj. zjistěte, jaká funkce popisuje proces zvětšování poloměru olejové skvrny v čase.

Označme:

$$t \dots \text{ čas}$$
$$r = r(t) \dots \text{ poloměr skvrny}$$

Čas můžeme měřit v hodinách, poloměr v metrech. Rychlost růstu poloměru r je vyjádřena derivací $r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, kterou měříme v metrech za hodinu.
Podle zadání je derivace r' je nepřímo úměrná funkci r^2. Nepřímá úměrnost znamená, že existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$r' = k\frac{1}{r^2}.$$

Řešení rovnice

$$r' = k\frac{1}{r^2}$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= k\frac{1}{r^2}\\ r^2\,\mathrm{d}r &= k\,\mathrm{d}t\\ \frac{r^3}{3} &= kt + c\\ r^3 &= 3(kt+c)\\ r &= \sqrt[3]{3(kt+c)}\end{aligned}$$

Pro určení hodnot konstant k a c bychom potřebovaly dodatečné informace, například velikost poloměru skvrny v počátečním čase $(t = 0)$ a po hodině $(t = 1)$, tj. podmínky $r(0) = R_0$, $r(1) = R_1$.

Samočištění jezera

V jezeře je počáteční množství nečistot. Do jezera teče konstantní rychlostí čistá voda, mísí se se znečištěnou a odtéká. Předpokládáme, že voda v jezeře je dobře promíchávána a průtok na odtoku je stejný jako na přítoku. Sestavte diferenciální rovnici popisující vývoj nečistot v jezeře v čase. Poté rovnici vyřešte, tj. najděte funkci, která popisuje závislost nečistot na čase.

Samočištění jezera

V jezeře je počáteční množství nečistot. Do jezera teče konstantní rychlostí čistá voda, mísí se se znečištěnou a odtéká. Předpokládáme, že voda v jezeře je dobře promíchávána a průtok na odtoku je stejný jako na přítoku. Sestavte diferenciální rovnici popisující vývoj nečistot v jezeře v čase. Poté rovnici vyřešte, tj. najděte funkci, která popisuje závislost nečistot na čase.

Označme:

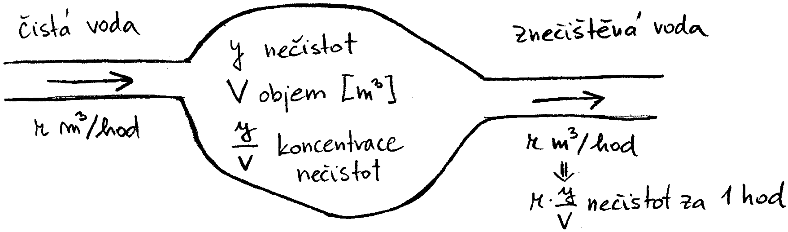
$t \dots$ čas $[\mathrm{hod}]$

$y = y(t) \dots$ množství nečistot v jezeře $[\mathrm{g}]$

$y_0 \dots$ počáteční množství nečistot

$r \dots$ průtok $=$ množství vody, které přiteče/odteče za jednotku času $[\mathrm{m}^3/\mathrm{hod}]$ (je konstantní)

$V \dots$ objem jezera (konstantní) $[\mathrm{m}^3]$



Rychlost úbytku nečistot v jezeře (tj. množství nečistot, které z jezera odtečou za jednotku času) lze vyjádřit jako $-y'$ a zároveň jako $r\frac{y}{V}$. Rovnice popisující vývoj nečistot v čase, společně s počáteční podmínkou, je tedy:

$$\boxed{y' = -\frac{r}{V}y, \quad y(0) = y_0}$$

Rovnice

$$y' = -\frac{r}{V}y, \quad y(0) = y_0$$

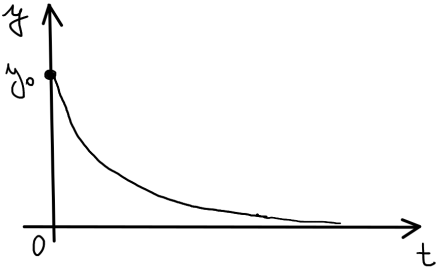
je homogenní lineární rovnice. Její obecné řešení je

$$y = ce^{-\frac{r}{V}t}.$$

Dosadíme počáteční podmínku:

$$y(0) = y_0 : \quad y_0 = ce^0 \Longrightarrow c = y_0.$$

Vývoj nečistot v čase t je tedy určen funkcí $\boxed{y = y_0 e^{-\frac{r}{V}t}}$.



Znečišťování jezera

V jezeře je voda o objemu $1000\,\mathrm{m}^3$. Do jezera přitéká a odtéká voda stejnou konstantní rychlostí - průtok je $2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{hod}$. Voda v jezeře je na počátku čistá, začne však přitékat znečištěná voda. Koncentrace nečistot na přítoku je $3\,\mathrm{mg}/\mathrm{m}^3$. Vaším úkolem je zachránit život v jezeře tak, že udržíte koncentraci nečistot v jezeře pod hodnotou $1\,\mathrm{mg}/\mathrm{m}^3$. Kolik máte času na zastavení přísunu nečistot? Předpokládejme, že voda je v jezeře dobře promíchávána.

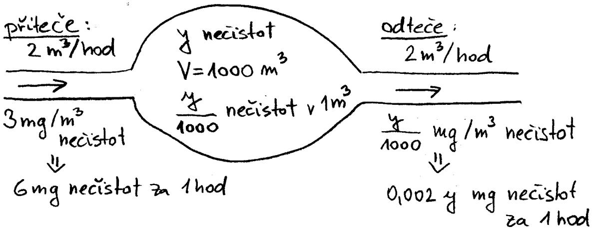
Znečišťování jezera

V jezeře je voda o objemu $1000\,\mathrm{m}^3$. Do jezera přitéká a odtéká voda stejnou konstantní rychlostí - průtok je $2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{hod}$. Voda v jezeře je na počátku čistá, začne však přitékat znečištěná voda. Koncentrace nečistot na přítoku je $3\,\mathrm{mg}/\mathrm{m}^3$. Vaším úkolem je zachránit život v jezeře tak, že udržíte koncentraci nečistot v jezeře pod hodnotou $1\,\mathrm{mg}/\mathrm{m}^3$. Kolik máte času na zastavení přísunu nečistot? Předpokládejme, že voda je v jezeře dobře promíchávána.

Označme:

$$t \ldots \text{ čas } [\mathrm{hod}]$$

$$y = y(t) \ldots \text{ množství nečistot v jezeře } [\mathrm{mg}]$$



Rychlost změny množství nečistot v jezeře je určena derivací y'. Zároveň je vyjádřena rozdílem nečistot, které do jezera přitečou a z jezera odtečou za jednotku času, tj. $6 - 0,002y$. Rovnice popisující vývoj nečistot v jezeře v čase je tedy, spolu s počáteční podmínkou:

$$\boxed{y' = 6 - 0,002y, \quad y(0) = 0}$$

Rovnici můžeme řešit buď jako lineární nebo se separovanými proměnnými. Můžeme si všimnout, že konstantní řešení $y = 3000\,\mathrm{mg}$ odpovídá koncentraci nečistot v jezeře shodné s koncentrací na přítoku, popisuje tedy rovnovážný stav, který po nějakém čase nastane, pokud nečistoty budou stále přitékat. Toto řešení nás nezajímá, řešíme separací proměnných.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6 - 0,002y}\,\mathrm{d}y &= \mathrm{d}t \\
\frac{-0,002}{6 - 0,002y}\,\mathrm{d}y &= -0,002\,\mathrm{d}t \\
\ln(6 - 0,002y) &= -0,002t + c
\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky $y(0) = 0$ dostaneme $c = \ln 6$.

Zbývá zjistit, v jakém čase t dosáhne koncentrace nečistot v jezeře hodnoty $1\,\mathrm{mg/m^3}$. Koncentrace je dána podílem $\frac{y}{1000}$, tedy množství nečistot odpovídající koncentraci $1\,\mathrm{mg/m^3}$ je $y = 1000\,\mathrm{mg}$. Do vztahu

$$\ln(6 - 0,002y) = -0,002t + \ln 6$$

dosadíme tedy $y = 1000$ a vypočteme odpovídající t:

$$\begin{aligned} \ln 4 &= -0,002t + \ln 6 \\ t &= \frac{\ln 6 - \ln 4}{0,002} = 500 \ln(3/2) \approx 202 \end{aligned}$$

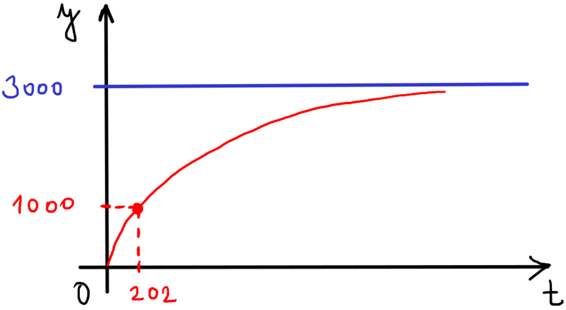
Přísun nečistot je potřeba zastavit do 202 hodin, tj. do 8 dní 10 hodin.

Pokud nás zajímá explicitní vyjádření vývoje nečistot v čase, můžeme vyjádřit y ze vztahu

$$\ln(6 - 0,002y) = -0,002t + \ln 6$$

takto:

$$\begin{aligned} 6 - 0,002y &= e^{-0,002t + \ln 6} = e^{-0,002t} e^{\ln 6} = 6e^{-0,002t} \\ -0,002y &= -6 + 6e^{-0,002t} \\ y &= 3000(1 - e^{-0,002t}). \end{aligned}$$



Populace jelenů

Populace jelenů v národním parku přibývá rychlostí $10\,\%$ za rok. Správa parku každý rok odebere 50 jedinců. Napište diferenciální rovnici, která popisuje vývoj populace jelenů v parku.

Populace jelenů

Populace jelenů v národním parku přibývá rychlostí $10\,\%$ za rok. Správa parku každý rok odebere 50 jedinců. Napište diferenciální rovnici, která popisuje vývoj populace jelenů v parku.

Označme:

$$
\begin{aligned}
&t \ldots \text{ čas} \\
&y = y(t) \ldots \text{ množství jedinců}
\end{aligned}
$$

Vývoj populace je popsán rovnicí:

$$y' = 0,1y - 50.$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, která je zároveň lineární.

Rovnici

$$y' = 0,1y - 50$$

můžeme vyřešit např. pomocí integračního faktoru, který je $e^{-0,1t}$.

$$\begin{aligned}
y'e^{-0,1t} - 0,1ye^{-0,1t} &= -50e^{-0,1t} \\
\left(ye^{-0,1t}\right)' &= -50e^{-0,1t} \\
ye^{-0,1t} &= -50 \int e^{-0,1t}\,\mathrm{d}t + c \\
ye^{-0,1t} &= 500e^{-0,1t} + c \\
y &= 500 + ce^{0,1t}
\end{aligned}$$

Je-li y_0 počáteční stav populace, tj. $y(0) = y_0$, pak $y_0 = 500 + c$, tj. $c = y_0 - 500$ a dostaneme

$$y = 500 + (y_0 - 500)e^{0,1t}.$$

Chladnutí polévky

V kuchyni je teplota $20\,^\circ\mathrm{C}$. Za jak dlouho se právě vypnutá vroucí polévka ochladí na $25\,^\circ\mathrm{C}$, pokud po 10 minutách má teplotu $60\,^\circ\mathrm{C}$?
Návod: Podle Newtonova zákona je rychlost ochlazování tělesa na vzduchu přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a vzduchu.

Chladnutí polévky

V kuchyni je teplota $20\,^\circ\mathrm{C}$. Za jak dlouho se právě vypnutá vroucí polévka ochladí na $25\,^\circ\mathrm{C}$, pokud po 10 minutách má teplotu $60\,^\circ\mathrm{C}$?
Návod: Podle Newtonova zákona je rychlost ochlazování tělesa na vzduchu přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a vzduchu.

Označme:

$$t \ldots \text{ čas } [\mathrm{min}]$$
$$T = T(t) \ldots \text{ teplota polévky } [^\circ\mathrm{C}]$$

Rychlost ochlazování polévky vyjádříme jako $-T' = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. Podle Newtonova zákona je tedy $-T'$ přímo úměrná rozdílu $T - 20$. Přímá úměrnost znamená, že existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$-T' = k(T - 20).$$

Zároveň platí podmínky $T(0) = 100$ a $T(10) = 60$.
Je potřeba najít řešení rovnice, které splňuje tyto podmínky a pak zjistit, pro jaké t je $T = 25$.

Řešení rovnice

$$T' = -k(T-20), \quad T(0) = 100, \quad T(10) = 60$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. Všimněme si, že konstantní řešení $T = 20$ znamená, že polévka vychladla na pokojovou teplotu. Tato situace nás nezajímá, řešíme tedy separací proměnných.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -k(T-20)\\ \frac{1}{T-20}\,\mathrm{d}T &= -k\,\mathrm{d}t\\ \ln(T-20) &= -kt + c\end{aligned}$$

Dosazení podmínek:

$$\begin{aligned}T(0) = 100: &\quad \ln 80 = c\\ T(10) = 60: &\quad \ln 40 = -10k + \ln 80 \Rightarrow k = \frac{\ln 80 - \ln 40}{10} = \frac{\ln 2}{10}\end{aligned}$$

Řešení rovnice lze tedy vyjádřit vztahem

$$\ln(T-20) = -\frac{\ln 2}{10}t + \ln 80.$$

Zbývá zjistit, pro jaké t je $T = 25$. Dosadíme $T = 25$ do rovnice

$$\ln(T - 20) = -\frac{\ln 2}{10}t + \ln 80$$

a dostáváme

$$\begin{aligned}
\ln 5 &= -\frac{\ln 2}{10}t + \ln 80 \\
\frac{\ln 2}{10}t &= \ln 80 - \ln 5 \\
\frac{\ln 2}{10}t &= \ln \frac{80}{5} \\
\frac{\ln 2}{10}t &= \ln 16 \\
t &= 10\frac{\ln 16}{\ln 2} = 10\frac{4\ln 2}{\ln 2} = 40
\end{aligned}$$

Polévka se ochladí na $25\,^\circ\mathrm{C}$ za 40 minut.

Závěrečná poznámka: Ze vztahu

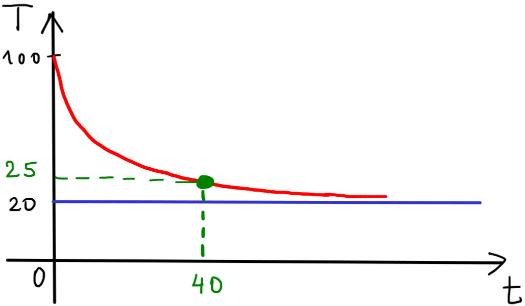
$$\ln(T-20) = -\frac{\ln 2}{10}t + \ln 80$$

můžeme vyjádřit explicitně teplotu polévky v závislosti na čase. Výraz $T-20$ (vnitřek logaritmu) vyjádříme pomocí exponenciální funkce pravé strany (plyne z vlastností inverzních funkcí)

$$T - 20 = e^{-\frac{\ln 2}{10}t + \ln 80},$$

tj.

$$T = 20 + e^{-\frac{\ln 2}{10}t+\ln 80} = 20 + e^{-\frac{\ln 2}{10}t} \cdot e^{\ln 80} = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{10}t}.$$



Zastřelený divočák

Polesný má podezření, že pytláci zastřelili divočáka a chce zjistit čas jeho smrti. Teplota divočáka při jeho nalezení byla $30\,^{\circ}\mathrm{C}$, po hodině $25\,^{\circ}\mathrm{C}$, přičemž teplota živého divočáka je $37\,^{\circ}\mathrm{C}$.

1. Určete čas zastřelení divočáka v případě, že teplota vzduchu byla celou dobu $0\,^{\circ}\mathrm{C}$.
2. Sestavte diferenciální rovnici popisující chladnutí divočáka v případě, že teplota vzduchu klesala spojitě o $1\,^{\circ}\mathrm{C}$ za každou hodinu, přičemž v okamžiku nalezení byla $0\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Zastřelený divočák

Polesný má podezření, že pytláci zastřelili divočáka a chce zjistit čas jeho smrti. Teplota divočáka při jeho nalezení byla $30\,^\circ\mathrm{C}$, po hodině $25\,^\circ\mathrm{C}$, přičemž teplota živého divočáka je $37\,^\circ\mathrm{C}$.

1. Určete čas zastřelení divočáka v případě, že teplota vzduchu byla celou dobu $0\,^\circ\mathrm{C}$.
2. Sestavte diferenciální rovnici popisující chladnutí divočáka v případě, že teplota vzduchu klesala spojitě o $1\,^\circ\mathrm{C}$ za každou hodinu, přičemž v okamžiku nalezení byla $0\,^\circ\mathrm{C}$.

Označme:

$$t \ldots \text{ čas } [\mathrm{hod}]$$

$$t = 0 \ldots \text{ čas nalezení divočáka}$$

$$T = T(t) \ldots \text{ teplota divočáka } [^\circ\mathrm{C}]$$

$$T_v = T_v(t) \ldots \text{ teplota vzduchu } [^\circ\mathrm{C}]$$

Rychlost klesání teploty divočáka vyjádříme jako $-T' = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$. Podle Newtonova zákona ochlazování je $-T'$ přímo úměrná rozdílu $T - T_v$, tj. existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$, že platí $-T' = k(T - T_v)$.

ad 1) $T_v = 0$ a řešíme tedy úlohu

$$T' = -kT, \quad T(0) = 30, \quad T(1) = 25.$$

Jedná se o lineární homogenní rovnici, jejímž obecným řešením je $T = ce^{-kt}$. Dosazení podmínek:

$$\begin{aligned} T(0) = 30: &\quad 30 = c \\ T(1) = 25: &\quad 25 = ce^{-k} \quad \Rightarrow \quad e^k = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad k = \ln\left(\frac{6}{5}\right) \end{aligned}$$

Ze vztahu $T = ce^{-kt}$ vyjádříme čas

$$-kt = \ln\left(\frac{T}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T}{c}\right)$$

a dosadíme vypočtené c, k a $T = 37$:

$$t = -\frac{\ln\frac{37}{30}}{\ln\frac{6}{5}} \approx -1,15.$$

Divočák byl zastřelený přibližně před $1,15$ hod (tj. před $1\,\mathrm{hod}\;9\,\mathrm{min}$) od jeho nalezení. Teplotu divočáka v závislosti na čase lze vyjádřit vztahem $T = 30\left(\frac{5}{6}\right)^t$.

ad 2) Teplota vzduchu není konstantní a dá se vyjádřit funkcí $T_v = -t$, takže dostaneme rovnici

$$T' = -k(T + t).$$

Řešíme tedy úlohu

$$T' + kT = -kt, \quad T(0) = 30, \quad T(1) = 25.$$

Jedná se o lineární rovnici, kterou můžeme řešit pomocí integračního faktoru e^{kt}.