1 Vektory, matice, determinanty

1.1 Operace s maticemi

1. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, které z následujících součinů lze spočítat a určete rozměry výsledných matic:

$$AB,\ BA,\ AC,\ CA,\ AD,\ DA,\ BC,\ CB,\ BD,\ DB,\ CD,\ DC,\ C^TD,\ B^TD, B^TA.$$

2. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte $(A - 2I)^T \cdot B$, kde I je jednotková matice.

3. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte $(A^T + I) \cdot B$, kde I je jednotková matice.

4. Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Vypočtěte $(A - B)^2$, kde I je jednotková matice.

5. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte A^2.

6. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte $(A^T - I)A$, kde I je jednotková matice.

1.2 Determinanty, inverzní matice, lineární ne/závislost vektorů

1. Je zadaná matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Vypočtěte determinant z matice A.
   (b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
      (i) Jsou řádky matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
      (ii) Je hodnost matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
      (iii) Existuje inverzní matice A^{-1}? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

2. Je zadaná matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a) Vypočtěte determinant z matice A.
   (b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
      (i) Jsou řádky matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
      (ii) Je hodnost matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
      (iii) Existuje inverzní matice A^{-1}? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

3. Je zadaná matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Vypočtěte determinant z matice A.
   (b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
      (i) Jsou sloupce matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
      (ii) Je hodnost matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
      (iii) Existuje inverzní matice A^{-1}? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

4. Je zadaná matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Vypočtěte determinant z matice A.
   (b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
      (i) Jsou řádky matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
      (ii) Je hodnost matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
      (iii) Existuje inverzní matice A^{-1}? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

5. Je zadaná matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
   (a) Vypočtěte determinant $\det A$.

(b) Na základě hodnoty vypočteného determinantu odpovězte na otázky:
   (i) Jsou sloupce matice A lineárně závislé nebo nezávislé vektory?
   (ii) Je hodnost matice $h(A) > 3$, $h(A) < 3$ nebo $h(A) = 3$?
   (iii) Existuje inverzní matice A^{-1}? Pokud ano, najděte tuto inverzní matici.

6. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně závislé nebo nezávislé.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\vec{a} = (1, 2, 1, 0),\ \vec{b} = (1, 2, -1, 1),\ \vec{c} = (0, 1, 2, 1),\ \vec{d} = (1, 1, 0, 1)$

(e) $\vec{a} = (1, 2, 1, 0),\ \vec{b} = (1, 0, -1, 1),\ \vec{c} = (1, 1, 2, 1),\ \vec{d} = (2, 1, 1, 2)$

(f) $\vec{a} = (1, 3, 1, 0),\ \vec{b} = (1, -1, 0, 1),\ \vec{c} = (1, 1, 2, 1),\ \vec{d} = (1, 1, 1, 2)$

2 Soustavy lineárních rovnic

Gaussovou eliminační naděte řešení (pokud existuje) následujících soustav rovnic.

1.

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 - x_3 + 3x_4 &= -9 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= -13 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 11x_4 &= -28 \\ 2x_2 - 3x_3 + 17x_4 &= -43. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -4 \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -7x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 8x_4 &= 4. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 2. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 9x_4 &= 3. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -4 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 4. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -2 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= -2. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= -6. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 1 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$