Příklady: Extrémy funkce dvou proměnných

Lokální extrémy

Najděte body, ve kterých mají následující funkce lokální extrémy:

1. $z = x^2 + (y-1)^2$ — $[(0,1)$-lok. min.$]$
2. $z = x^2 - (y-1)^2$ — $[(0,1)$-není extrém$]$
3. $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$ — $[(1,0)$-lok. min$]$
4. $z = x^3 + y^3 - 6xy$ — $[(2,2)$-lok. min., $(0,0)$-není extrém$]$
5. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ — $[(1,\frac{1}{2})$-lok. min., $(0,0)$-není extrém$]$
6. $z = 2xy - 8x - 4y + 1$ — $[(2,4)$-není extrém$]$
7. $z = 4xy - 16x - 8y + 7$ — $[(2,4)$-není extrém$]$
8. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$ — $[(2,-2)$-lok. max.$]$
9. $z = x^3 - 3xy + y^2 + y - 7$ — $[(1,1)$-lok. min., $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$-není$]$
10. $z = y^4 + 32x^2 - 32xy$ — $[(1,2)$-lok. min., $(-1,-2)$-lok. min., $(0,0)$-není extrém$]$
11. $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y$ — $[(-2,1)$-lok. min.$]$
12. $z = xy - x + y$ — $[(-1,1)$-není extrém$]$
13. $z = x^3 - 6xy + 3y^2$ — $[(2,2)$-lok. min., $(0,0)$-není extrém$]$
14. $z = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$ — $[(0,0)$-max., $(0,2)$-ne, $(1,0)$-ne, $(1,2)$-min., $(-1,0)$-ne, $(-1,2)$-min.$]$
15. $z = y^3 - 6xy + x^2 + 15y - 5$ — $[(3,1)$-není extrém, $(15,5)$-lok. min. $]$
16. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 15$ — $[(0,0)$-není extrém, $(3,3)$-lok. min. $]$
17. $z = x^3 - 3xy + y^2 - 2y$ — $[(2,4)$-lok. min., $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$-není extrém$]$
18. $z = 2x^3 + xy^2 - 5x^2 + y^2$ — $[(\frac{5}{3},0)$-lok. min., $(0,0)$-není extrém$]$
19. $z = x^2 - y^2 - x^2y + 3y + 4$ — $[(0,\frac{3}{2})$-lok. max., $(1,1)$-není $(-1,1)$-není$]$
20. $z = x^3 + xy^2 - 6xy$ — $[(-\sqrt{3},3)$-lok. max., $(\sqrt{3},3)$-lok. min., $(0,0)$-není, $(0,6)$-není$]$
21. $z = y^4 + 8x^2 - 8xy - 1$ — $[(\frac{1}{2},1)$-lok. min., $(-\frac{1}{2},-1)$-lok. min., $(0,0)$-není$]$
22. $z = 4xy - xy^2 - x^2y$ — $[(0,0)$-není, $(0,4)$-není, $(4,0)$-není, $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$-lok. max.$]$
23. $z = x^4 + y^4 - 4xy - 6$ — $[(0,0)$-není, $(1,1)$-lok. min., $(-1,-1)$-lok. min.$]$
24. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ — $[(-2,0)$-lok. min.$]$

Absolutní extrémy

Najděte absolutní extrémy funkce $z = f(x,y)$ na množině M.

1. $z = y - x^2$, M je trojúhelník s vrcholy $A[0,1],\ B[-1,-1],\ C[1,-1]$

   [$z_{\text{min}} = -2$ v bodech $(-1,-1)$ a $(1,-1)$, $z_{\text{max}} = -1$ v bodě $(0,1)$]

2. $z = \sqrt{x^2 - y}$, M je trojúhelník s vrcholy $A[-1,-1],\ B[1,-1],\ C[1,-3]$

   [$z_{\text{min}} = 1$ v bodě $(0,-1)$, $z_{\text{max}} = 2$ v bodě $(1,-3)$]

3. $z = \sqrt{\sqrt{x} - y}$, M je obdélník s vrcholy $A[0,0],\ B[1,1],\ C[0,-3],\ D[1,-3]$

   [$z_{\text{min}} = 0$ v bodě $(0,0)$, $z_{\text{max}} = 2$ v bodě $(1,-3)$]

4. $z = y - x^2$, M je čtverec s vrcholy $A[-1,1],\ B[1,1],\ C[1,3],\ D[-1,3]$

   [$z_{\text{min}} = 0$ v bodech $(-1,1)$ a $(1,1)$, $z_{\text{max}} = 3$ v bodě $(0,3)$]

5. $z = x - 2y - 3$, M je trojúhelník s vrcholy $A[0,0],\ B[1,0],\ C[0,1]$

   [$z_{\text{min}} = -5$ v bodě $(0,1)$, $z_{\text{max}} = -2$ v bodě $(1,0)$]

6. $z = x^2 + y^2,\ M = \left\{[x,y];\ x \leq 2,\ x \geq y^2\right\}$

   [$z_{\text{min}} = 0$ v bodě $(0,0)$, $z_{\text{max}} = 6$ v bodech $(2,-\sqrt{2})$, $(2,\sqrt{2})$]

7. $z = x + 3y$, M je určena nerovnostmi: $-3x + 4y \leq 12$, $x \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

   [$z_{\text{min}} = 0$ v bodě $(0,0)$, $z_{\text{max}} = 22$ v bodě $(4,6)$]

8. $z = -3x + 2y$, M je určena nerovnostmi: $x - 3y \leq 3$, $2x + 3y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

   [$z_{\text{min}} = -16$ v bodě $(6,1)$, $z_{\text{max}} = 10$ v bodě $(0,5)$]

9. $z = 2x + y$, M je určena nerovnostmi: $x - 2y \leq 2$, $-2x + y \leq 0$, $y \geq 0$

   [$z_{\text{min}} = 0$ v bodě $(0,0)$, maximum neexistuje]