Limita a spojitost

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Rozšířená množina reálných čísel

Rozšířená množina reálných čísel je množina $\mathbb{R}$ rozšířená o prvky ∞ a $-\infty$. Značíme ji $\mathbb{R}^*$. Tedy

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Body $\pm\infty$ se nazývají nevlastní body, body množiny $\mathbb{R}$ se nazývají vlastní body. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme operace:

$$a + \infty = \infty, \quad a - \infty = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty = -\infty \cdot (-\infty), \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \boxed{\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0}, \quad |\pm\infty| = \infty$$

Pro $a > 0$: $\quad a \cdot \infty = \infty, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty$

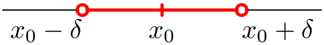
Pro $a < 0$: $\quad a \cdot \infty = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = \infty$

Nejsou definovány tyto operace:

$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0}, \ a \in \mathbb{R}^*$$

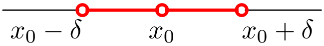
Okolí bodu

- Okolím (δ-okolím) bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme $O_\delta(x_0)$.



- Interval $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ se nazývá levé okolí bodu x_0, značíme $O_\delta^-(x_0)$ a interval $\langle x_0, x_0 + \delta)$ se nazývá pravé okolí bodu x_0, značíme $O_\delta^+(x_0)$.

- Ryzím (prstencovým) okolím (δ-okolím) bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme $P_\delta(x_0)$.



- Interval $(x_0 - \delta, x_0)$ se nazývá levé ryzí okolí bodu x_0, značíme $P_\delta^-(x_0)$ a interval $(x_0, x_0 + \delta)$ se nazývá pravé ryzí okolí bodu x_0, značíme $P_\delta^+(x_0)$.

Pokud nebude hodnota δ podstatná, budeme okolí bodu x_0 značit jen $O(x_0)$ a ryzí okolí $P(x_0)$. Podobně pro jednostranná okolí.

- Okolím a zároveň i ryzím okolím bodu ∞ rozumíme každý interval (a, ∞), kde $a \in \mathbb{R}$.
- Okolím a zároveň i ryzím okolím bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Definice limity

Definice (Limita funkce)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in O(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

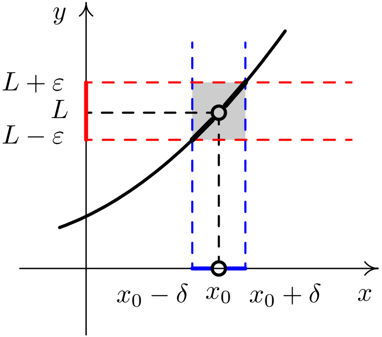
Vlastní limita ve vlastním bodě: $x_0 \in \mathbb{R},\ L \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L}$$

K libovolnému ε-okolí $O_\varepsilon(L)$ bodu L lze najít ryzí δ-okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, aby platilo

$$f(x) \in O_\varepsilon(L) \quad \text{pro všechna} \quad x \in P_\delta(x_0).$$

Zhruba řečeno: **Funkční hodnoty jsou libovolně blízké k L, pokud x je dostatečně blízké k x_0, ale $x \neq x_0$.**



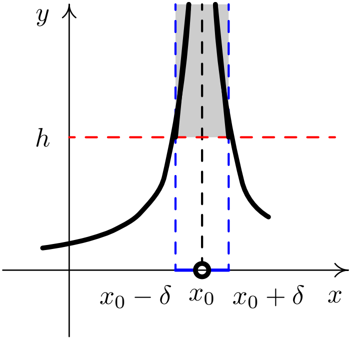
- Na obrázku je k danému $O_\varepsilon(L)$ nalezeno největší možné ryzí okolí bodu x_0. Ryzí okolí $P_\delta(x_0)$ je lze zvolit menší.
- Funkční hodnota v bodě x_0 není pro existenci limity podstatná, funkce nemusí být v bodě x_0 vůbec definovaná. Zajímají nás pouze funkční hodnoty v "blízkém" ryzím okolí bodu x_0.

Nevlastní limita ve vlastním bodě: $x_0 \in \mathbb{R}, L = \pm\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$$

K libovolnému $h \in \mathbb{R}$ lze najít ryzí δ-okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, aby platilo

$$f(x) > h \quad \text{pro všechna} \quad x \in P_\delta(x_0).$$



- $P_\delta(x_0)$ je možné volit menší.

Jednostranné limity ($x_0 \in \mathbb{R}$)

Analogicky s použitím pravého (levého) ryzího okolí v předchozí definici limity, můžeme definovat ve vlastním bodě vlastní i nevlastní nevlastní limitu zprava (zleva).

- Nahradíme-li v definici ryzí okolí $P(x_0)$ pravým ryzím okolím $P^+(x_0)$, dostáváme definici limity zprava

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

- Nahradíme-li v definici ryzí okolí $P(x_0)$ levým ryzím okolím $P^-(x_0)$, dostáváme definici limity zleva

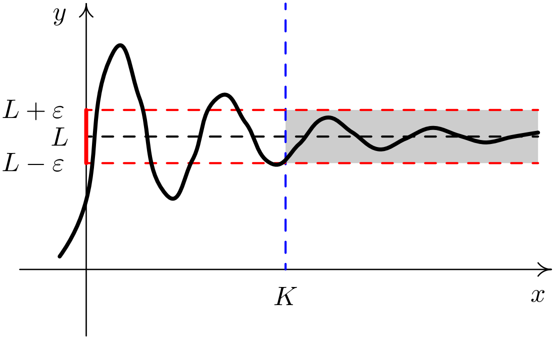
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Vlastní limita v nevlastním bodě: $x_0 = \pm\infty,\ L \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = L}$$

K libovolnému ε-okolí $O_\varepsilon(L)$ bodu L lze najít $K \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$f(x) \in O_\varepsilon(L) \quad \text{pro všechna} \quad x > K.$$



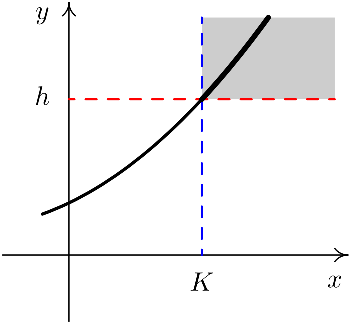
- Číslo K na obrázku je možné volit větší (více vpravo).

Nevlastní limita v nevlastním bodě: $x_0 = \pm\infty, L = \pm\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty}$$

K libovolnému $h \in \mathbb{R}$ lze najít $K \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$f(x) > h \quad \text{pro všechna} \quad x > K.$$



- Na obrázku je k danému h zvoleno nejmenší možné K. Číslo K je možné volit větší (více vpravo).

Vlastnosti limit

Z definice limity vyplývá, že aby měla funkce v daném bodě limitu, nemusí být v tomto bodě vůbec definovaná. Musí však být definovaná v nějakém ryzím okolí tohoto bodu. Například $\lim_{x\to 0} \ln x$ nemá vůbec smysl, neboť funkce $y = \ln x$ není definovaná v žádném levém okolí nuly. Smysl má tedy pouze $\lim_{x\to 0^+} \ln x$.

Věta

Funkce f má ve vlastním bodě x_0 limitu (vlastní nebo nevlastní) právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné limity, které jsou si rovny. Pak platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Věta

Funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

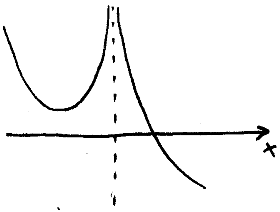
Svislá asymptota (bez směrnice)

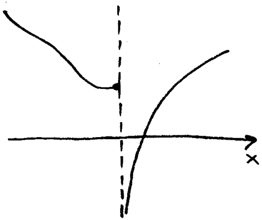
Definice (Svislá asymptota)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ svislou asymptotu (asymptotu bez směrnice) o rovnici $x = x_0$, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit v bodě x_0 je nevlastní, tj. nastane alespoň jeden z případů:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Příklad:



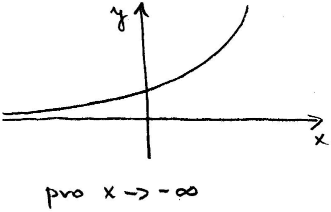


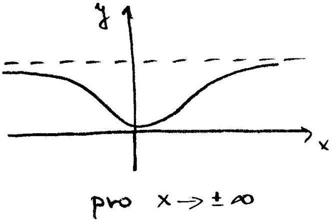
Vodorovná asymptota (s nulovou směrnicí)

Definice (Vodorovná asymptota)

Řekneme, že funkce f má vodorovnou asymptotu o rovnici $y = q$ pro $x \to \infty$ (pro $x \to -\infty$), jestliže
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = q \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = q).$$

Příklad:





Šikmá asymptota (se směrnicí)

Definice (Asymptota se směrnicí)

- Přímka o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, se nazývá asymptotou se směrnicí funkce f pro $x \to \infty$, jestliže

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

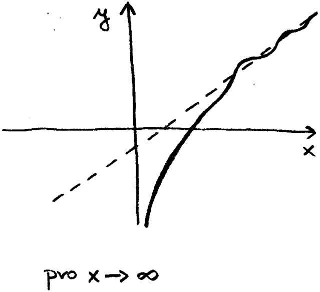
- Přímka o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, se nazývá asymptotou se směrnicí funkce f pro $x \to -\infty$, jestliže

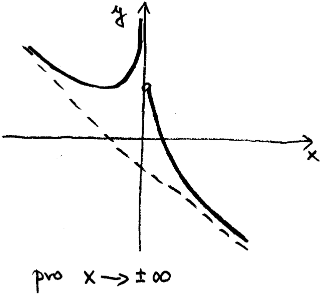
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Poznámka

Pokud $k = 0$, $q \in \mathbb{R}$, pak se jedná o vodorovnou asymptotu.

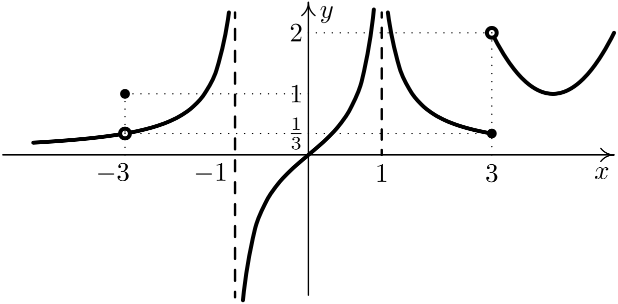
Příklad asymptot se směrnicí:





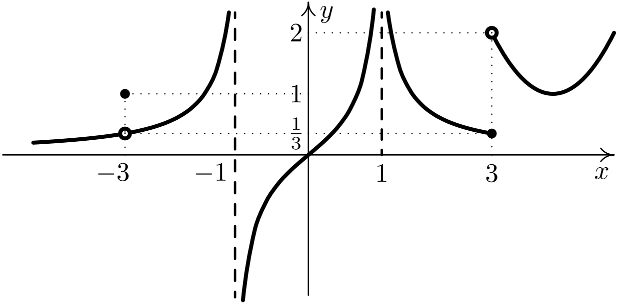
Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



Příklad

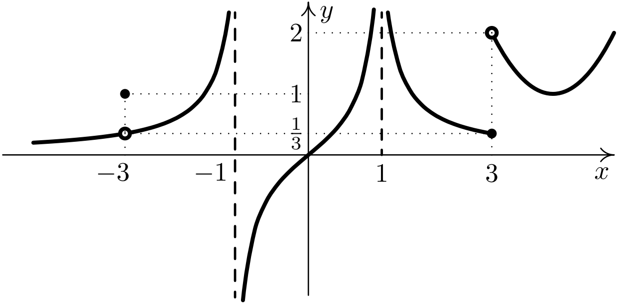
Nechť je funkce f zadaná grafem:



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Příklad

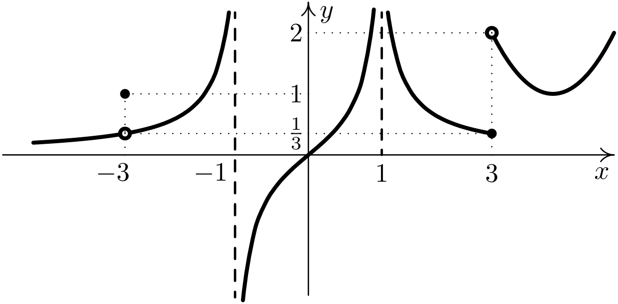
Nechť je funkce f zadaná grafem:



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \frac{1}{3}$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:

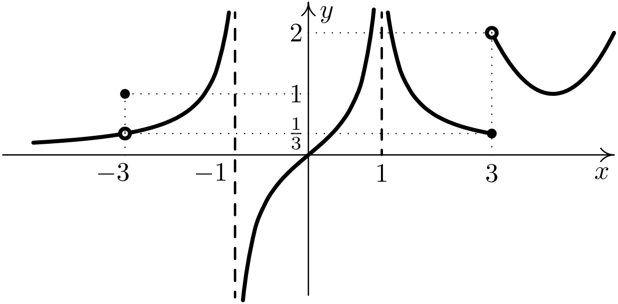


- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ neexistuje, neboť

  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:

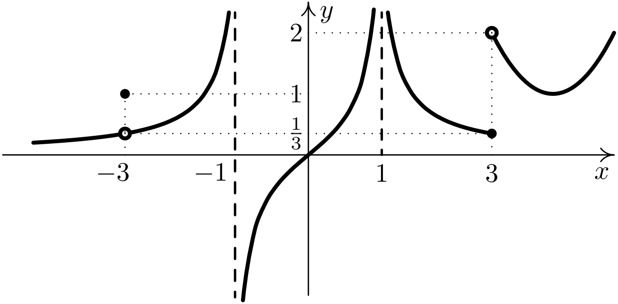


- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ neexistuje, neboť

  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



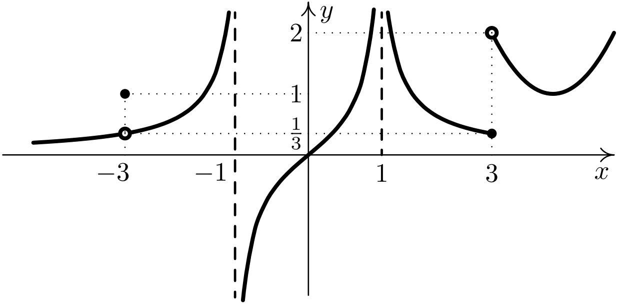
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ neexistuje, neboť

  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ neexistuje, neboť

  $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 2$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



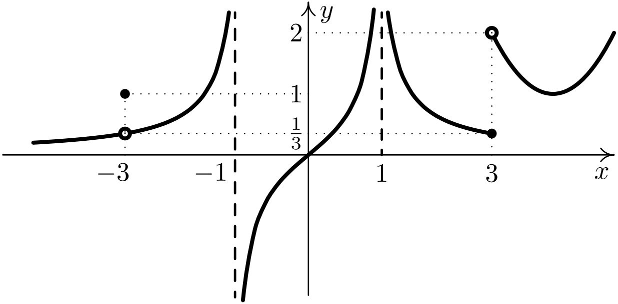
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ neexistuje, neboť

  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ neexistuje, neboť

  $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ neexistuje, neboť
  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ neexistuje, neboť
  $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

asymptoty: $x = -1$, $x = 1$ a $y = 0$ pro $x \to -\infty$

Spojitost funkce

Definice (Spojitost v bodě)

- Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ zprava (zleva), jestliže

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \; \Big(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Big)$$

- Z definice limity vyplývá, že je-li funkce spojitá v bodě x_0, pak je definovaná v tomto bodě i v nějakém jeho okolí.

Definice (Spojitost na intervalu)

- Řekneme, že funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b), jestliže je spojitá ve všech bodech tohoto intervalu.
- Řekneme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže je spojitá ve všech jeho vnitřních bodech, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Věta

Základní elementární funkce a funkce, které vznikly součtem, rozdílem, součinem, podílem a skládáním těchto funkcí, jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru.

Body, v nichž funkce není spojitá, se nazývají body nespojitosti.

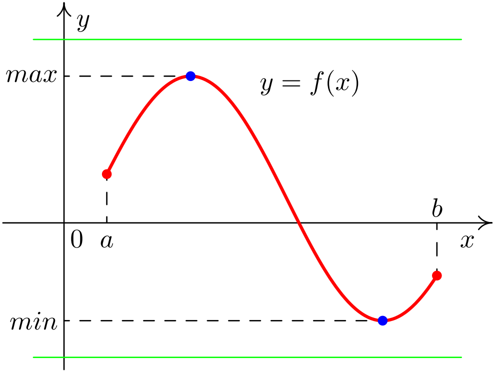
- Body nespojitosti funkce z předchozího příkladu jsou -3, -1, 1 a 3. V bodě 3 je funkce spojitá zleva.
- Body nespojitosti základních elementárních funkcí jsou body, v nichž tyto funkce nejsou definované. Například body nespojitosti funkce $y = \operatorname{cotg} x$ jsou body $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Body nespojitosti racionální lomené funkce jsou nulové body jmenovatele.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrass)

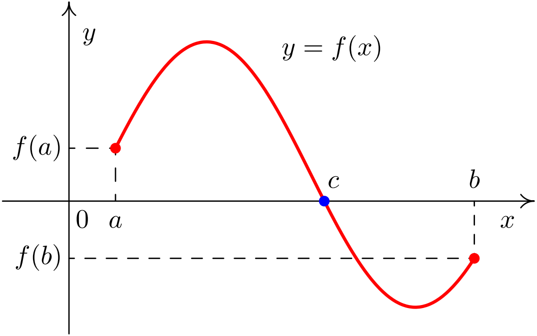
Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

- *f je na $\langle a, b\rangle$ ohraničená.*
- *f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší a nejmenší hodnoty.*



Věta (Bolzano)

Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak f nabývá na $\langle a, b\rangle$ všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou. Zejména, je-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.



Poznámka

Na předchozí větě je založena metoda půlení intervalu, která se využívá například při řešení algebraických rovnic.

Výpočet limity

Věta (Pravidla pro počítání s limitami)

Nechť f *a* g *jsou funkce, které mají limitu v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *a nechť* $c \in \mathbb{R}$. *Pak platí*

$$\lim_{x\to x_0} c = c$$

$$\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \textit{pro} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

Při výpočtu limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce f.

Limita spojité funkce

V bodech, ve kterých je funkce spojitá, nemá pojem limita funkce velký význam. Je-li funkce f spojitá v x_0, pak dostaneme po dosazení bodu x_0 do funkce funkční hodnotu (konečné číslo), která je zároveň limitou funkce v daném bodě.

Příklad (Limita spojité funkce)

1. $$\lim_{x \to 2} \frac{2x+3}{4-x} = \frac{7}{2}$$
2. $$\lim_{x \to -1} \operatorname{arctg} x^2 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Limita typu $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, $a \in \mathbb{R}$

Pokud při výpočtu limity podílu funkcí $\frac{f}{g}$ dostaneme výraz $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \ a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, $a \in \mathbb{R}$)

1. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$
2. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$

Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$

Pokud při výpočtu limity podílu funkcí $\frac{f}{g}$ dostaneme výraz $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

pak nastane právě jedna ze tří možností:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, pokud existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, pokud existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že funkce $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, pokud se limita zprava nerovná limitě zleva, tj. podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ mění v bodě x_0 znaménko.

Příklad (Limita typu $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{3}{0}\right\|$

Příklad (Limita typu $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1. $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{3}{0} \right\|$ $\Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje

Příklad (Limita typu $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{(x-3)^3} = \left\|\dfrac{3}{0}\right\|$ $\Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje
   Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v "blízkém" ryzím okolí bodu $x = 3$.
   Čitatel x je v "blízkém" ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný.

Příklad (Limita typu $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{3}{0}\right\|$ $\Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje

   Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v "blízkém" ryzím okolí bodu $x = 3$. Čitatel x je v "blízkém" ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný. Pro jednostranné limity platí:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{+}{+}\right\| = \infty, \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{+}{-}\right\| = -\infty,$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x}{(x-3)^3}$ neexistuje.

Příklad (Limita typu $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{(x-3)^3} = \left\|\dfrac{3}{0}\right\|$ $\Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje

   Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v "blízkém" ryzím okolí bodu $x = 3$. Čitatel x je v "blízkém" ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný. Pro jednostranné limity platí:

   $$\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{+}{+}\right\| = \infty, \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{+}{-}\right\| = -\infty,$$

   $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{(x-3)^3}$ neexistuje.

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-7}{(x-5)^2} = \left\|\dfrac{-2}{0}\right\|$

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{(x-3)^3} = \left\| \dfrac{3}{0} \right\|$ $\Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje

   Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v "blízkém" ryzím okolí bodu $x = 3$.
   Čitatel x je v "blízkém" ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný.
   Pro jednostranné limity platí:

   $$\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{+} \right\| = \infty, \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{-} \right\| = -\infty,$$

   $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{(x-3)^3}$ neexistuje.

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-7}{(x-5)^2} = \left\| \dfrac{-2}{0} \right\|$ $\Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje

Příklad (Limita typu $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{3}{0}\right\|$ $\Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje
   Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v "blízkém" ryzím okolí bodu $x = 3$. Čitatel x je v "blízkém" ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný. Pro jednostranné limity platí:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{+}{+}\right\| = \infty, \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{+}{-}\right\| = -\infty,$$

   $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x}{(x-3)^3}$ neexistuje.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x-7}{(x-5)^2} = \left\|\frac{-2}{0}\right\|$ $\Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje
   Čitatel $x-7$ je v "blízkém" ryzím okolí bodu 5 záporný, jmenovatel $(x-5)^2$ je kladný. Takže

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-7}{(x-5)^2} = \left\|\frac{-}{+}\right\| = -\infty.$$

Neurčité výrazy

Dostaneme-li při výpočtu limity podílu dvou funkcí výraz typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$, pak se jedná o tzv. neurčitý výraz. V tomto případě lze někdy hodnotu limity získat tak, že místo původních funkcí uvažujeme rychosti růstu daných funkcí.

Další neurčité výrazy: $\|\pm\infty \cdot 0\|$, $\|\infty - \infty\|$, $\left\|0^0\right\|$, $\left\|\infty^0\right\|$, $\|1^\infty\|$ se dají převést na výpočet limity typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$.

Těmito typy limit se obecně zabývat nebudeme.

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2)$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5}$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{3x^4}$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{3x^4} = \dfrac{1}{3}.$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{3x^4} = \dfrac{1}{3}.$

3. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1}$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6}{3x^2}$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$
2. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{3x^4} = \dfrac{1}{3}.$
3. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{2}{3}x^4$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x^4 = \infty.$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$

3. $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x^4 = \infty.$

4. $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2}$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x^4 = \infty.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{3x^3}$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{3x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{3x}$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{3x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{3x} = \frac{5}{-\infty}$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $$\lim_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$$
2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$
3. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$$
4. $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{3x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{3x} = \frac{5}{-\infty} = 0.$$

Využití systémů počítačové algebry

Příklad

Vypočtěte limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 - 3x^4 + x - 2}{2x^3 + 4}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

```
lim (x^5-3x^4+x-2)/(2x^3+4) as x->infty

lim (ln x)/x as x->0+

lim ((x+2)/(x-1)) as x->1
```

Vzdálenost v $\mathbb{R}^n$

Definice (Euklidovská vzdálenost)

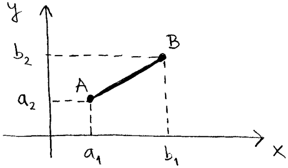
Nechť $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Euklidovská vzdálenost bodů A, B je číslo $\varrho(A, B)$ definované vztahem

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

Euklidovská vzdálenost bodů $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ je

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Jedná se o délku úsečky, která tyto body spojuje.



Příklad (Euklidovská vzdálenost bodů)

Určete euklidovskou vzdálenost bodů

1. $A = (2, 1)$, $B = (3, 4)$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

2. $A = (2, 1, 3)$, $B = (0, 1, 4)$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(0-2)^2 + (1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$$

Okolí bodu v $\mathbb{R}^n$

Definice (Okolí bodu)

Nechť $A \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$ je reálné číslo.

- δ-okolím $O_\delta(A)$ bodu A rozumíme množinu všech bodů, které mají od daného bodu A vzdálenost menší než δ, tj.

$$O_\delta(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : \varrho(X, A) < \delta\}.$$

- Ryzím (redukovaným, prstencovým) δ-okolím $P_\delta(A)$ bodu A rozumíme množinu

$$P_\delta(A) = O_\varepsilon(A) \setminus \{A\}.$$

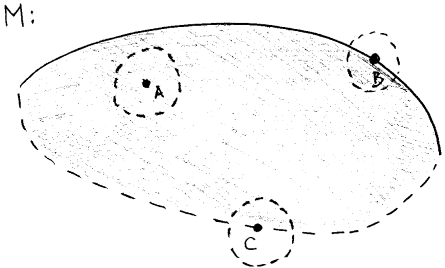
Nebude-li poloměr okolí podstatný, budeme index δ vynechávat.

- δ-okolí bodu $A \in \mathbb{R}^2$ je množina všech bodů uvnitř kruhu se středem v bodě A a poloměrem δ
- δ-okolí bodu $A \in \mathbb{R}^3$ je množina všech bodů uvnitř koule se středem v bodě A a poloměrem δ

Význačné body a množiny bodů

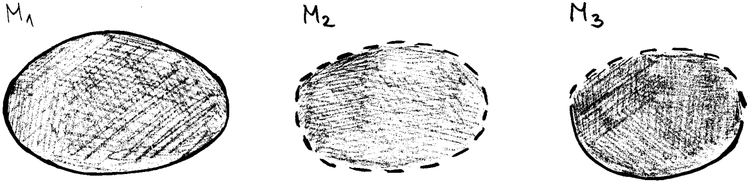
Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina bodů.

- Bod $A \in M$ se nazývá vnitřní bod množiny M, jestliže existuje okolí tohoto bodu, které celé patří do množiny M. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá vnitřek množiny M.
- Bod A se nazývá hraniční bod množiny M, jestliže v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod, který patří do množiny M a zároveň alespoň jeden bod, který nepatří do množiny M. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá hranice množiny M. Hraniční body nemusí patřit do množiny.



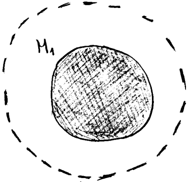
- A je vnitřní bod
- $B \in M$ je hraniční bod
- $C \notin M$ je hraniční bod

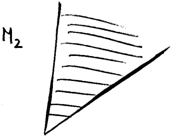
- Množina M se nazývá otevřená, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.



* M_1 je uzavřená
* M_2 je otevřená
* M_3 není ani uzavřená ani otevřená

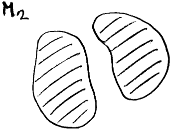
- Množina M se nazývá ohraničená (omezená), jestliže leží v okolí (libovolně velkém) nějakého bodu z $\mathbb{E}^n$.





- $*$ M_1 je ohraničená
- $*$ M_2 není ohraničená

- Množina M se nazývá souvislá, jestliže každé dva body z této množiny lze spojit lomenou čárou, která celá leží v M.
- Otevřená a souvislá množina se nazývá oblast, uzavřená a souvislá množina se nazývá uzavřená oblast.



- $*$ M_1 je souvislá
- $*$ M_2 není souvislá

Limita funkce dvou proměnných

Definice (Limita funkce)

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná v nějakém ryzím okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) limitu rovnu číslu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechny body (x, y) z ryzího δ-okolí bodu (x_0, y_0) platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Bod (x_0, y_0) se nazývá limitní bod.

Podobně jako pro funkci jedné proměnné je možné definovat i nevlastní limity a limity v nevlastních bodech. (Za nevlastní bod považujeme bod, jehož alespoň jedna souřadnice je nevlastní.)

Vlastnosti limit

Pro limitu funkce dvou proměnných platí podobná tvrzení jako pro limitu funkce jedné proměnné.

- Funkce nemusí být v bodě (x_0, y_0) definovaná a může zde mít limitu.
- Funkce může mít v bodě nejvýše jednu limitu.
- Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí je rovna součtu, rozdílu, součinu a podílu limit jednotlivých funkcí (za předpokladu, že všechny limity existují a příslušné operace jsou definovány, tj. nejedná se o neurčité výrazy.)

Výpočet limity funkce dvou proměnných je mnohem obtížnější než u funkce jedné proměnné:

- U funkce jedné proměnné se k limitnímu bodu můžeme blížit jen po přímce ze dvou stran, u funkce dvou proměnných se můžeme blížit z nekonečně mnoha různých směrů po různých křivkách. Existují-li dvě různé cesty vedoucí k různým hodnotám limity, pak limita v daném bodě neexistuje.

Spojitost funkce dvou proměnných

Definice (Spojitost funkce)

- Řekneme, že funkce dvou proměnných f je spojitá v bodě (x_0, y_0), jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

- Řekneme, že funkce dvou proměnných f je spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $(x_0, y_0) \in M$ platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0), \quad \text{kde} \quad (x,y) \in M.$$

- Je-li funkce v daném bodě spojitá, musí být v tomto bodě definovaná.
- Body, v nichž není funkce spojitá, se nazývají body nespojitosti.
- Součet, rozdíl a součin funkcí spojitých v bodě (x_0, y_0) je funkce spojitá v bodě (x_0, y_0). Podíl dvou funkcí spojitých v bodě (x_0, y_0) je funkce spojitá v bodě (x_0, y_0), pokud (x_0, y_0) není nulovým bodem jmenovatele.

Vlastnosti spojitých funkcí dvou proměnných

Věta (Weierstrassova)

Nechť funkce dvou proměnných f je spojitá na ohraničené a uzavřené množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak f nabývá na M své největší a nejmenší hodnoty.

Důsledek: Funkce, která je spojitá na ohraničené a uzavřené množině, je na této množině ohraničená.

Podobně lze formulovat i "vícerozměrnou" variantu Bolzanovy věty.