# Vlastní čísla a vlastní vektory matice

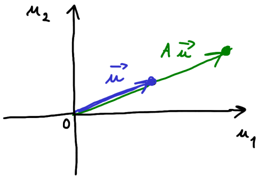
Matematika (MTL)

LDF MENDELU

# Definice

Uvažujme $n$-rozměrný vektor $\vec{u}$. Pokud tento vektor transformujeme tak, že jej zleva vynásobíme čtvercovou maticí $A$ rozměru $n \times n$, dostaneme $A\vec{u}$, což je opět $n$-rozměrný vektor. Matice $A$ tedy reprezentuje zobrazení původního vektoru $\vec{u}$ na vektor $A\vec{u}$ (viz například matice rotace, matice derivování apod.).

Vlastní vektory matice jsou takové vektory, které se při zobrazení pomocí maticového násobení s danou maticí zobrazují na své vlastní násobky, tj. zůstává zachován směr vektoru.




**Definice (Vlastní vektor a vlastní hodnota)**

Nechť $A$ je čtvercová matice. Řekneme, že nenulový vektor $\vec{u}$ je vlastním vektorem matice $A$ příslušným vlastní hodnotě (vlastnímu číslu) $\lambda$, jestliže $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$.

# Výpočet vlastních hodnot a vektorů

Podle definice hledáme hodnoty $\lambda$, pro které platí $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, tj. $A\vec{u} - \lambda\vec{u} = \vec{o}$, kde $\vec{o}$ je nulový vektor. Vytkneme-li vektor $\vec{u}$, dostaneme homogenní soustavu lineárních rovnic

$$(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{o}.$$

Aby tato soustava měla nenulové řešení $\vec{u}$, musí být determinant matice soustavy roven nule. (V opačném případě má soustava pouze jediné řešení, kterým je nulový vektor.) Vlastní hodnoty hledáme tedy řešením rovnice

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Vypočtené vlastní hodnoty poté dosadíme (postupně, každou zvlášť) do soustavy rovnic. Tuto soustavu vyřešíme a najdeme tak vlastní vektory. Každý násobek vlastního vektoru je také vlastní vektor příslušný stejné vlastní hodnotě.

**Definice (Charakteristická rovnice a charakteristický polynom)**

Rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$ s neznámou $\lambda$ se nazývá charakteristická rovnice matice $A$. Výraz na levé straně této rovnice je polynom proměnné $\lambda$ a nazývá se charakteristický polynom matice A.

# Příklad

Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

# Příklad

Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

---

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Vlastní hodnoty jsou řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, tedy

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4.$$

Vlastní vektory najdeme jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde za $\lambda$ dosadíme vypočtené vlastní hodnoty.

- Vlastní vektor příslušný hodnotě $\lambda_1 = 1$:
  Řešíme soustavu
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
  Tato soustava má nekonečně mnoho řešení a platí
$$2u_1 + u_2 = 0 \Longrightarrow u_1 = t \in \mathbb{R},\ u_2 = -2t.$$
  Vlastní vektor je tedy vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (volíme $t = 1$) a každý jeho násobek.

- Vlastní vektor příslušný hodnotě $\lambda_1 = 4$:
  Řešíme soustavu
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
  Tato soustava má nekonečně mnoho řešení a platí
$$-u_1 + u_2 = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2 = t \in \mathbb{R}.$$
  Vlastní vektor je tedy vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (volíme $t = 1$) a každý jeho násobek.

# Symetrická a diagonální matice

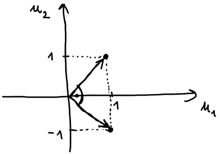
## Věta

1. *Symetrická matice má všechna vlastní čísla reálná. (Nemá komplexní vlastní čísla.)*
2. *Vlastní vektory symetrické matice příslušné různým vlastním hodnotám jsou na sebe kolmé (skalární součin je roven nule).*
3. *Vlastní čísla diagonální matice jsou prvky na diagonále.*

## Příklad

Snadno spočítáme, že vlastní hodnoty matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 3$ a příslušné vlastní vektory jsou $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Protože matice $A$ je symetrická, jsou vlastní vektory navzájem kolmé, což vidíme i ze skalárního součinu vektorů, který je roven nule: $1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$.



# Využití v aplikacích

1. Autonomní systémy diferenciálních rovnic – klasifikace stacionárních řešení.
2. Leslieho matice má jednu kladnou vlastní hodnotu. Příslušný vlastní vektor definuje rozložení četnosti zastoupení jednotlivých věkových kategorií u populace ve stacionárním stavu.
3. Nechť $A$ je matice reprezentující Markovův řetězec. Pokud pro nějaký vektor $\vec{x}$ platí $\vec{x} = A\vec{x}$, pak se procentuelní zastoupení jednotlivých stavů (obyvatelstvo města/vesnice, druhy vegetace,...) nemění a systém je v tzv. stacionárním stavu. V tom případě je $\vec{x}$ vlastním vektorem matice a příslušná vlastní hodnota je rovna $1$.
4. Algoritmus, kterým Google provádí hodnocení důležitosti webových stránek.

# Využití systémů počítačové algebry

`http://www.wolframalpha.com/`

### Příklad

Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení pomocí systému Wolfram Alpha:

`eigenvalues{{3,1},{2,2}}`