

Parciální derivace

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Definice (Parciální derivace)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí.

- Má-li funkce $f(x, y_0)$ derivaci bodě x_0 , nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce f podle proměnné x **v bodě** (x_0, y_0) a značíme ji $f'_x(x_0, y_0)$. Platí tedy

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

- Má-li funkce

$$f(x_0, y)$$

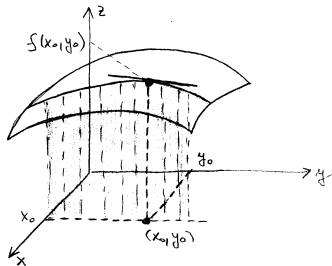
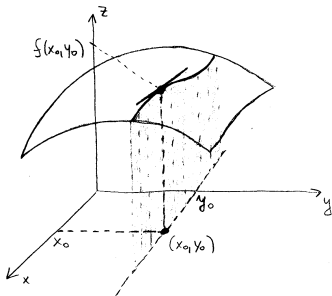
derivaci bodě y_0 , nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce f podle proměnné y **v bodě** (x_0, y_0) a značíme ji $f'_y(x_0, y_0)$. Platí tedy

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Geometrický význam parciálních derivací

Parciální derivace určují rychlost růstu funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami x a y . (Pozn.: Jsou speciálními případy tzv. směrových derivací, které určují rychlost růstu funkce v libovolném daném směru.)

- Parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$ představuje směrnici tečny v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, která vznikne průsečíkem grafu funkce f s rovinou $y = y_0$.
- Podobně parciální derivace $f'_y(x_0, y_0)$ představuje směrnici tečny v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, která vznikne průsečíkem grafu funkce f s rovinou $x = x_0$.



Parciální derivace jako funkce

- Má-li funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ parciální derivaci podle proměnné x **ve všech bodech nějaké množiny** $M \subset D(f)$, pak můžeme na této množině definovat funkci, která každému bodu z množiny M přiřadí parciální derivaci podle proměnné x v tomto bodě. Tato funkce se nazývá **parciální derivace funkce** f podle proměnné x a značí se f'_x . Podobně definujeme parciální derivaci podle proměnné y a značíme f'_y .

Jiná značení parciálních derivací:

$$f_x, f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z'_x, z'_y, \quad z_x, z_y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

- Při výpočtu parciálních derivací se díváme na funkci $f(x, y)$ jako na funkci jedné proměnné:
 - Při výpočtu parciální derivace $f'_x(x, y)$ považujeme x za proměnnou a y za konstantu.
 - Podobně při výpočtu $f'_y(x, y)$ považujeme y za proměnnou a x za konstantu.

Při výpočtu parciálních derivací tedy používáme stejné vzorce a stejná pravidla jako při derivování funkce jedné proměnné.

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$① \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$① \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$② \quad z = x^y, \quad x > 0$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$① \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$② \quad z = x^y, \quad x > 0$$

$$z'_x = yx^{y-1} \quad (\text{derivujeme jako mocninou funkci})$$

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad z = x^y, \quad x > 0$$

$$z'_x = yx^{y-1} \quad (\text{derivujeme jako mocninou funkci})$$

$$z'_y = x^y \ln x \quad (\text{derivujeme jako exponenciální funkci})$$

Souvislost spojitosti s parciálními derivacemi

Z existence derivace funkce jedné proměnné v nějakém bodě plyne spojitost funkce v tomto bodě.

Z pouhé existence parciálních derivací funkce f v bodě (x_0, y_0) však neplyne spojitost funkce f v bodě (x_0, y_0) . Například funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $(0, 0)$ obě parciální derivace (platí, že $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$), ale funkce není v bodě $(0, 0)$ spojitá, neboť zde nemá ani limitu. Blížíme-li se totiž k bodu $(0, 0)$ ve směru souřadných os, má funkce stále hodnotu 1, pokud se však blížíme v jiném směru, dostaneme hodnotu 0.

Věta (Postačující podmínka spojitosti)

Nechť funkce dvou proměnných f má v bodě (x_0, y_0) spojitě obě parciální derivace. Pak je funkce f v bodě (x_0, y_0) spojitá.

Příklad (Míra tepelné ztráty v chladném počasí)

Míra tepelná ztráty:

$$H(t, v) = (10,45 + 10\sqrt{v} - v)(33 - t),$$

kde v je rychlost větru a t je teplota vzduchu. Předpokládejme, že $t = 0^\circ\text{C}$ a $v = 4\text{m/s}$. Co má větší vliv na míru tepelné ztráty: změna rychlosti větru nebo změna teploty (o jednotku)?

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \left(\frac{5}{\sqrt{v}} - 1 \right) (33 - t) \implies \frac{\partial H}{\partial v}(0, 4) = 49,5$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v - 10\sqrt{v} - 10,45 \implies \frac{\partial H}{\partial t}(0, 4) = -26,45$$

Větší vliv má změna rychlosti větru. Kladná hodnota $(49,5)$ znamená, že s rostoucí rychlostí větru (při konstantní teplotě) roste míra tepelné ztráty. Naopak záporná hodnota $(-26,45)$ znamená, že s rostoucí teplotou (při konstantní rychlosti větru) klesá míra tepelné ztráty.

Příklad (Substituty a komplementy)

Poptávaná množství výrobků A a B závisí na cenách těchto výrobků následovně:

$Q_A = \frac{50\sqrt[3]{P_B}}{\sqrt{P_A}}$, $Q_B = \frac{75P_A}{\sqrt[3]{P_B^2}}$. Vypočtěte parciální derivace a určete, zda jsou výrobky A , B substituty nebo komplementy.

$$\frac{\partial Q_A}{\partial P_A} = -25P_A^{-3/2}P_B^{1/3} < 0$$

$$\frac{\partial Q_A}{\partial P_B} = \frac{50}{3}P_A^{-1/2}P_B^{-2/3} > 0$$

$$\frac{\partial Q_B}{\partial P_B} = -50P_AP_B^{-5/3} < 0$$

$$\frac{\partial Q_B}{\partial P_A} = 75P_B^{-2/3} > 0$$

- Zcela přirozeně pro oba výrobky platí, že s rostoucí cenou výrobku klesá jeho poptávané množství.
- S rostoucí cenou výrobku B roste poptávané množství výrobku A , podobně, s rostoucí cenou výrobku A roste poptávané množství výrobku B . Výrobky jsou substituty.

Tečná rovina a diferenciál

Nechť funkce f má spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0) . Pak rovnice **tečné roviny** ke grafu funkce f v bodě (x_0, y_0) má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

a funkční hodnoty v malém okolí bodu (x_0, y_0) lze aproximovat funkčními hodnotami na tečné rovině, tj. v malém okolí bodu (x_0, y_0) můžeme psát

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Označme $dx = x - x_0$ a $dy = y - y_0$. Přírůstek funkce f naměřený na tečné rovině (při posunu z bodu (x_0, y_0) do bodu (x, y)), tj. výraz

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy,$$

nazýváme **diferenciálem** funkce f v bodě (x_0, y_0) .

- Rovnice tečné roviny je nejlepší lineární aproximací funkce v okolí daného bodu.

Příklad (Tečná rovina)

Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = xy^2 - x + 3y^2$ v bodě $(1, 2)$.

Funkční hodnota v bodě $(1, 2)$ je $z(1, 2) = 15$. Hodnoty parciálních derivací:

$$z'_x = y^2 - 1 \implies z'_x(1, 2) = 3$$

$$z'_y = 2xy + 6y \implies z'_y(1, 2) = 16$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = 15 + 3(x - 1) + 16(y - 2),$$

tj.

$$z = 3x + 16y - 20.$$

Příklad (Lineární aproximace)

Pomocí lineární aproximace vypočtěte přibližně $1,04^{2,02}$.

Najdeme tečnou rovinu funkce $z = x^y$ bodě $(1, 2)$: Funkční hodnota v bodě $(1, 2)$ je $z(1, 2) = 1$. Hodnoty parciálních derivací:

$$z'_x = yx^{y-1} \implies z'_x(1, 2) = 2$$

$$z'_y = x^y \ln x \implies z'_y(1, 2) = 0$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1,$$

tj. v malém okolí bodu $(1, 2)$ máme

$$x^y \approx 2x - 1,$$

tedy

$$1,04^{2,02} \approx 2 \cdot 1,04 - 1 = 1,08.$$

Příklad (Diferenciál: Změna objemu kužele)

Pomocí diferenciálu určete, o kolik cm^3 se přibližně změní objem kužele o poloměru podstavy $r_0 = 10 \text{ cm}$ a výškou $v_0 = 10 \text{ cm}$, jestliže poloměr o 5 mm zvětšíme a výšku o 5 mm zmenšíme.

Objem kužele: $V(r, v) = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.

Najdeme diferenciál této funkce v bodě $(10, 10)$ a určíme jeho hodnotu pro $dr = 0,5$ a $dv = -0,5$.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r v \implies \frac{\partial V}{\partial r}(10, 10) = \frac{200}{3}\pi$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{1}{3}\pi r^2 \implies \frac{\partial V}{\partial v}(10, 10) = \frac{100}{3}\pi$$

$$dV(10, 10) = \frac{200}{3}\pi dr + \frac{100}{3}\pi dv = \frac{200}{3}\pi \cdot 0,5 + \frac{100}{3}\pi(-0,5) = \frac{50}{3}\pi$$

Kladná hodnota znamená, že se objem zvětší přibližně o $\frac{50}{3}\pi$.

Příklad (Diferenciál: Odhad relativní chyby veličiny počítané pomocí měřených veličin)

Je měřena kinetická energie $E = \frac{1}{2}mv^2$ částice o hmotnosti m a rychlosti v . Relativní chyba při stanovení hmotnosti je 1%, při stanovení rychlosti 2%. Pomocí diferenciálu stanovte odhad pro relativní chybu počítané energie.

Označme m_0, v_0 skutečné hodnoty veličin a m, v naměřené hodnoty. Pro $dm = m - m_0$ a $dv = v - v_0$ máme $\left| \frac{dm}{m_0} \right| \leq 0,01$ a $\left| \frac{dv}{v_0} \right| \leq 0,02$.

Parciální derivace:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{1}{2}v^2, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = mv.$$

Diferenciál funkce E v bodě (m_0, v_0) a odhad chyby:

$$dE(m_0, v_0) = \frac{1}{2}v_0^2 dm + m_0v_0 dv$$

$$\frac{dE(m_0, v_0)}{E(m_0, v_0)} = \frac{dm}{m_0} + 2\frac{dv}{v_0}$$

$$\left| \frac{dE(m_0, v_0)}{E(m_0, v_0)} \right| \leq \left| \frac{dm}{m_0} \right| + 2 \left| \frac{dv}{v_0} \right| \leq 0,01 + 2 \cdot 0,02 = 0,05.$$

Relativní chyba počítané energie je přibližně 5%.

Parciální derivace vyšších řádů

Definice (Parciální derivace druhého řádu)

- Má-li funkce f'_x v bodě (x_0, y_0) parciální derivaci podle x , nazýváme ji **parciální derivací 2. řádu** podle x funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme $f''_{xx}(x_0, y_0)$ (nebo $f_{xx}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$).
- Má-li funkce f'_x v bodě (x_0, y_0) parciální derivaci podle y , nazýváme ji **smíšenou parciální derivací 2. řádu** funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme $f''_{xy}(x_0, y_0)$ (nebo $f_{xy}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x_0, y_0)$).
- Zcela analogicky definujeme a značíme parciální derivace druhého řádu $f''_{yx}(x_0, y_0)$ a $f''_{yy}(x_0, y_0)$.
- Podobně definujeme a značíme i parciální derivace vyšších řádů.
- Parciální derivace druhého řádu jsou celkem 4, parciálních derivací třetího je 8.

Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$\begin{aligned}z &= e^{x^2 y} \\ z'_x &= e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}\end{aligned}$$

Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

$$z'_x = e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}$$

$$z'_y = e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^2 e^{x^2 y}$$

Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

$$z'_x = e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}$$

$$z'_y = e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^2 e^{x^2 y}$$

$$z''_{xx} = 2y \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2 y}(1 + 2x^2 y)$$

Příklad

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

$$z'_x = e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}$$

$$z'_y = e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^2 e^{x^2 y}$$

$$z''_{xx} = 2y \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2 y}(1 + 2x^2 y)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2 y}(1 + x^2 y)$$

Příklad

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2y}$$

$$z'_x = e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2y}$$

$$z'_y = e^{x^2y} \cdot x^2 = x^2e^{x^2y}$$

$$z''_{xx} = 2y \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2y}(1 + 2x^2y)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y)$$

$$z''_{yx} = 2x \cdot e^{x^2y} + x^2 \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y)$$

Příklad

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

$$z'_x = e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}$$

$$z'_y = e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^2 e^{x^2 y}$$

$$z''_{xx} = 2y \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2 y}(1 + 2x^2 y)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2 y}(1 + x^2 y)$$

$$z''_{yx} = 2x \cdot e^{x^2 y} + x^2 \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xe^{x^2 y}(1 + x^2 y)$$

$$z''_{yy} = x^2 e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^4 e^{x^2 y}$$

Příklad

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

$$\begin{aligned}z &= e^{x^2y} \\z'_x &= e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2y} \\z'_y &= e^{x^2y} \cdot x^2 = x^2e^{x^2y} \\z''_{xx} &= 2y \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2y}(1 + 2x^2y) \\z''_{xy} &= 2x \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y) \\z''_{yx} &= 2x \cdot e^{x^2y} + x^2 \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y) \\z''_{yy} &= x^2e^{x^2y} \cdot x^2 = x^4e^{x^2y}\end{aligned}$$

Skutečnost, že $z''_{xy} = z''_{yx}$, je důsledkem následující věty.

Věta (Schwarzova)

Nechť má funkce f spojité smíšené parciální derivace f''_{xy} , f''_{yx} v bodě (x_0, y_0) . Pak platí $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Větu lze zobecnit i pro derivace vyšších řádů: Má-li funkce v bodě (x_0, y_0) spojité parciální derivace až do řádu n , pak při výpočtu těchto parciálních derivací nezáleží na tom, v jakém pořadí se derivuje podle jednotlivých proměnných, ale pouze na tom, kolikrát se podle které proměnné derivuje.

Příklad

Určete parciální derivace funkce

$$z = x^2 \ln(x + y^3).$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com/>):

- Parciální derivace podle proměnné x

`differentiate x^2*ln(x+y^3) with respect to x`

- Parciální derivace podle proměnné y

`differentiate x^2*ln(x+y^3) with respect to y`